Наближення операторами Зигмунда класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$

О. В. Островська

Вивчається питання наближення класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ неперервних функцій $f(\cdot)$, що задаються згортками

$$f(x) = A + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+t)\,\hat{\psi}(t)\,dt,$$

де $A=$ const, $\phi(t)$ майже скрізь обмежена функція, $\hat{\psi}(t)$ — перетворення Фур'є випуклої при $t \geq 1$ функції $\psi(\cdot)$ такої, що $\psi'(t)$ має обмежену варіацію на $[0,\infty)$, операторами Зигмунда

$$Z^{\psi}_{\sigma}(f,x) = A + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+t)\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sigma} \lambda_{\sigma}(v)\,\psi(v)\cos(vt+\beta\pi/2)\,dv\,dt,$$

де

$$\lambda_{\sigma}(v) = \begin{cases} 1-\frac{\psi(v)}{\psi(1)}v, & 0 \leq v \leq 1, \\ 1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & 1 \leq v \leq \sigma, \\ 0, & v \geq \sigma. \end{cases}$$

Зокрема, для верхніх меж відхилень на вказаних класах

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_{\sigma}(f,x))_C = \sup_{f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - Z^{\psi}_{\sigma}(f,x)\|_C$$

доведена така теорема.

Теорема. *Нехай* $\beta \in R$, *функція* $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$ *де* $\eta(t) = \psi^{-1}[\frac{1}{2}\psi(t)]$ *задовольняє одну з умов* $A_1 \leq \mu(t) \leq A_2$ *або* $\mu(t)$ *необмежено зростає* $(A_1, A_2 = \mathrm{const})$. *Тоді:*

– *якщо* $\forall \psi \geq 1$ $\mu(\sigma) \leq \sigma$, *то*

$$\frac{2}{\pi}|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\,\psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\,\psi(\sigma) \leq \mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \leq$$
$$\leq \frac{2\psi(\sigma)\,|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi}\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\,\psi(\sigma), \quad \sigma \to \infty$$

– *якщо* $\forall \psi \geq 1$ $\mu(\sigma) \geq \sigma$, *то*

$$\frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\,\mu(\sigma) \leq \mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \leq$$
$$\leq \Big(\frac{2}{\pi}|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + O(1)\Big)\psi(\sigma), \quad \sigma \to \infty.$$

Наслідок. *Якщо* $\mu(\sigma) = O(1)$, *то при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \leq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\,|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma).$$

Національний університет харчових технологій
vo@imath.kiev.ua