БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Сєдих О., Савчук О.
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Людське життя безпосередньо пов'язане з постійними прийняттям рішень в тій чи іншій області. Коли вибір визначається одним єдиним параметром, то зробити його не важко. Однак на практиці зустрічаються задачі, пов'язані з пошуком кращого рішення при наявності двох і більше критеріїв оптимальності. Чим більше критеріїв якості вводиться в розгляд, тим повнішу характеристику переваг і недоліків проектованого об'єкта можна отримати. Таким чином, завдання проектування складних систем завжди багатокритеріальні, тому що при виборі найкращого варіанта доводиться враховувати багато різних вимог, що пред'являються до системи (об'єкта). Саме на рішення такого роду завдань спрямована багатокритеріальна оптимізація.

Розглянемо приклад. Цех промислового підприємства випускає дві марки розчину. Відомо співвідношення цементу і піску для кожної марки розчину. Запаси сировини визначаються можливостями постачальників.

Скласти оптимальний план виробництва розчину всіх марок з позицій багатоцільової оптимізації, при якому обсяг реалізації розчину буде максимальним (у вартісному вираженні) і буде також дотримуватися якість розчину, якщо відома ціна однієї тонни розчину (табл. 1).

Таблиця 1.

Виробничі дані для оптимізації

Характеристика виробництва	Наявний ресурс	Норми витрат ресурсів	
		Р1	Р2
Цемент	3000	6	5
Пісок	3500	5	7
Обсяг реалізації продукції		200	800
Показник якості продукції		900	200

$K_{пред}$=190000, 21000, 240000

$V_{пред}$=180000, 200000, 250000

Введемо позначення змінних: X1 - кількість розчину Р1, т; X2 - кількість розчину Р2, т.

На першому етапі перевага віддається обсягу *V* як основній характеристиці виробництва. Тому перший критерій *V* виступає в якості цільової функції, а другий *K* - у вигляді обмежень (1). На другому етапі перевага віддається якості як до однієї з найбільш важливих характеристик виробництва, тому перший критерій *K* виступає в якості цільової функції, а другий *V* - у вигляді обмежень (2).

$$V = 200X1 + 800X2 \rightarrow \max \qquad K = 900X1 + 200X2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6X1 + 5X2 \le 3000 \\ 5X1 + 7X2 \le 3500 \\ 900X1 + 200X2 \ge K_{пред} \\ X1, X2 \ge 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 6X1 + 5X2 \le 3000 \\ 5X1 + 7X2 \le 3500 \\ 200X1 + 800X2 \ge V_{пред} \\ X1, X2 \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

Вирішимо задачу для обох випадків за допомогою математичного пакету MathCAD.

1 варіант

$V(x1,x2) := 200\cdot x1 + 800\cdot x2$ $\quad g1(x1,x2) := 6\cdot x1 + 5\cdot x2$ $\quad g2(x1,x2) := 5\cdot x1 + 7\cdot x2$ $\quad Kпред(x1,x2) := 900\cdot x1 + 200\cdot x2$

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$g1(x1,x2) \le 3000 \qquad g2(x1,x2) \le 3500 \qquad Kпред(x1,x2) \ge 190000$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := Maximize(V,x1,x2) \qquad V(x1,x2) = 355849.1 \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118.868 \\ 415.094 \end{pmatrix}$

2 варіант

$K(x1,x2) := 900\cdot x1 + 200\cdot x2$ $\quad g1(x1,x2) := 6\cdot x1 + 5\cdot x2$ $\quad g2(x1,x2) := 5\cdot x1 + 7\cdot x2$ $\quad Vпред(x1,x2) := 200\cdot x1 + 800\cdot x2$

Given

$g1(x1,x2) \le 3000 \qquad g2(x1,x2) \le 3500 \qquad Vпред(x1,x2) \ge 180000$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := Maximize(K,x1,x2) \qquad K(x1,x2) = 380526.3 \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 394.737 \\ 126.316 \end{pmatrix}$

Рис.1. Реалізація фрагментів рішень першого та другого варіантів

Отримані результати представлені у таблиці 2.

Таблиця 2.

Результати обчислень

№	X1	X2	V	K	№	X1	X2	V	K
1	118.868	415.094	355849.1	190000	4	394.737	126.316	180000	380526.3
2	145.283	396.226	346037.7	210000	5	368.421	157.895	200000	363157.9
3	184.906	367.925	331320.8	240000	6	302.632	236.842	250000	319736.8

З урахуванням отриманих результатів побудована крива компромісних рішень (рис.2).

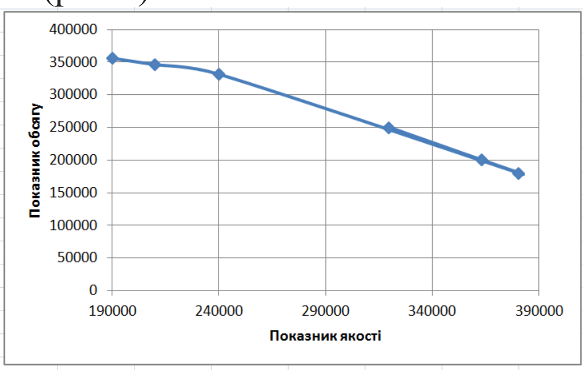

Рис. 2. Крива оптимальних рішень

Варіанти, що розташовані нижче кривої, є неефективними, вище - недосяжними, на кривій - оптимальними, тим самим формується область компромісних рішень.

ЗАДАЧА ПРО РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ В МЕРЕЖАХ

Сєдих О., Савчук О.
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Останнім часом значно зросла зацікавленість практиків мережними і потоковими моделями. Це пов’язано із впровадженням та активним розвитком різноманітних територіально розподілених систем: трубопровідних, транспортних, телекомунікаційних та ін. Основою таких систем є певна мережа, в якій циркулюють певні потоки, тому задачі, які доводиться розв’язувати при проектуванні та експлуатації систем з мережною структурою, часто зводяться до розробки математичних моделей розподілу потоків та постановки і розв’язання відповідних оптимізаційних задач. Відомі моделі розподілу потоків у мережах базуються на поняттях теорії графів. Це пов’язано з тим, що граф дає можливість наочно відобразити структуру мережі, а параметри його вузлів і дуг – представити основними числовими характеристиками її елементів. Потокові задачі, як правило, зводяться до пошуку такого розподілу потоків у мережі, при якому б забезпечувався екстремум деякого критерію. При цьому мають враховуватися обмеження, що накладаються умовами збереження потоків у вузлах і не перевищення потоками пропускної здатності дуг. Типовими потоковими задачами є задача про потік мінімальної вартості, про максимальний потік.

Задачу максимізації потоку представити у вигляді такої задачі оптимізації: можна

$F = \sum_k x_{kn} \to \max$ (сумарний потік, що входить в кінцевий вузол)

Обмеження:

$\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}$ (потік не може накопичуватися в проміжних вершинах)

$0 \le x_{ij} \le D_{ij}$ (пропускна здатність)

$\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0$ (збереження безперервності потоку)

Розглянемо задачу на пошук максимального потоку для системи автодоріг, представленої на рис.1, де цифрами позначена максимальна пропускна здатність ділянок транспортної мережі (тисяч машин в день). Заданий граф частково орієнтований. Для того, щоб прийти до математичної моделі, необхідно перетворити граф в орієнтовану мережу. Це можливо зробити, замінивши кожне неорієнтоване ребро - дорогу з