



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А. В. БАШТА

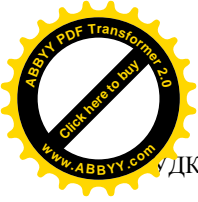
# Опір матеріалів

У РОЗРАХУНКАХ НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ І  
СТІЙКІСТЬ

*Видання друге доповнене*

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчально-методичний посібник  
для студентів вищих технічних навчальних закладів

КИЇВ  
Фірма "ІНКОС"  
2012



УДК 539.3/8

*Гриф Міністерства освіти і науки України.  
Лист № 1.4/1-Г-2114 від 29.11.07 р.*



Рецензенти: **М.І. Бобир**, доктор технічних наук, професор (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»); **А.Є. Бабенко**, доктор технічних наук, професор (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»); **В.В. Астанін**, доктор технічних наук, професор (Національний авіаційний університет)

**Башта А.В.** Опір матеріалів у розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість: Навч.-метод. посібник. — К.: Фірма "ІНКОС", 2012. — 234 с ISBN 978-617-598-085-9.

Висвітлено основні теми та питання проведення розрахунків на міцність і жорсткість елементів конструкцій і деталей машин і механізмів.

Наведено приклади розв'язання типових задач на розтяг (стиск) стержня, кручення вала, згинання консольної та двохопорної балок, кручення та згинання вала, визначення переміщень у статично визначних і невизначних балках і рамах, стій-кість стиснутих стержнів, розрахунок рамних конструкцій за ударних навантажень, а також варіанти завдань для самостійної роботи студентів.

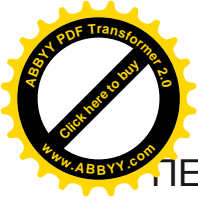
Для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 539. 3/8

ISBN 978-617-598-085-9

© А.В. Башта, 2008, 2012

© Фірма "ІНКОС", 2012



# ПЕРЕДМОВА

«Опір матеріалів» — одна із базових дисциплін в інженерній підготовці фахівців механічних, машинобудівних, будівельних, транспортних та інших спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

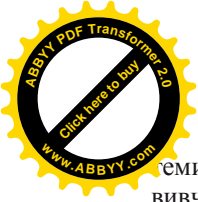
Одним із основних завдань, покладених в основу курсу, є розв'язання триєдиної задачі з визначення внутрішніх силових факторів, напружень і деформацій, що виникають у деталях машин чи елементах конструкцій під дією зовнішніх навантажень.

Необхідно чітко розуміти, що таке внутрішнє зусилля і внутрішнє напруження, навчитися визначати їх у небезпечних перерізах по довжині, висоті чи ширині тіла з метою забезпечення його міцності й надійності у процесі експлуатації. Не менш важливим у вивченні й розумінні цієї дисципліни є з'ясування поняття деформування тіла. В «Опорі матеріалів», де розглядаються схеми реальних конструкційних елементів, необхідно навчитися визначати, як змінюються розміри, форма чи взаєморозміщення точок тіла під дією заданих зовнішніх силових факторів.

Головне завдання посібника — достатньо стисло й наочне викладення основ даного курсу з метою усвідомлення студентами взаємозв'язку між зовнішніми навантаженнями, геометричними розмірами й умовами закріплення та внутрішніми силовими факторами й деформаціями в матеріалі тіла, що розглядається.

Оскільки у процесі вивчення дисципліни «Опір матеріалів» виникають певні труднощі, рекомендується вивчати її в такій послідовності: попередньо ознайомитися з навчальним матеріалом за підручниками й навчальними посібниками, усвідомити фізичну суть явища, звертаючи увагу на прийняті припущення та обмеження, поглиблено вивчити розділи курсу й законспектувати основні положення та висновки, потреба у яких визначається індивідуально самим студентом.

У навчальному посібнику на початку кожного розділу стисло подано основні теоретичні викладки, формулювання й аналітичні залежності, які дають можливість зрозуміти наступну роботу з проведення відповідних розрахунків у наведених прикладах. До кожної



теми подаються запитання для самоперевірки. Тільки доско-  
вивчивши тему, потрібно розпочинати розв'язання задач відповідного  
етапу самостійної роботи.

У завданнях до самостійних робіт розглядаються схематизовані типові  
елементи промислових, транспортних та інших конструкцій, які  
потребують розрахунків на міцність, жорсткість чи стійкість.

За рішенням кафедри вищого навчального закладу окремі задачі в  
завданнях можуть бути випущені чи замінені на інші з урахуванням  
конкретної спеціальності, з якої відбувається інженерна підготовка.  
Можлива також заміна послідовності виконання самих завдань і етапів  
самостійної роботи.

Основною метою самостійної роботи є вивчення за літературними й  
навчально-методичними виданнями науково-теоретичних основ  
розрахунків на міцність і жорсткість елементів конструкцій, процесів і  
фізико-механічних особливостей деформування пружних тіл, а також  
емпіричні та напівемпіричні залежності, що описують ці процеси;  
засвоєння основних понять, визначень і етапів таких розрахунків у  
статично визначних і невизначних пружних системах у реальних умовах  
як простого, так і складного навантаження та закріплення; набуття  
практичних навичок розрахунку елементів конструкцій на міцність,  
жорсткість і стійкість (визначення переміщень точок пружних систем як  
за величиною, так і за напрямком, знаходження критичного  
навантаження, вибір раціональних форм по перерізах перерізів, розмірів  
й умов закріплення розраховуваних тіл).

Оформлення роботи складається із двох основних частин — графічної  
та розрахунково-пояснювальної. Графічні побудови до кожного розділу  
роботи слід виконувати на окремому аркуші паперу формату А4  
олівцем і з дотриманням усіх стандартних вимог креслення. На  
кресленнях повинна бути обов'язково задана розрахункова схема  
завдання, відповідні написи та розміри, проставлено прийнятий  
масштаб. Пояснювальна записка має бути написана чорнилом або  
кульковою ручкою з однієї сторони аркуша паперу формату А4, з  
полями ліворуч та праворуч по 20 мм, повинна мати титульну сторінку,  
варіант завдання, числові дані та задані схеми до кожного розділу,  
короткі пояснення до рішень і розрахунків, а в кінці — висновки до  
роботи, список використаної літератури й зміст.

Усі необхідні для розрахунків рівняння і формули слід записувати  
спочатку в загальному вигляді, а потім підставляти числові зна-



ення та наводити кінцевий результат із зазначенням розмірності. Повторюваних обчислень записувати розрахункову формулу, а результати виносити в табличну форму.

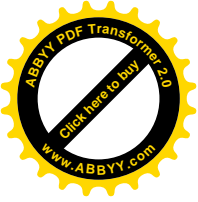
Вибір варіанта завдання, а саме розрахункова схема й числові дані до неї, позначено чотиризначним числом, перші дві цифри якого означають номер схеми, а дві другі — номер рядка (стовпця) таблиці цифрових даних. Наприклад, шифр 1612 означає, що студент повинен узяти розрахункову схему № 16, а дані для розрахунків — із рядка (стовпця) № 12 відповідної таблиці.

Складаючи умову задачі згідно з отриманим варіантом, студент повинен пам'ятати:

якщо навантаження в таблиці наводиться з від'ємним «-» знаком, то на своєму рисунку необхідно змінити напрямок його дії на протилежний і надалі знак «-» не брати до уваги;

із таблиці слід виписувати значення лише тих величин (навантажень, розмірів), які вказані у його розрахунковій схемі.

Виконану самостійну роботу, підписану студентом на останній сторінці текстової частини, рецензує викладач кафедри, після чого проводиться її захист. На захисті студент повинен показати знання теорії та загальних методів розв'язання практичних прикладів. За самостійну роботу виставляється диференційована оцінка.



## ВСТУП

### Основні поняття, об'єкти вивчення та прийняті гіпотези

«Опір матеріалів» - це одна із базових дисциплін в інженерній підготовці фахівців, механічних, будівельних, транспортних, технологічних та інших спеціальностей вищих технічних навчальних закладів, яка вивчає основні методи розрахунку деталей машин та конструкційних елементів на міцність, жорсткість і стійкість.

*Міцність* – здатність конструкційного елемента витримувати максимальні навантаження не руйнуючись при цьому.

*Жорсткість* – здатність конструкційного елемента протистояти його деформуванню (зміні форми та розмірів) при дії зовнішнього навантаження. Величина деформації при цьому обумовлюється фізичними властивостями матеріалу чи нормативними документами.

*Стійкість* – здатність конструкційного елемента зберігати початкову форму пружної рівноваги при дії зовнішнього навантаження.

### Основні форми тіл та гіпотези, що розглядаються в даному курсі

При всій різноманітності конструкційних елементів, що зустрічаються в апаратах, машинах та спорудах, їх можливо привести до порівняно незначного числа основних форм. Тіла, що мають такі форми, і є об'єктами вказаних вище розрахунків. Це стержні або бруси, оболонки і пластини, масиви або масивні тіла та їх системи.

*Брусом* або стержнем є тіло, в якого один розмір (поздовжній) значно перевищує два інших (поперечних) розміри (рис. 1). Стержні бувають прямолінійні та криволінійні, за формою та розмірами поперечного перерізу - призматичні, круглі, постійного або змінного поперечного перерізу.

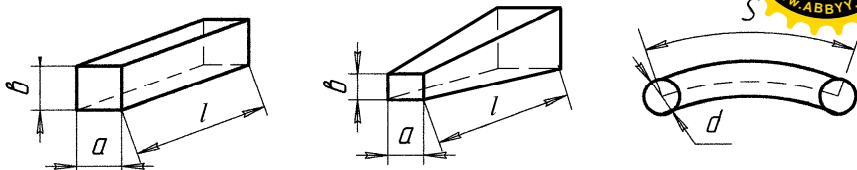
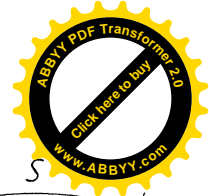
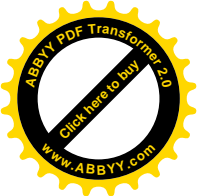
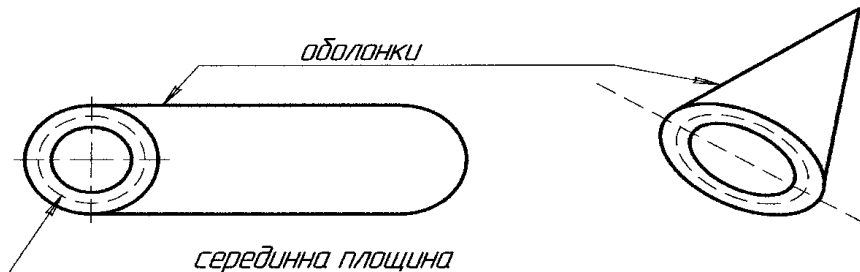


Рис.1. Характерні схеми стержнів

*Оболонка* являє собою тіло, яке обмежене двома криволінійними поверхнями, що знаходяться досить близько одна від одної і ця відстань (товщина оболонки) значно менша за два інших її розміри. Геометричне місце точок рівновіддалене від вказаних поверхонь являє собою серединну поверхню тіла. По її формі розрізняють циліндричні, конусоподібні, шароподібні та інші види оболонок (рис. 2).

*Пластина* - різновид оболонки, серединна поверхня якої є площина і може бути круглою, прямокутною або іншої форми.

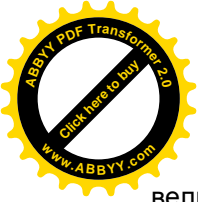
а)



б)



Рис. 2. Характерні схеми а) – оболонок, б) – пластин.



*Масивами* – називають тіла, в яких всі три розміри величинами одного порядку виміру. Це можуть бути фундаменти споруд, несучі опори великих мостів і т. п.

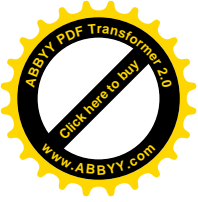
Опір матеріалів розглядає не абстрактне абсолютно тверде тіло, а реально існуюче, яке під дією прикладених до нього сил може, як уже відмічалось, деформуватися. Деформації розділяють на пружні та пластичні (або залишкові)

*Пружна деформація* - це така зміна форми й розмірів тіла, яка зникає після зняття з тіла зовнішніх сил. Це порівняно невеликі деформації.

*Пластичні деформації* значно більші. Вони не зникають після зняття навантаження з тіла, а залишаються в ньому. По характеру навантаження розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення та згину. Для переважної більшості елементів конструкцій величини цих деформацій обмежуються нормативними документами.

Кожна наука вивчає якусь відповідну модель тіла або явища, яка наближена до реального тіла або явища без зайвих для цієї науки подробиць. В опорі матеріалів використовуються деякі гіпотези (припущення) про структуру, властивості та характер деформування матеріалів, що значно спрощують розрахунки.

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу.* Передбачається, що весь об'єм тіла заповнений цим матеріалом. Атомарна теорія дискретної побудови речовини не береться до уваги. Це значно спрощує розрахунки при використанні механіки суцільного середовища, хоча реальні матеріали, з яких зроблено тіло, не завжди відповідають цьому припущенню. Так, відомо, що чавуни мають внутрішні порожнини, бетон також реально не суцільний матеріал, але цими обставинами нехтують.
2. *Гіпотеза про однорідність та ізотропність матеріалу.* Передбачається, що властивості матеріалу тіла однакові в усіх точках і в кожній точці – в усіх напрямках. Тобто в усіх його точках склад, будова і механічні властивості однакові. Це також не повністю відповідає реальності, але при розрахунках цим нехтують. Реальні металеві тіла складаються із кристалів, які є анізотропними. Завдяки великим розмірам тіл, порівняно із хаотично



розташованими кристалами, вони можуть з достатнім ступенем достовірності, вважатися ізотропними.

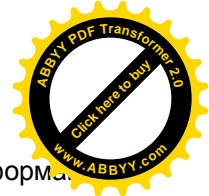
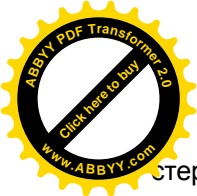
3. *Гіпотеза про малість деформацій.* Передбачається, що деформації в тілі досить незначні (малі) в порівнянні з розмірами самого тіла. На цій підставі нехтують змінами в розміщенні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла при деформації, що дає можливість при розрахунках використовувати рівняння рівноваги статички.
4. *Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.* Передбачається, що всі тіла є абсолютно пружними. В дійсності реальні тіла можна вважати пружними тільки в певних межах навантажень.
5. *Гіпотеза про лінійну залежність між навантаженнями і деформаціями.* Передбачається, що для більшості матеріалів є справедливим закон Гука, який встановлює прямо пропорційну залежність між навантаженнями та деформаціями.
6. *Гіпотеза плоских перерізів.* Передбачається, що умовно проведені плоскі перерізи, перпендикулярні до поздовжньої осі стержня, в процесі його деформування залишаються плоскими і перпендикулярними до осі.

Є ще кілька припущень. Вважається, що до прикладання зовнішніх сил, внутрішні зусилля в тілі відсутні. Дуже важливим є використання принципу незалежності дії сил. Відповідно до цього принципу, ефект від дії кількох сил, прикладених до тіла, дорівнює сумі ефектів від дії кожної із сил, прикладених до тіла у будь-якому порядку. Але принцип незалежності дії сил може бути використаним лише у випадку малих деформацій, та коли ці деформації лінійно залежать від напружень. Використовується також так званий принцип Сен-Венана. Більш детально про цей принцип буде сказано в наступній главі.

## Основні види деформацій конструктивних елементів

1. *Розтяг або стиск.* Такий вид деформування виникає в тому випадку коли до стержня вздовж осі прикладені протилежно спрямовані сили (рис.3).

$F$  - сила;  $l$  - початкова довжина стержня;  $l$  - кінцева довжина



стержня;  $\Delta l$  – величина абсолютної поздовжньої деформації стержня;

$\Delta a, \Delta b$  – величини абсолютних поперечних деформацій.

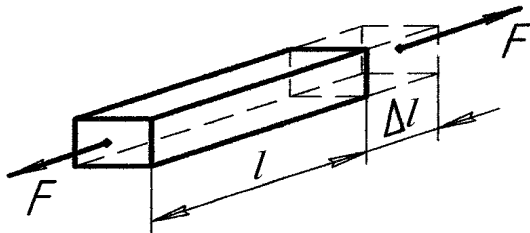


Рис.3 Схема навантаження і деформування стержня при поздовжньому розтягу (стиску)

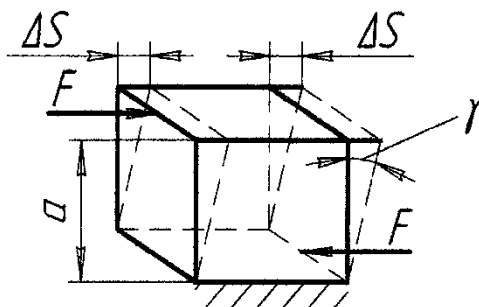
$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l} - \text{відносне середнє подовження стержня}$$

$$\frac{a - a_1}{a} = \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon' - \text{відносне поперечне «подовження»}$$

$$\frac{b - b_1}{b} = \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon'$$

2. Зсув або зріз. Цей вид деформації виникає коли зовнішні сили

зміщують два паралельних перерізи стержня один відносно одного, при незмінній відстані між ними(рис.4).



$\Delta S$  – величина зміщення перерізів (абсолютний зсув);

Рис.4 Схема навантаження і деформування при зсуві

$tg\gamma \approx \gamma = \frac{\Delta S}{a}$  – відношення абсолютного зсуву до відстані між площинами, що зміщуються, називають *кутом зсуву*, або просто *відносним зсувом*.

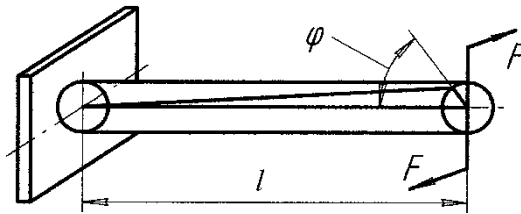
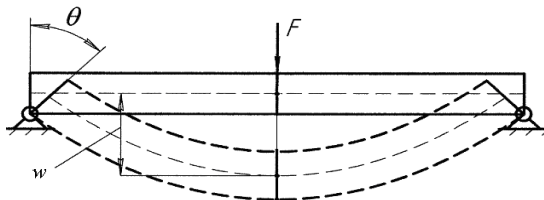


Рис.5 Схема навантаження і деформування стержня при крученні

стержня (рис.5).

$\varphi$  – кут повороту одного поперечного перерізу відносно іншого (абсолютний кут закручування);

$\theta = \frac{\varphi}{l}$  – відносний кут закручування.



### 3. Кручення.

Такий вид деформування виникає при дії на стержень зовнішніх сил, що утворюють момент пари сил

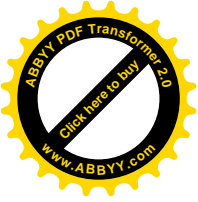
$$(M_x = M_{кр})$$

площа дії якої є перпендикулярна відносно поздовжньої осі

Стержні, що працюють на кручення називають *валами*.

### 4. Згин.

Деформація згину полягає у викривленні осі прямого стержня або в зміні кривизни кривого стержня.



Характеризуєт величиною прогину ( $w$ ) і кутом повороту перерізу ( $\theta$ ) відносно його початкового положення(рис.6). Стержні, що працюють на згин називають *балками*.

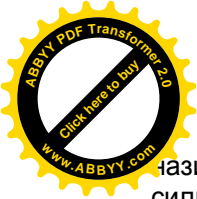
Рис.6 Схема навантаження і деформування стержня при згині

Вважається також, що до прикладання зовнішніх сил, внутрішні зусилля в тілі відсутні. Дуже важливим є використання в розрахунках принципу суперпозиції (незалежності дії) сил. Відповідно до цього принципу, ефект від дії кількох сил, прикладених до тіла, дорівнює сумі ефектів від дії кожної із сил, прикладених до тіла у будь-якому порядку. При цьому слід пам'ятати, що принцип суперпозиції сил може бути використаним лише у випадку малих деформацій, та коли ці деформації лінійно залежать від напружень.

### **Класифікації зовнішніх і внутрішніх сил. Метод поперечних перерізів. Напруження повне, нормальне та дотичне.**

#### **Зовнішні сили.**

. В процесі експлуатації деталі машин і споруд взаємодіють одна з одною, передаючи при цьому тим чи іншим чином навантаження. Сили взаємодії одного тіла на інше



називають - *зовнішніми силами*. До зовнішніх відносять та *си*ли ваги, *си*ли інерції, що діють на кожну одиницю об'єму деформованого тіла.

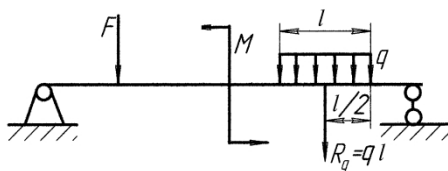
Якщо зовнішні *си*ли є результатом взаємодії тіл, тільки в точках їх поверхні, то такі *си*ли називаються - *поверхневими силами*.

Поверхневі *си*ли можуть бути зосередженими в точці, розподіленими по об'єму (наприклад, вага тіла), поверхні, або лінійними (погонне навантаження по довжині).

Величина навантаження, що припадає на одиницю площі чи довжини, називається *інтенсивністю навантаження* і найчастіше позначається латинськими літерами:  $p$  – одиниці вимірювання – (Па, КПа, МПа) і  $q$  – одиниці вимірювання – (Н/м, КН/м, МН/м) відповідно.

Якщо навантаження розподілено на невеликій поверхні чи довжині тіла (в порівнянні з його розмірами), то його завжди замінюють рівнодіючою, яку називають *зосередженою силою* і позначають символом  $-F$ , одиницями виміру є (Н, КН, МН), *зосереджений момент сили*, або *пару сил* прийнято позначати символом  $-M$ , одиницями виміру є (Нм, КНм, МНм) (рис.7).

При визначенні реакцій в опорах і побудові епюр необхідно визначити рівнодіючу інтенсивності розподіленого навантаження, що діє на даному відрізку. Рівнодіюча розподіленого навантаження чисельно дорівнює добутку інтенсивності навантаження на довжину відрізка (площу тієї фігури), де вона діє і завжди прикладається в центрі її ваги.



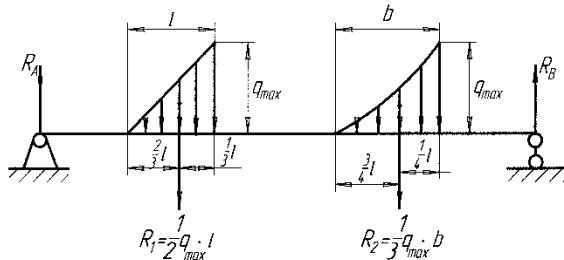


Рис.7. Схематичне зображення видів зовнішніх навантажень стержня

Зовнішні сили розподіляють на статичні та динамічні.

**Статична сила** - це навантаження, яке зростає за певний проміжок часу, змінюючись від нуля до свого кінцевого значення. Прискоренням при цьому нехтують.

**Динамічні сили** - це сили, які діють на деталі, або елементи конструкції при значних прискореннях, якими не можна нехтувати. Одним з видів динамічних сил є сили інерції, які виникають при переміщенні в просторі тіл з такими прискореннями.

Ці сили, в свою чергу, можуть бути миттєво-прикладеними, ударними та повторно-змінними.

**Миттєво-прикладеними силами** вважаються такі сили, які досягають свого кінцевого значення за доли секунди.

**Ударні сили** характеризуються тим, що в момент прикладання тіло, що визвало дію цього навантаження, мало якусь величину кінетичної енергії ("баба" копра, механічний ковалевий молот і т. п.).

**Повторно-змінні сили** пов'язані з безперервною взаємодією контактуючих тіл, при цьому напрямок або величина виникаючих сил періодично змінюється в часі (зворотно-наступальні рухи штока, коливання маятника).

До зовнішніх сил відносять також реакції опор конструкції та її елементів. У багатьох задачах опору матеріалів вони спочатку невідомі. Знаходять їх за допомогою рівнянь рівноваги, які розглядаються у одному із розділів курсу «Теоретична механіка». Там також достатньо детально, розглянуто ще одну класифікацію зовнішніх сил в контексті - сили активні та реактивні.

Проводячи інженерні розрахунки конструкційних

елементів, слід добре пам'ятати, що їх міцність та жорсткість залежить не від заданих сил, а цілком і повністю визначаються величиною та напрямком дії внутрішніх сил, які виникають в цих тілах при зовнішньому навантаженні.

## Внутрішні сили. Метод поперечних перерізів

*Внутрішні сили* – це такі додаткові сили взаємодії, що виникають в тілі під дією зовнішніх сил.

Внутрішні сили характеризують взаємодію між частинками тіла. Поки зовнішні сили не навантажують тіло, внутрішні сили в ньому відсутні.

Для оцінки міцності будь-якої конструкції необхідно розрахувати всі внутрішні зусилля, що діють в ній і визначити положення самого небезпечного перерізу.

Для визначення місцезнаходження небезпечного перерізу необхідно вміти будувати графіки розподілу внутрішніх сил по довжині конструкційного елемента. Такі графіки мають назву "епюр".

Для побудови епюр розподілу внутрішніх зусиль в тілі використовується так званий *метод перерізів*. Це основний метод науки про опір матеріалів.

Розглянемо цей метод. Нехай на якесь тіло, наприклад призматичний брус, діє якась врівноважена система зовнішніх сил. Розріжемо це тіло на дві частини умовною площиною  $L$ , (рис.8, а).

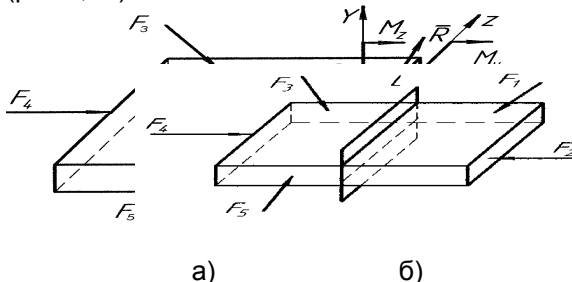
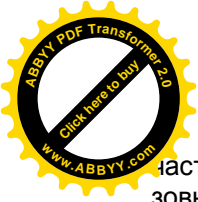


Рис.8 Схема навантаження тіла – а) і умовно відсічена його ліва частина – б)

Розглянемо рівновагу залишеної лівої частини. Ця



Частина тіла знаходиться у стані рівноваги під дією на зовнішніх та виникаючих при цьому внутрішніх сил. Внутрішні сили, в свою чергу, приводяться до головного вектору  $\vec{R}$  і головного моменту  $\vec{M}$ . Вони заміняють дію відкинутої правої частини тіла на залишену. Для лівої частини тіла ці внутрішні (раніше) силові фактори є зовнішніми (рис.8, б). Їх знаходять із рівнянь рівноваги всіх сил, що діють на цю частину тіла. Осі  $x$ ,  $z$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу, де  $x$  і  $z$  – поздовжня та поперечна горизонтальні, а  $y$  – вертикальна поперечна вісь стержня. Спроєктувавши на них головний вектор  $\vec{R}$  та головний момент  $\vec{M}$ , будемо мати шість внутрішніх силових факторів: три сили ( $N, Q_y, Q_z$ ); і три моменти ( $M_x, M_y, M_z$ ).

#### Визначення внутрішніх зусиль.

$N$  – поздовжня осьова сила або нормальна сила. Ця сила чисельно дорівнює сумі проєкцій усіх внутрішніх сил, що діють в перерізі одної відсіченої частини стержня на його поздовжню вісь (або на перпендикуляр до площини перерізу стержня). Вона викликає поздовжню його деформацію (розтягу чи стиску);

$Q_y, Q_z$  – поперечні сили. Вони чисельно дорівнюють сумі проєкцій усіх внутрішніх сил в перерізі відсіченої частини стержня на головні центральні осі  $y$  і  $z$ , відповідно. Ці сили викликають зміщення одного перерізу стержня відносно іншого, тобто деформацію зрізу або зсуву.

$M_y, M_z$  – згинальні моменти. Вони чисельно дорівнюють сумі моментів від дії всіх внутрішніх сил у перерізі відсіченої частини стержня відносно його головних центральних осей  $y$  і  $z$ , відповідно. Ці силові фактори викликають у стержні деформації згину.

$M_x = M_{кр}$  – крутний момент. Він дорівнює сумі моментів від дії всіх внутрішніх сил у перерізі відносно поздовжньої осі стержня. Цей момент викликає деформацію кручення.

Необхідно пам'ятати, що оскільки пружна система



знаходиться в рівновазі, то сума проєкцій сил або моментів, знаходяться зліва від перерізу дорівнює сумі проєкцій всіх сил чи моментів, що знаходяться справа від перерізу. Таким чином метод поперечних перерізів дозволяє визначити всі внутрішні зусилля і моменти у будь-якому перерізі стержня при дії будь-якого зовнішнього навантаження.

Для практичного визначення внутрішніх зусиль за допомогою цього методу необхідно:

- уявно провести поперечний переріз стержня у тому місці, де потрібно визначити внутрішні сили і моменти;

- побудувати головні центральні осі поперечного перерізу стержня;

- визначити внутрішні сили  $(N, Q_y, Q_z)$  і моменти  $(M_y, M_z, M_{кр})$ , як алгебраїчні суми проєкцій всіх зовнішніх сил і всіх зовнішніх моментів, діючих на одну із частин "умовно розсіченого" стержня, який знаходиться в рівновазі.

#### Правила визначення внутрішніх силових факторів.

1. Для практичного розрахунку осьової сили  $N$  необхідно визначити алгебраїчну суму проєкцій всіх зовнішніх сил, які знаходяться по одну сторону від перерізу, на поздовжню вісь стержня,

2. Для того, щоб практично визначити величину поперечної сили в перерізі, що розглядається, необхідно вирахувати алгебраїчну суму проєкцій всіх зовнішніх сил, що лежать по одну сторону від перерізу, на вісь перпендикуляру до поздовжньої осі балки;

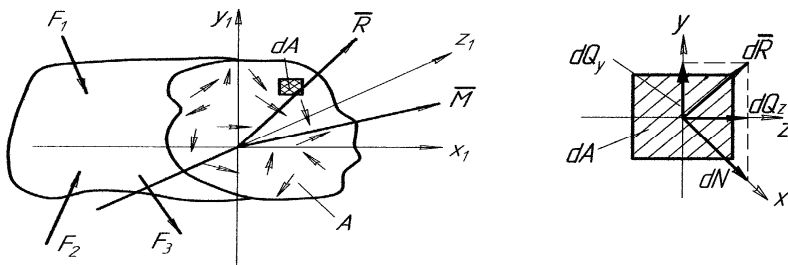
3. Для практичного розрахунку величини згинального моменту в перерізі, що розглядається по довжині стержня, необхідно вирахувати алгебраїчну суму моментів всіх зовнішніх сил відносно відповідної осі, які діють по одну сторону від перерізу;

4. Для визначення крутного моменту в перерізі по довжині стержня необхідно знайти алгебраїчну суму моментів від всіх зовнішніх сил навколо його поздовжньої осі які діють по одну сторону від перерізу.

## Напруження нормальне, дотичне,повне. Поняття про напружено-деформований стан.

*Напруження* – це міра інтенсивності внутрішніх сил у якійсь довільній точці тіла, яке визначається із відношення величини цих сил до площі перерізу де вони діють.

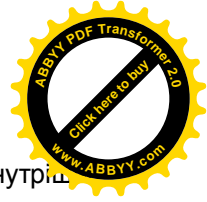
Розглянемо тіло, яке знаходиться в рівновазі під дією зовнішніх сил. Розтинаючи його умовним перерізом і розглядаючи рівновагу, наприклад, лівої частини, будемо мати цілий спектр внутрішніх зусиль розподілених по перерізу (рис. 9,а). Привівши їх до центру ваги площі перерізу будемо мати головний вектор сил  $\vec{R}$  і головний вектор моменту  $\vec{M}$ . Будемо вважати, що внутрішні сили, які діють на нескінченно малий її елемент величиною  $dA$  (рис.9,б), виділений в площі перерізу, будуть рівновеликими, як за значеннями, так і за напрямком дії.



б)

Рис.9 Схематизований спектр зовнішніх і внутрішніх сил відсіченої частини тіла

Відтак, головний вектор внутрішніх сил  $d\vec{R}$  цього елемента площі буде проходити через центр його ваги, а головний момент  $d\vec{M} = 0$ . Проектуючи головний вектор  $d\vec{R}$  на його головні вісі  $x, y, z$ , будемо мати елементарні поздовжню  $dN$



і поперечні  $dQ_y, dQ_z$  сили. Так, як ми прийняли, що внутрішні сили на елементарній площі розподіляються рівномірно то, розділивши їх на площу  $dA$ , отримаємо величини поздовжніх і поперечних сил, що припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}; \tau_y = \frac{dQ_y}{dA} \quad (1)$$

Ці величини мають, відповідно, назви *нормального і дотичних напружень* на елементарній площі. Відтак, інтегруючи по всій площі поперечного перерізу любу із наведених залежностей (1) будемо мати величину, що чисельно дорівнює відношенню внутрішньої сили до площі поперечного перерізу і яку називають *напруженням*.

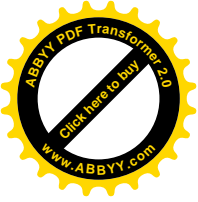
Стан тіла, при якому під дією навантаження в ньому виникають напруження (або необхідно їх визначити) називається *напруженим станом*.

За характером і напрямком дії внутрішніх сил, напруження поділяють на нормальні та дотичні, що діють в довільній точці тіла чи в його перерізі. Отже, *нормальними напруження* називають напруження, що викликані дією поздовжніх сил  $dN$  (див. рис.8,б) і їх напрямок є паралельний вісі  $x$ , що є перпендикулярною до площі перерізу. *Дотичними напруженнями* називаються напруження, що викликані дією поперечних сил  $dQ_y$  і  $dQ_z$ . Напрямок дії цих напружень паралельний до осей  $y$  та  $z$ , відповідно, тобто дотичні напруження діють в площині перерізу

*Повне напруження* в довільній точці тіла, при загальному випадку його навантаження, може бути виражене через нормальне та дотичні напруження так:

$$p = \frac{dR}{dA} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_z^2 + \tau_y^2} \quad (2)$$

Складові повного напруження мають фізичний зміст. Відомо з експериментальних досліджень, що існують два типи руйнування твердого тіла: відривом, його викликають нормальні напруження  $\sigma$ , та зсувом, його викликають дотичні напруження  $\tau$ .



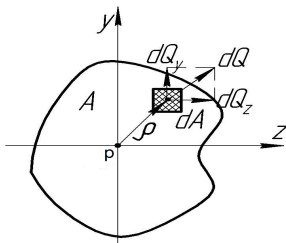
Одиницею виміру напружень є Па, КПа, МПа.

Переходячи від елементарної площі шляхом інтегрування до повної площі перерізу, з урахуванням залежностей (1), ми можемо записати рівняння, що встановлюють взаємозв'язок між напруженнями і компонентами внутрішніх силових факторів в такому вигляді:

$$\begin{aligned} N &= \int_A dN = \int_A \sigma \cdot dA; \\ M_z &= \int_A y \cdot dN = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA; \\ Q_y &= \int_A dQ_y = \int_A \tau_y \cdot dA; \\ M_z &= \int_A z \cdot dN = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA; \\ Q_z &= \int_A dQ_z = \int_A \tau_z \cdot dA; \\ M_x = M_{kp} &= \int_A \rho \cdot dQ = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA. \end{aligned} \quad (3)$$

Залежності (3) називають *інтегральними, або статичними рівняннями рівноваги*.

При отриманні виразу для крутного моменту в його рівнянні приймалися до уваги наступні перетворення:

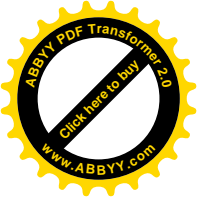


$$dQ = \sqrt{dQ_y^2 + dQ_z^2}; \frac{dQ}{dA} = \tau;$$

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

$$dM_x = dM_{kp} = \rho dQ = \tau \rho dA$$

Рис.10. Схема сил в довільній точці перерізу, що визивають дію  $M_{kp}$  по відношенню до полюсу (т.р).



Як відомо, дія зовнішніх сил на тіло спричиняє деформування, тобто зміну його форми та об'єму. Стан тіла, при якому воно змінює свої розміри під дією навантаження називається *деформованим станом*, а саме тіло – *деформованим тілом*. При цьому, як уже відмічалось, виникають деформації розтягу-стиску, зсуву, кручення, згину. Ці деформації обумовлюються відповідними діями внутрішніх поздовжніх чи поперечних сил, крутного чи згинальних моментів або ж їх комбінаціями.

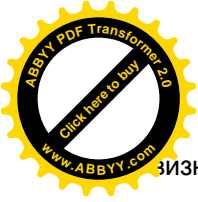
Стан тіла, при якому внаслідок дії зовнішніх сил воно деформується, (в ньому виникають напруження і деформації) називається *напружено-деформованим станом*.

Оскільки закон розподілу напружень за висотою поперечного перерізу невідомий, вирахувати величину напружень тільки на основі інтегральних рівнянь рівноваги неможливо. Така задача є невизначною і її розв'язок розглядається з чотирьох сторін (чотириєдина задача опору матеріалів):

- 1) Статична сторона задачі, де записуються необхідні інтегральні рівняння рівноваги;
- 2) Геометрична сторона, в якій на основі експериментальних даних оцінюються можливі переміщення (деформації) точок перерізу, що розглядається.
- 3) Фізична сторона задачі, в якій на основі дослідних даних встановлюється зв'язок між напруженнями і деформаціями (переміщеннями), записується закон Гука;
- 4) Проводиться синтез – тобто спільно розв'язуються всі рівняння і шляхом виключення або урахування відомих переміщень (деформацій) дістаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти у перерізі.

### **Умови міцності і жорсткості**

Основою інженерного розрахунку на міцність, а відповідно, і одною із головних задач опору матеріалів, є визначення діючих на тіло з заданими розмірами, максимальних силових, температурних, або інших навантажень. Такі навантаження, а при їх заданості, розміри тіла можуть бути



визначені із розрахунків на міцність, жорсткість чи стійкість.

Очевидним є те, що любий конструкційний матеріал не може витримувати як завгодно великі навантаження. Виходячи із умов надійності роботи деталі машини чи механізму, необхідно визначити допустимі значення таких навантажень або величини допустимих напружень, що виникають при цьому в поперечних перерізах тіла. Таким чином, максимальні напруження які здатен витримувати елемент конструкції, виходячи із умови надійності його роботи, називаються *допустимими напруженнями* і позначаються, відповідно,  $[\sigma]$  – нормальні та  $[\tau]$  – дотичні.

По відомих величинах допустимих напружень для даного матеріалу та формулах реально діючих напружень в тілі проводяться розрахунки мінімально допустимих його розмірів. В основу таких розрахунків покладено дві основні *умови міцності*:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{по нормальним напруженням;}$$
$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \text{по дотичних напруженнях}$$

$\sigma_{\max}, \tau_{\max}$  – відповідно максимальні нормальні і дотичні напруження в тілі. Наведені умови вказують на те, що нормальні чи дотичні напруження, які діють в небезпечному поперечному перерізі або ж в небезпечній точці тіла, не повинні перевищувати допустимих напружень для матеріалу з якого воно виготовлено.

Наряду з визначенням максимальних напружень в тілі, виходячи із умов міцності, обов'язковим є розрахунок максимально допустимих деформацій в ньому керуючись *умовою жорсткості*, яка обмежує їх величину. Так, наприклад, при розтягу (стиску) умова жорсткості записується так:

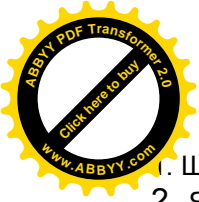
$$l_{\max} \leq [\Delta l]$$

де  $l_{\max}$  – величина максимальної деформації в тілі;

$[\Delta l]$  – величина допустимої деформації для даного матеріалу.

При цьому слід мати на увазі, що у випадку розбіжності визначених таким чином розмірів, приймаються більші із них.

### Запитання для самоперевірки



1. Що таке опір матеріалів?
2. Які тіла називають брусом, пластиною, оболонкою?
3. Яка різниця між пружними та пластичними деформаціями?
4. Які припущення (гіпотези) існують в курсі опору матеріалів?
5. Що розуміють під простими випадками навантаження тіла?
6. Що таке міцність, жорсткість та стійкість?
7. Які існують класифікації зовнішніх сил?
8. Яка сила називається зосередженою?
9. Які сили називають внутрішніми?
10. В чому полягає суть методу перерізів?
11. Що характеризує напруження?
12. Що таке напруження повне, нормальне, дотичне?
13. В яких одиницях вимірюються напруження?
14. Що являє собою чотириєдина задача опору матеріалів?
15. Що являє собою основна умова міцності?
16. Що таке умова жорсткості?
17. Які види деформацій виникають в тілі при навантаженні?
18. Як визначається відносна деформація в тілі при його навантаженні?
19. Що характеризують собою інтегральні рівняння рівноваги?
20. Назвіть основні види зовнішніх навантажень, що розглядаються в даному курсі.