УДК 539.3

О.І. Жупанська, М.А. Мартиненко (УДУХТ, м.Київ, Україна)

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНИХ СФЕР БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ ТЕОРІЇ ГЕРЦА ВІДНОСНО РОЗМІРІВ ЗОНИ КОНТАКТУ

Побудовано розв'язок задачі про стиск пружних сфер без спрощень теорії Герца відносно розмірів зони контакту. Вдалося точно врахувати вплив кривини поверхні сфери і розташування зовнішніх сил на розподіл контактних напружень. Знайдені переміщення точок поверхні сфери, що неможливо виконати в межах теорії Герца

Розв'язок задачі про контактний стиск пружних сфер був отриманий в класичній роботі Г.Герца [1] шляхом зведення граничної задачі теорії пружності до задачі теорії потенціалу для півпростору. При цьому припускалися умови: характерні розміри області контакту мають бути малими порівняно з розмірами кожного з тіл, що контактують, і з розмірами кривини їх поверхонь.

При розв'язанні задач в рамках теорії Герца не потрібно додаткових узагальнень для жорстких пружних матеріалів внаслідок того, що пластичні деформації виникають вже при достатньо малих відносних розмірах зони контакту. Однак для гумоподібних матеріалів області контакту можуть бути значними в межах виконання закону Гука. Саме для такого класу задач проводяться дослідження контактного стиску двох ідентичних пружних сфер.

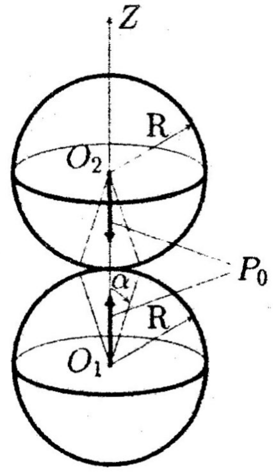

Рис. 1

В даній роботі розглядається мішана контактна задача осесиметричної теорії пружності для суцільної сфери. Розмір зони контакту будемо визначати кутом α, тоді радіус кола, по якому здійснюється контакт, буде:

$$a = R\sin\alpha. \tag{1}$$

Значення сил притискання P_0 знаходимо в залежності від величини області контакту (кута α). Загальний розв'язок для пружної сфери в сферичних координатах отриманий в [2]. У випадку сфери, навантаженої зосередженою силою в її центрі, він має вигляд (розглядається нижня сфера):

$$c2Gu_r = 4\frac{m-1}{m}\frac{C_1}{r}P_1(\cos\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(n-6+\frac{4(m+1)}{m}\right)A_n r^{n+1} + B_n r^{n-1}\right]P_n(\cos\vartheta),$$

$$2Gu_\theta = \frac{3m-4}{m}\frac{C_1}{r}P_1^{(1)}(\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(n\left(n+9-\frac{4(m+1)}{m}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times A_n r^{n+1} + (n+1)B_n r^{n-1}\right]\frac{P_n^{(1)}(\cos\vartheta)}{n(n+1)}, \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= -2\frac{2m-1}{m}\frac{C_1}{r^2}P_1(\cos\vartheta)+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(n(n-1)-\frac{2(m+1)}{m}\right)A_n r^n+\right.\\
&\left.+(n-1)B_n r^{n-2}\right]P_n(\cos\vartheta),\\
\tau_{r\vartheta} &= -\frac{m-2}{m}\frac{C_1}{r^2}P_1^{(1)}(\cos\vartheta)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n\left((n-1)(n+3)+\frac{2(m+1)}{m}\right)\times\right.\\
&\left.\times A_n r^n+(n^2-1)B_n r^{n-2}\right]\frac{P_n^{(1)}(\cos\vartheta)}{n(n+1)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Причому $C_1=\frac{m}{m-1}\frac{P_0}{8\pi}$, $B_0=0$, де m – число Пуассона, G – модуль зсуву. Кінематична гранична умова:

$$
u_s|_{r=R}=-R(\cos\vartheta-\cos\alpha)\qquad(0\le\vartheta\le\alpha).
\tag{4}
$$

Покладаючи $F_{ns}|_{r=R}=-f(\vartheta)$ $(0\le\vartheta<\alpha)$, запишемо граничні умови для зусиль:

$$
\begin{aligned}
F_{ns}|_{r=R} &= \begin{cases}-f(\vartheta) & (0\le\vartheta<\alpha),\\ 0 & (\alpha<\vartheta\le\pi),\end{cases}\\
F_{n\rho}|_{r=R} &= 0\qquad(0\le\vartheta\le\pi).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Невідомі зусилля в контакті $f(\vartheta)$ подамо у вигляді розвинення за поліномами Лежандра:

$$
-f(\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nP_n(\cos\vartheta),\qquad a_n=-\frac{2n+1}{2}\int_0^\alpha f(\vartheta)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta
\tag{6}
$$

Постійні інтегрування виключаються з умови відсутності дотичних зусиль на поверхнях сфер і остаточно виражаються через коефіцієнти розкладу невідомих зусиль в зонах контакту. Беручи для останніх інтегральні представлення Абеля від деякої невідомої функції $\varphi(x)$ на інтервалі зміни кутової координати в зоні контакту, для неї за заданими осьовими переміщеннями отримано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, яке містить логарифмічну особливість і регулярну частину в ядрі

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{3y}{2}-\cos\alpha\cos\frac{y}{2} &= \left(-\frac{B_1}{2GR}+c\frac{C_1}{2GR^2}\right)\cos\frac{y}{2}-\frac{10}{3}\frac{m-1}{m+1}\frac{C_1}{2GR^2}\times\\
&\times\cos\frac{5y}{2}+\frac{m-1}{m}\pi\varphi(y)+\frac{1}{2}\int_0^\alpha\varphi(x)\left\{-\frac{5}{3}\frac{m}{m+1}\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{y}{2}-\right.\\
&\left.-\frac{(m-2)^2}{m^2}\ln\left(\frac{|\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}|}{|\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}|}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}F(n)\cos(n+\frac{1}{2})x\cos(n+\frac{1}{2})y\right\}dx,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&F(n)=\frac{an+b}{(2n+1)\Delta n}+\frac{1}{n(2n+1)},\quad \Delta n=n^2-n\frac{m-2}{m}+\frac{m-1}{m}\\
&a=-3-2\frac{7m^2-24m+16}{m^3},\quad b=-5\frac{m-5}{m}-4\frac{9m-4}{m^3}\\
&c=2\frac{m-1}{m}\left(-\frac{53}{6}+\frac{122m^3-89m^2-120m+96}{6m^2(m^2-1)}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Розв'язок рівняння знайдений чисельним методом, який базувався на використанні квадратурних формул Гаусса.

Розподіл напружень в контакті знаходиться за допомогою обернення рівняння Абеля:

$$\frac{\sigma(\vartheta)}{2G} = \cos\vartheta\left(-\frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\alpha}} + \int_{\vartheta}^{\alpha}\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos x}}\right) \tag{9}$$

Причому $\varphi(\alpha) = 0$ – умова обмеженості напружень в кінцевих точках області контакту.

Розподіл нормальних напружень в зоні контакту за Герцем [3]:

$$\frac{\sigma(\vartheta)}{2G} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\vartheta}. \tag{10}$$

Із співставлення побудованого тут розподілу нормальних напружень в області контакту (10) з класичним розв'язком Герца (11) випливає, що теорія Герца дає результати з високим степенем точності для кутів контакту, що не є малими ($\alpha \leq 13.5^\circ$). Похибка для максимальних значень напружень в центрі зони контакту складає 1%

Були знайдені переміщення точок поверхні сфери в проекціях на осі циліндричної системи координат.

На рис. 2 і рис. 3 зображені відповідно якісні характери розподілів зсувних u, і осьових u, переміщень точок поверхні сфери. Осьові переміщення в межах зони контакту $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ визначаються з кінематичної граничної умови (5)

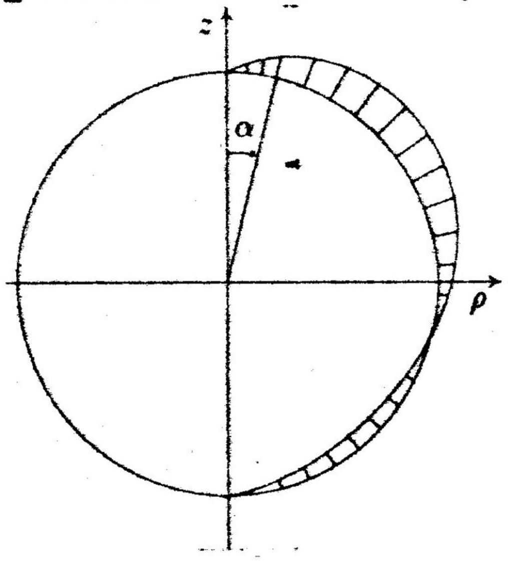

Рис. 2.

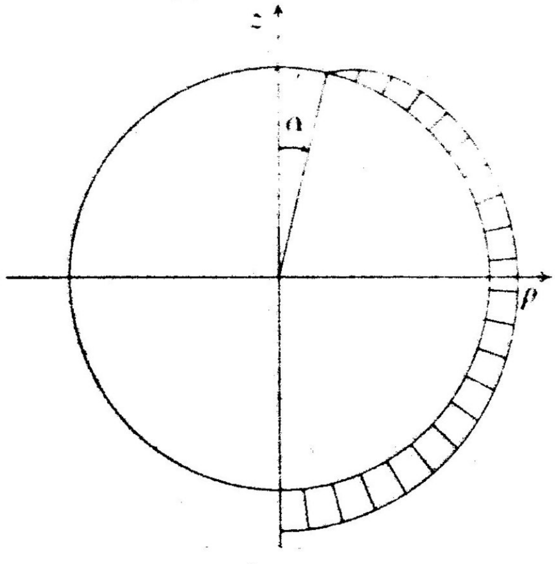

Рис. 3.

1. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // Jornal für reine und angewandte Mathematic. - 1881.

2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - К.: Наук.Думка, 1979. - 264 с.

3. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. - К.: Наук.Думка, 1972. - 575 с.