

Математичне моделювання магнітного поля в електродинамометрі для розрахунку струмів в роторі дископодібної форми.

Серед різноманітних гальмівних пристроїв особливе місце посідає дископодібне електромагнітне гальмо - електродинамометр, яке має електропровідний диск, що може обертатися в підшипниках індуктора з осьовим зазором [6]. Завдяки зменшеним розмірам в осьовому напрямку такого гальма, воно може бути закріплене безпосередньо на валу досліджуваного двигуна. При цьому диск буде обертатись разом з ротором двигуна, а індуктор з противагами – повертатись на кут, синус якого пропорційний моменту на валу. Щоб електромагнітне гальмо створювало гальмівний момент, індуктор повинен збуджувати в робочому зазорі неоднорідне магнітне поле. Це досягається завдяки виконанню машини з нерівномірним робочим зазором в наслідок існування на індукторі зубців і пазів, що чергуються за напрямом руху диска.

Останнім часом пристроям дископодібної форми приділяється все більше уваги [3]. Разом з тим, електромагнітні процеси в провідному середовищі, яке обертається в магнітному полі з індукцією, направленою паралельно осі обертання, досліджені недостатньо. Стаття присвячена розробці математичної моделі електромагнітного поля в електропровідному середовищі з врахуванням неоднакової швидкості руху точок середовища відносно стаціонарного неоднорідного магнітного поля. Існуючі моделі електромагнітного поля в рухомому середовищі здебільшого не враховують залежність швидкості руху середовища від просторових координат. Математична модель, що пропонується, дозволить виявити особливість електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамометра з осьовим робочим зазором.

Для оцінки адекватності математичної моделі проведено фізичний експеримент по визначенню гармонічного складу розподілу магнітної індукції в робочій зоні електродинамометра при різній конфігурації зубчатого зазору.

Для експериментального дослідження електромагнітних процесів в провідному диску електродинамічного гальма була виготовлена фізична модель [9]. В ході досліджень змінювалась

форма та ширина пазів b_n та зубців b_z індуктора моделі. Були проведені експерименти для чотирьох співвідношень розмірів пазів: 1) $b_n = const = 10 \text{ мм}$; 2) $b_n = b_z$; 3) $b_n = const = 13,6 \text{ мм}$; 4) $b_n \approx 1,7 \cdot b_z$. Для визначення гармонічного складу магнітної індукції в робочому зазорі на поверхні диску були поміщені вимірювальні витки (рис.1), амплітуди гармонічних складових електрорушійних сил яких пропорційні амплітудам гармонічних складових магнітної індукції з числами пар полюсів $\nu_k, k = \overline{1,4}$, кратними числу пар полюсів $\nu_{роб}$ робочої гармонічної складової магнітної індукції:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_{роб} (2i - 1), \\ \nu_2 &= 2\nu_{роб} (2i - 1), \\ \nu_3 &= 4\nu_{роб} (2i - 1), \\ \nu_4 &= 8\nu_{роб} (2i - 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Для побудови математичної моделі електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамічного гальма приймемо наступні припущення: 1) зубчатий зазор робочої зони можна замінити еквівалентним рівномірним зазором з розміщеними на його поверхні уявними струмами [7]; 2) електропровідність зовнішньої межі диска дорівнює ∞ ; 3) індукція на бокових поверхнях диску відповідає її значенню при нерухомому диску; 4) ротор має сталі товщину d_0 , магнітну проникність μ , електропровідність σ та діелектричну проникність ε .

Величину $d_{екв}$ еквівалентного рівномірного зазору знайдемо виходячи із збереження значення постійної складової розподілу магнітної індукції B_0 в робочій зоні магнітопровода електродинамометра при заданих ампервитках обмотки збудження [9]. Схема розташування елементів та розміри такої моделі електродинамометра з феромагнітним диском показані на рис.2. Диск товщиною d_0 знаходиться на віддаленні від пакетів індуктора на величину осьового зазора d в центральній частині моделі та $d_{екв}$ в робочій зоні. Уявні струми, розміщені на поверхні індуктора в області робочої зони, умовно показані на верхній частині рис.3. Обмотка збудження (на рис.2 не показана) розміщена в кільцевому пазу з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_2 .

Виберемо циліндричну систему координат, розмістивши вісь z по осі обертання ротора електродинамометра, а початок координат посередині ротора (точка 0 на рис.2). Математичну модель будемо, використовуючи принцип накладання. Будемо розглядати магнітне поле в зазорі електродинамометра при нерухомому роторі як суму хвиль розподілу магнітної індукції, яка в повітряному зазорі має лише складову по координаті z . Вихрові струми ротора, які виникають при його обертанні, не будуть змінювати гармонічний склад розподілу магнітної індукції, впливаючи лише на амплітуду та фазу кожної хвилі магнітної індукції результуючого поля.

Для визначення уявних струмів прийнятої фізичної моделі розглянемо в області зазору робочої зони довільну хвилю магнітної індукції B_{vz} з числом пар полюсів ν в циліндричній системі координат z, r, φ_c , нерухомій відносно статора

$$B_{vz} = B_{avz} \cos \nu \varphi_c. \quad (2)$$

Амплітуда B_{avz} хвилі розподілу магнітної індукції в повітряному зазорі в загальному випадку може залежати від координати r .

Для створення такої хвилі магнітної індукції в зазорі $d_{екв}$ повинні протікати струми, що відповідають лінійному навантаженню \vec{A}_ν (рис.3), значення якого визначається законом повного струму

$$\vec{A}_\nu = A_{\nu r} \cdot \vec{e}_r + A_{\nu \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{d_{екв}}{r} \frac{\partial H_{vz}}{\partial \varphi_c} \cdot \vec{e}_r - d_{екв} \frac{\partial H_{vz}}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

де $H_{vz} = \frac{1}{\mu_0} B_{vz}$ - напруженість магнітного поля в напрямку координати z для хвилі з числом пар полюсів ν в повітряному зазорі; $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ - координатні одиничні вектори.

Місце розміщення цих струмів слід визначати в залежності від того, в якій області робочої зони необхідно більш точно відтворити картину результуючого поля. Наприклад, для відтворення картини поля в зазорі біля межі зубець – паз із двох варіантів розміщення – в площині $z = d_\delta / 2 + d_{екв}$ або в площині $z = d_\delta / 2$ – слід вибрати варіант розміщення в площині $z = d_\delta / 2$, який дає більш наближену до реальної картину розподілу магнітного поля.

Таким чином, отримаємо у вибраній системі координат нерухомій відносно статора:

$$A_{vr} = -\frac{v d_{екв}}{\mu_0 r} B_{avz} \sin v \varphi_c \quad (4)$$

$$A_{v\varphi} = -\frac{d_{екв}}{\mu_0} \frac{\partial B_{avz}}{\partial r} \cos v \varphi_c \quad (5)$$

Прийемо, що при $t=0$ системи координат статора і ротора співпадають. Ротор обертається зі швидкістю ω так, що координата φ точки в системі координат ротора пов'язана з координатою φ_c в системі координат статора співвідношенням $\varphi = \varphi_c - \omega t$. Тоді складові лінійного навантаження в системі координат, зв'язаній з ротором, запишуться

$$A_{vr} = -\frac{v d_{екв}}{\mu_0 r} B_{avz} \sin v (\varphi + \omega t) \quad (6)$$

$$A_{v\varphi} = -\frac{d_{екв}}{\mu_0} \frac{\partial B_{avz}}{\partial r} \cos v (\varphi + \omega t). \quad (7)$$

Аналогічно запишеться в системі координат ротора і вираз для хвилі магнітної індукції

$$B_{vz} = B_{avz} \cos v (\varphi + \omega t). \quad (8)$$

Це магнітне поле є першопричиною виникнення вихрових струмів в дископодібному роторі при його обертанні.

Слід врахувати, що на межах робочої зони $r=r_2$ та $r=r_3$, $z = \pm \left(\frac{d_\delta}{2} + d_{екв} \right)$ (рис.2)

відбувається скачок магнітної індукції, величина якого залежить від кутової координати φ . Еквівалентний струм, який обумовлює скачок магнітної індукції для хвилі з числом пар полюсів v , визначається як інтеграл радіальних складових струмів на відповідній межі з врахуванням напрямку нормалі для кожної межі:

$$i_{vr} \Big|_{r_2} = -\int A_{vr} r \partial \varphi = -\int -\frac{v d_{екв}}{\mu_0 r} B_{av} \sin v \varphi_c r \partial \varphi = -\frac{d_{екв}}{\mu_0} B_{av} \Big|_{r_2} \cos v \varphi_c + C \quad (9)$$

$$i_{v\varphi} \Big|_{r_3} = \int A_{v\varphi} r \partial \varphi = \int -\frac{d_{екв}}{\mu_0 r} B_{av} \sin v \varphi_c r \partial \varphi = \frac{d_{екв}}{\mu_0} B_{av} \Big|_{r_3} \cos v \varphi_c + C_1 \quad (10)$$

Постійні інтегрування знаходяться із умови $i_v(v\varphi_c) = -i_v(v\varphi_c + \pi)$, що дає $C = C_1 = 0$.

Математична модель електромагнітних процесів ґрунтується на системі рівнянь Максвела.

В системі координат пов'язаній з індуктором при нерухомому роторі ці рівняння будуть мати вигляд:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (13)$$

$$\vec{\delta} = \sigma\vec{E} \quad (14)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad (15)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (16)$$

Тут \vec{H} - результуючий вектор напруженості магнітного поля від струмів індуктора;

\vec{B} - результуючий вектор індукції магнітного поля від струмів індуктора;

\vec{E} - результуючий вектор напруженості електричного поля, викликаного зміною магнітного поля з плином часу;

$\vec{\delta}$ - вектор густини струму провідності;

ε - діелектрична проникність;

\vec{D} - вектор електричного зміщення;

μ - магнітна проникність;

σ - питома електропровідність.

В усталеному режимі при живленні обмоток постійним струмом

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (16a)$$

В рухомому середовищі, яке рухається зі швидкістю \vec{V} в тій же системі координат, електромагнітне поле описується тією ж сукупністю рівнянь, але параметри поля змінюються:

- до індукції магнітного поля \vec{B} додається індукція магнітного поля \vec{B}_{rot} , яка обумовлена струмами в роторі і визначається співвідношенням:

$$\vec{B}_{pom} = \mu \cdot \vec{H}_{pom} \quad (17)$$

- до напруженості магнітного поля \vec{H} додається напруженість магнітного поля \vec{H}_r , яка обумовлена струмами в роторі і визначається співвідношенням:

$$rot \vec{H}_{pom} = \vec{\delta}_{pom} \quad (18)$$

- до густини струму $\vec{\delta}$ додається густина струму $\vec{\delta}_{pom}$, яка визначається напруженістю електричного поля \vec{E}_{pom} , обумовленого рухом ротора:

$$\vec{\delta}_{pom} = \sigma \cdot \vec{E}_{pom} \quad (19)$$

- до напруженості електричного поля \vec{E} при нерухомому роторі додається напруженість електричного поля \vec{E}_{pom} , яка обумовлена рухом ротора в результуючому магнітному полі і визначається співвідношенням:

$$\vec{E}_{pom} = \left[\vec{V} \times (\vec{B} + \vec{B}_{pom}) \right] \quad (20)$$

Таким чином, для рухомого середовища рівняння (11)-(16) приймають вигляд :

$$rot(\vec{H} + \vec{H}_{pom}) = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{pom} + \frac{\partial(\vec{D} + \vec{D}_{pom})}{\partial t} \quad (21)$$

$$rot\left(\vec{E} + \left[\vec{V} \times (\vec{B} + \vec{B}_{pom})\right]\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (22)$$

$$\vec{\delta} + \vec{\delta}_{pom} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{pom}) \quad (23)$$

$$\vec{D} + \vec{D}_{pom} = \varepsilon(\vec{E} + \vec{E}_{pom}) \quad (24)$$

$$div(\vec{B} + \vec{B}_{pom}) = 0 \quad (25)$$

$$\vec{B} + \vec{B}_{pom} = \mu(\vec{H} + \vec{H}_{pom}) \quad (26)$$

Слід зазначити, що частинна похідна за часом в правій частині рівняння (22) береться лише від вектора \vec{B} тієї частини магнітної індукції, яка існує при нерухомому роторі. Похідна за часом від векторів \vec{B} та \vec{B}_{pom} , яка обумовлена рухом середовища, неявно знаходиться в лівій частині цього рівняння як складова лівої частини виразу (22) при $\vec{E} = 0$ [1].

В цих рівняннях:

$\vec{H} + \vec{H}_{rot}$ - результуючий вектор напруженості магнітного поля в тілі диску від струмів індуктора і вихрових струмів дископодібного ротора;

$\vec{B} + \vec{B}_{rot}$ - результуючий вектор індукції магнітного поля в тілі диску від струмів індуктора і вихрових струмів дископодібного ротора;

$\vec{E} + \vec{E}_{rot}$ - результуючий вектор напруженості електричного поля в тілі диску, викликаного зміною магнітного поля з плином часу;

$\vec{\delta} + \vec{\delta}_{rot}$ - вектор густини струму провідності;

ε - діелектрична проникність матеріалу диску;

$\vec{D} + \vec{D}_{rot}$ - вектор електричного зміщення;

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ - вектор лінійної швидкості матеріальної точки диску відносно нерухомого результуючого магнітного поля;

$\vec{\omega}$ - вектор кутової швидкості ротора;

\vec{r} - радіус-вектор точки спостереження;

σ - електропровідність матеріалу диску;

μ - магнітна проникність матеріалу диску.

При розв'язанні рівнянь даної математичної моделі потрібно врахувати особливості електропровідного середовища. В металах питома електропровідність має величину порядку 10^7 1/Ом м (для сталі близько $5 \cdot 10^6$, а для міді – $5,7 \cdot 10^7$), а діелектрична проникність для змінних полів не перевищує $10 \cdot \varepsilon_0$. Навіть при дуже великій частоті 10^{11} Гц відношення струму зміщення до струму провідності складе [4] :

$$\frac{\delta_{см}}{\delta_{пр}} = \frac{2\pi f \varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi 10^{11}}{10^7} \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 5.6 \cdot 10^{-6}, \quad (27)$$

тобто струмами зміщення в електропровідному середовищі можна знехтувати, як і впливом електричного зміщення на напруженість магнітного поля в рухомому середовищі. Крім того, для

електропровідного середовища необхідно враховувати рухливість електричних зарядів, що обумовлює виключно вихровий характер результуючого електричного поля в диску:

$$\operatorname{div}(\vec{D} + \vec{D}_{pom}) = 0 \quad (28)$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (21)-(26) відносно магнітної індукції \vec{B} . Скористаємось принципом накладання: результуюче значення магнітної індукції \vec{B} дорівнює сумі постійної і гармонічних складових магнітної індукції \vec{B}_{cv} , створених постійними струмами індуктора при нерухомому роторі, з постійною та відповідними гармонічними складовими магнітної індукції \vec{B}_{pomv} , створених відповідними складовими струмів в тілі ротора при його обертанні:

$$\vec{B} = \sum_{v=0}^{\infty} \vec{B}_{cv} + \sum_{v=0}^{\infty} \vec{B}_{pomv} \quad (29)$$

Будемо розглядати усталений режим роботи: $\omega = const$.

Оскільки постійна складова струмів в тілі ротора електродинамометра відсутня, то для визначення зусиль і гальмівних моментів необхідно розглянути лише гармонічні складові магнітної індукції і відповідних струмів.

Для робочої області $r_2 \leq r \leq r_3$, $-\frac{d_d}{2} \leq z \leq \frac{d_d}{2}$ (рис.2) вважаємо амплітуду $B_{avz}(r, z)$ хвилі індукції магнітного поля \vec{B}_{cv} з числом пар полюсів v , створюваного уявними струмами індуктора при нерухомому роторі, незалежною від швидкості обертання і заданою у такому вигляді:

$$\vec{B}_{cv} = B_{cvz} \cdot \vec{e}_z = B_{avz}(r, z) \cos v\varphi \cdot \vec{e}_z \quad (30)$$

При цьому тангенційною складовою магнітної індукції при нерухомому роторі нехтуємо.

Припустимо, що складова \vec{B}_{pomv} результуючого вектора магнітної індукції, яка обумовлена вихровими струмами в тілі ротора, має складові по двох координатах φ, z . Отже і результуючий вектор магнітної індукції B_v має вигляд:

$$\vec{B}_v = 0 \cdot \vec{e}_r + B_{pomv\varphi}(r, \varphi, z) \cdot \vec{e}_\varphi + (B_{cvz}(r, \varphi, z) + B_{pomvz}(r, \varphi, z)) \cdot \vec{e}_z \quad (31)$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію прийнятої математичної моделі. Характер очікуваного розподілу хвиль магнітної індукції в провідному середовищі показано на рис.3. Результируюча хвиля магнітної індукції $B_{vz}(\varphi)$ зміщена відносно хвилі $B_{cvz}^{(0)}(\varphi)$ при нерухомому роторі на кут α в напрямку обертання ротора.

Хвиля напруженості електричного поля (на рис. 3 не показана), обумовленого обертанням ротора, співпадає з результируючою хвилею магнітної індукції $B_{vz}(\varphi)$.

Хвиля радіальної складової густини струму δ в роторі (на рис. 3 не показана, показані умовно лінії струму δ) зміщена відносно хвилі напруженості електричного поля на кут ψ в напрямку обертання.

Хвиля магнітної індукції $B_{pomvz}^{(V)}(\varphi)$, що створюється вихровими струмами ротора, зміщена відносно хвилі радіальної складової густини струму δ в роторі (на рис. 3 не показана) на кут $\frac{\pi}{2\nu}$ в напрямку обертання ротора, тобто на кут $\frac{\pi}{2} + \alpha + \psi$ відносно хвилі $B_{cvz}^{(0)}(\varphi)$ при нерухомому роторі.

Щоб знайти розв'язок системи рівнянь (21)-(26) відносно магнітної індукції, представимо складову напруженості електричного поля \vec{E}_{pomv} , обумовлену обертанням дископодібного ротора в магнітному полі, як векторний добуток вектора лінійної швидкості точок ротора на вектор магнітної індукції $[\vec{V} \times \vec{B}_v]$ [4]:

$$\vec{E}_{pomv} = \vec{V} \times \vec{B}_v = \omega r B_{vz} \vec{e}_r = \omega r (B_{cvz} + B_{pomvz}) \cdot \vec{e}_r, \quad (32)$$

$$\text{де } \vec{V} = \omega \cdot \vec{e}_z \times r \cdot \vec{e}_r = \omega r \cdot \vec{e}_\varphi. \quad (33)$$

Вектор напруженості \vec{E}_{pomv} електричного поля, обумовленої рухом дископодібного ротора в магнітному полі, не має тангенційної складової. Разом з тим, в роторі існує тангенційна складова густини вихрових струмів. Для з'ясування фізичних підстав виникнення тангенційної складової вихрових струмів знайдемо значення дивергенції напруженості електричного поля, обумовленого обертанням диска.

$$\operatorname{div} \vec{E}_{pomv} = \operatorname{div}[\vec{V} \times \vec{B}_v] = (B_{vz} \cdot \vec{e}_z + B_{v\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \cdot \operatorname{rot}(B_{vz} \cdot \vec{e}_z + B_{v\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \quad (34)$$

Знайшовши ротор вектора лінійної швидкості довільної точки диска,

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot \omega r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_z = 2\omega \cdot \vec{e}_z \quad (35)$$

та ротор вектора магнітної індукції в цій точці

$$\operatorname{rot} \vec{B}_v = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_{vz}}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_{v\varphi}}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r - \frac{\partial B_{vz}}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{v\varphi})}{\partial r} \cdot \vec{e}_z \quad (36)$$

отримаємо значення дивергенції вектора напруженості електричного поля, обумовленого обертанням диска:

$$\operatorname{div} \vec{E}_{pomv} = 2\omega \cdot B_{vz} + \omega r \frac{\partial B_{vz}}{\partial r} \quad (37)$$

Таким чином, в середовищі, яке обертається в магнітному полі, при паралельності вектора кутової швидкості і вектора магнітної індукції виникають витоки вектора напруженості електричного поля, а значить і вектора електричного зміщення:

$$\operatorname{div} \vec{D}_{pomv} = \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_{pomv} = 2\varepsilon\omega \cdot B_{vz} + \varepsilon\omega r \frac{\partial B_{vz}}{\partial r} \quad (38)$$

Однак в електропровідному середовищі повинна виконуватись умова (29). Тому витоки вектора електричного зміщення ($\operatorname{div} \vec{D}_{об}$) повинні компенсуватись вільними зарядами електропровідного середовища. Переміщення витоків вектора електричного зміщення приведуть до відповідного переміщення вільних зарядів в тому ж напрямку (з точністю до знака заряду), а значить до виникнення струму. Оскільки витоки вектора електричного зміщення при обертанні диска переміщуються в тангенційному напрямку, то це приведе до утворення тангенційної складової вектора густини електричного струму.

Знайдемо ротор вектора напруженості електричного поля, обумовленої обертанням диска в результуючому магнітному полі з врахуванням як статорної, так і роторної складових магнітного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{pomv} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_{pomvz}}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{pomv\varphi}}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_{pomvr}}{\partial z} - \frac{\partial E_{pomvz}}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_{pomv\varphi})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{pomvr}}{\partial \varphi} \right) \cdot \vec{e}_z =$$

$$= \omega \left(\frac{r \partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \omega \frac{\partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z. \quad (39)$$

Підставивши це значення в (22) та врахувавши (16а) і (20) отримаємо:

$$\text{rot} \vec{E}_{pomv} = \omega \left(\frac{r \partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \omega \frac{\partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z \quad (40)$$

Враховуючи (21) - (23), можемо записати:

$$\vec{E}_{rv} = \frac{1}{\sigma} \text{rot} \vec{H}_{pomv} = \frac{1}{\sigma \mu} \text{rot} \vec{B}_{pomv} \quad (41)$$

Тоді

$$\text{rot} \vec{E}_{pomv} = \frac{1}{\sigma \mu} \text{rot} \text{rot} \vec{B}_{pomv}, \quad (42)$$

$$\text{Як відомо [5], } \text{rot} \text{rot} \vec{B}_{pomv} = \text{grad} \text{div} \vec{B}_{pomv} - \Delta \vec{B}_{pomv} = -\Delta \vec{B}_{pomv}, \quad (43)$$

Підставивши в (42) відповідні значення із (40), (43), отримаємо

$$-\Delta \vec{B}_{pomv} = \sigma \mu \omega \left(\left(\frac{r \partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_\varphi - \frac{\partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_z \right). \quad (44)$$

Застосувавши оператор Лапласа Δ до кожної із складових вектора \vec{B}_{pomv} , отримаємо систему рівнянь, в яких B_{cvz} задано, а B_{pomvz} та $B_{pomv\varphi}$ треба знайти:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{pomv\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{pomv\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 B_{pomv\varphi}}{\partial z^2} = -\omega \sigma \mu r \frac{\partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial z}, \quad (45)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_{pomvz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{pomvz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 B_{pomvz}}{\partial z^2} = \omega \sigma \mu \frac{\partial (B_{cvz} + B_{pomvz})}{\partial \varphi}. \quad (46)$$

Таким чином, виконавши всі вищевказані перетворення, з системи рівнянь (21)-(26) ми отримали рівняння (45)-(46) відносно однієї невідомої магнітної індукції. Як видно із цих рівнянь, складова вектора магнітної індукції в напрямку координати φ явно залежить від складової вектора магнітної індукції по координаті z .

Розв'язки системи рівнянь (45)-(46) будемо шукати, нехтуючи тангенційною складовою магнітної індукції B_{cvz} при нерухомому роторі

$$\frac{\partial B_{cvz}}{\partial z} = 0. \quad (47)$$

Із (25) витікає

$$\frac{\partial B_{pomvz}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial B_{pomv\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (48)$$

Підставивши ці значення в (45), отримаємо рівняння відносно $B_{pomv\varphi}$

$$\frac{\partial^2 B_{pomv\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{pomv\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_{pomv\varphi}}{\partial \varphi^2} - \omega \sigma \mu \frac{\partial B_{pomv\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 B_{pomv\varphi}}{\partial z^2} = 0. \quad (49)$$

Для зручності, враховуючи синусоїдний характер розподілу магнітної індукції вдовж тангенційної координати (2), запишемо рівняння (49) та (46) в символічній формі. Тоді похідна по φ заміниться оператором $j\nu$:

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_{pomv\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{B}_{pomv\varphi}}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \dot{B}_{pomv\varphi} - j\nu \omega \sigma \mu \dot{B}_{pomv\varphi} + \frac{\partial^2 \dot{B}_{pomv\varphi}}{\partial z^2} = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_{pomvz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{B}_{pomvz}}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \dot{B}_{pomvz} - j\nu \omega \sigma \mu \dot{B}_{pomvz} + \frac{\partial^2 \dot{B}_{pomvz}}{\partial z^2} = j\nu \omega \sigma \mu \dot{B}_{cvz}. \quad (51)$$

Таким чином, математична модель електромагнітних процесів в електропровідному диску електродинамометра приведена до вигляду (50)-(51), який дозволяє отримати розв'язок відносно магнітної індукції \vec{B} . Рівняння (50) є рівнянням Бесселя і має аналітичний розв'язок. Знаходження аналітичного рішення рівняння (51) в загальному вигляді викликає певні труднощі. Якщо прийняти товщину диска настільки малою, що можна знехтувати впливом тангенційної складової магнітної індукції на осьову складову, то можна скористатись рішенням для \dot{B}_{vz} [10]:

$$\dot{B}_{vz} = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + (\mu\sigma\omega r^2)^2}} \dot{B}_{cvz} e^{-j\arctg \frac{\mu\sigma\omega r^2}{\nu}} \quad (52)$$

Як видно із (52), результуюча хвиля з числом періодів ν магнітної індукції зміщується по відношенню до відповідної хвилі магнітної індукції при нерухомому роторі в напрямку обертання ротора на кут, величина якого залежить від значення ν .

Проведені на фізичних моделях експерименти по визначенню форми кривої розподілу магнітної індукції вдовж тангенційної координати за допомогою вимірювальних витків показали,

що магнітна індукція підсилюється або на збігаючому, або на набігаючому краю зубця в залежності від ширини пазу. При ширині пазу меншій ширини зубця магнітне поле підсилюється на набігаючому краї зубця і навпаки. Така властивість впливає і з отриманого рішення (52) (рис.5). При наявності парних гармонічних складових в кривій розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра та ширині паза меншій від ширини зубця (коли парна гармонічна складова зміщена по відношенню до основної на $+\pi/2$) форма кривої розподілу магнітної індукції змінюється так, що індукція збільшується на набігаючому краї зубця (на рис.5б $B_{\text{пот}}$ підсилює B біля набігаючого краю зубця). При наявності парних гармонічних складових в кривій розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра та ширині паза більшій від ширини зубця (коли парна гармонічна складова зміщена по відношенню до основної на $-\pi/2$) форма кривої розподілу магнітної індукції змінюється так, що індукція збільшується на збігаючому краї зубця (на рис.5г $B_{\text{пот}}$ підсилює B біля збігаючого краю зубця). На рис. 4 показані осцилограми електрорушійних сил вимірювальних витків, гармонічні складові яких пропорційні всім непарним, подвоєним непарним, чотирьохкратним непарним та восьмикратним непарним гармонічним складовим магнітної індукції. Завдяки цьому форма кривої електрорушійних сил вимірювальних витків повторює форму кривої розподілу магнітної індукції в робочому зазорі електродинамометра з точністю до перших 15 гармонічних складових.

Таким чином, процеси в провідному середовищі, вісь обертання якого паралельна напрямку магнітного поля, відрізняються від процесів в середовищі, вісь обертання якого перпендикулярна напрямку магнітного поля. Слід відмітити потенційно-вихровий характер наведеного електричного поля, який обумовлює протікання струму в тангенційному напрямку за рахунок відповідної зміни розподілу витків наведеного електричного поля при відсутності тангенційної складової вектора напруженості наведеного електричного поля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Антоненко А.И. Обобщенный закон электромагнитной индукции. // Техн. электродинамика. – 1993. - №5. – с. 43-47.

2. *Антоненко А.И., Цыганкова А.А.* Электромагнитное поле и усилия в проводящем диске моментомера с осевым воздушным зазором. // Техн. електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки». – 2004. - ч. 7. – с.16-19.
3. *Афонин А.А.* Аксиально-радиальная конфигурация электрических машин. // Техн. електродинаміка. – 2001. - №3. – с. 51-55.
4. *Каплянский А.Е., Лысенко А.П., Полотовский Л.С.* Теоретические основы электротехники. - М.: «Высшая школа», 1972. - 448 с. с илл.
5. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. (Перевод с английского) - М.: «Наука», 1970. - 720 с. с илл.
6. *Потапов Л.А., Юферов Ф.М.* Измерение вращающих моментов и скоростей вращения микроэлектродвигателей. – М.: «Энергия», 1974. – 128 с.
7. *Титко А.И.* Электромагнитное экранирование незамкнутыми структурами в электрических машинах. – К.: «Наукова думка», 1994.- 301 с.
8. *Химюк І.В.* Расчет электромагнитных полей в многослойных средах с использованием рекуррентных соотношений. // Диссерт. на соискан. уч. степ. канд. наук, К., 1984. – 197 с.
9. *Цыганкова Г.А.* Дослідження розподілу магнітного поля в робочій зоні дископодібного електромагнітного гальма. // Вісник КДПУ, вип. 3/2007(44), частина 2, ст.70-72
10. *Цыганкова Г. А.* Особливості визначення моменту електродинамічного гальма з феромагнітним диском. // Техн. електродинаміка. – 2008. - №5. – с.51-55.

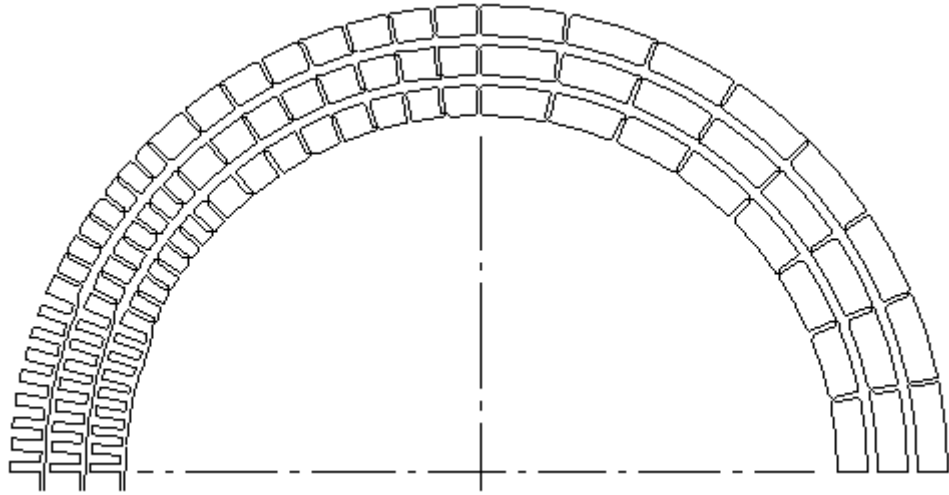


Рис.1. Схема розташування та з'єднання вимірювальних витків моделі електродинамометра.

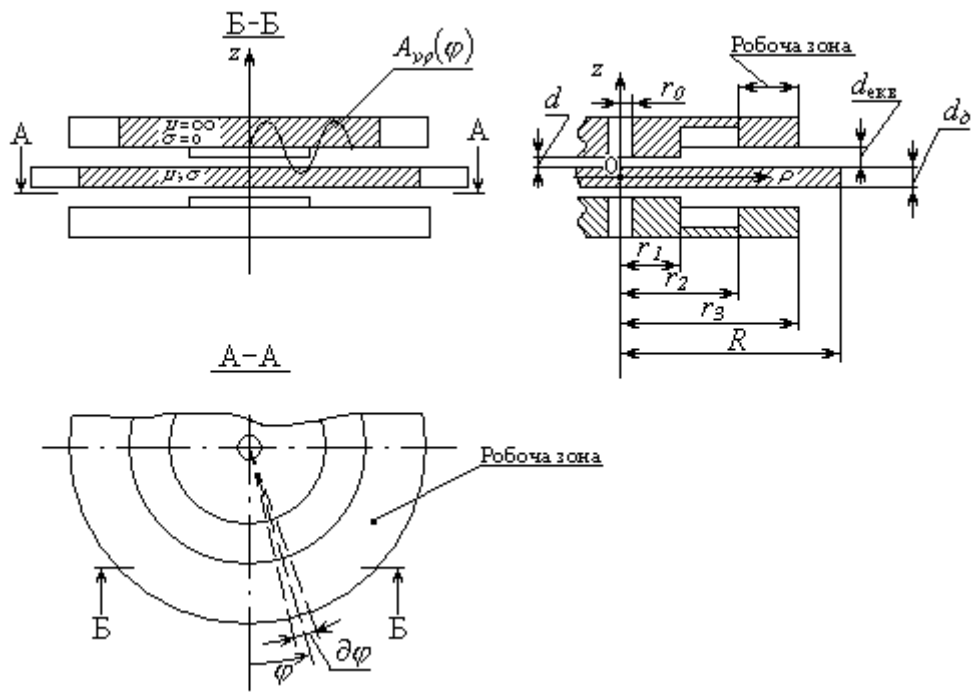


Рис. 2. Схема розташування елементів та розміри моделі електродинамометра

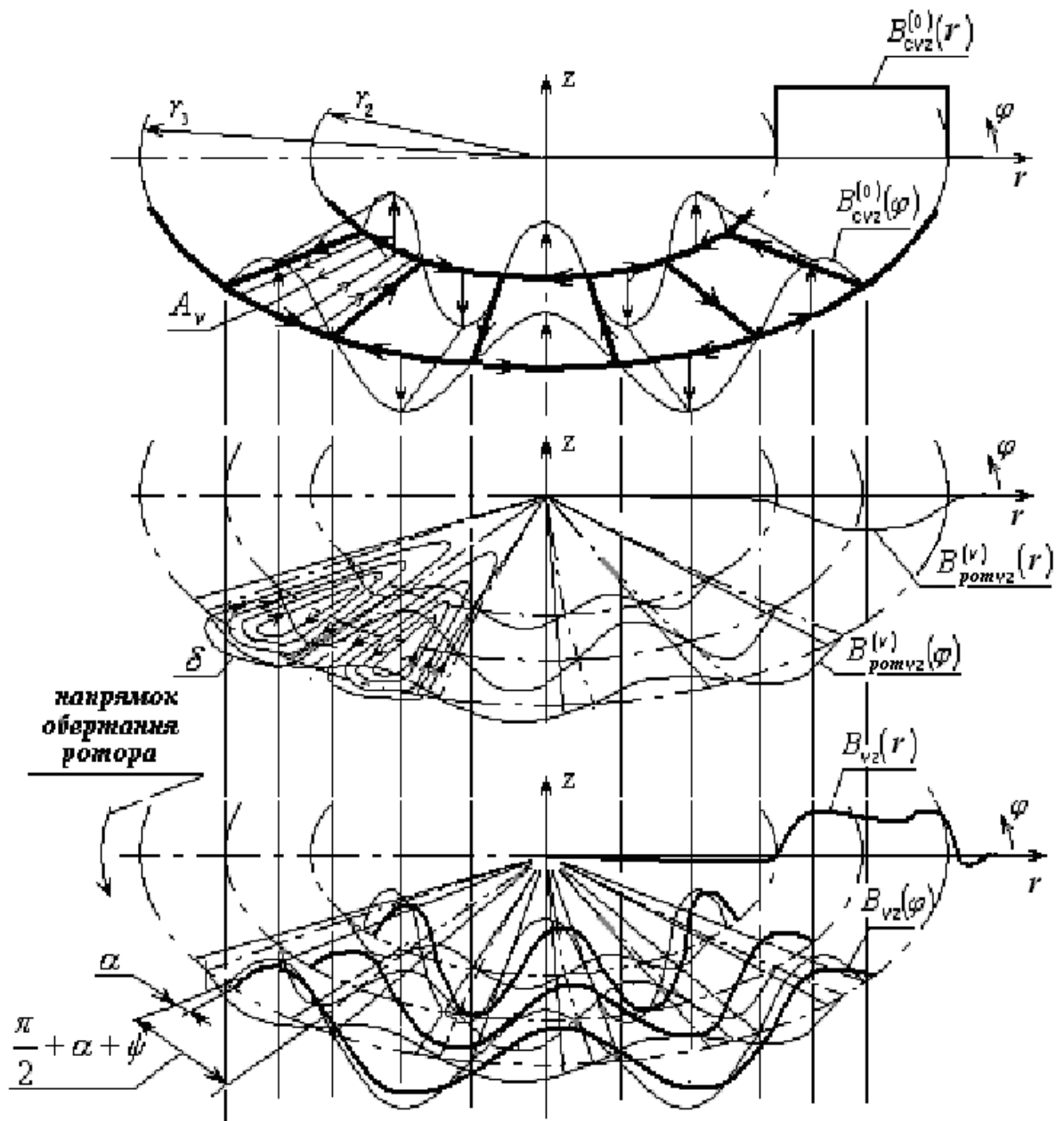


Рис. 3. Модель положення хвиль магнітної індукції моделі електродинамометра.

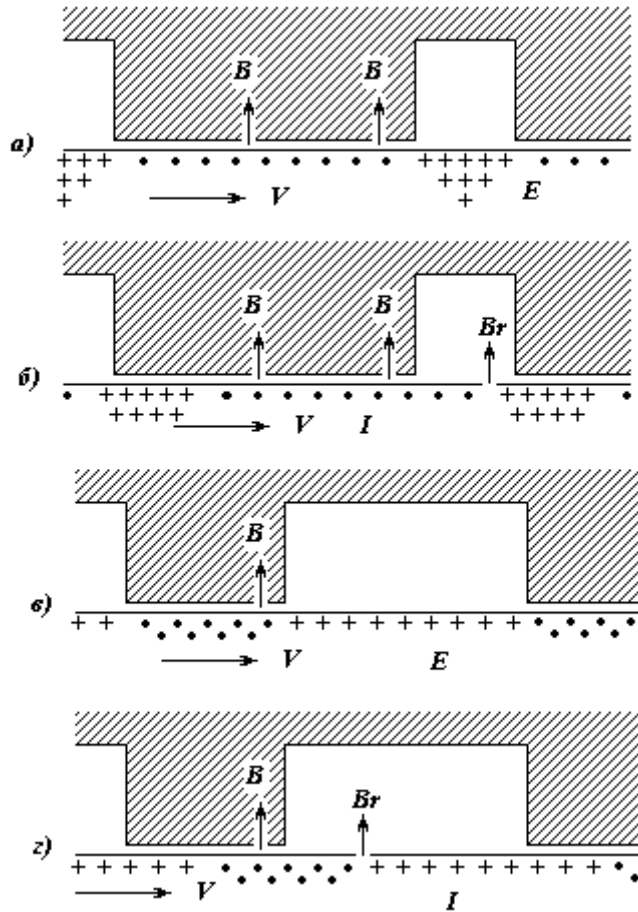


Рис. 5. Схема взаємного положення складових магнітної індукції статора і ротора.

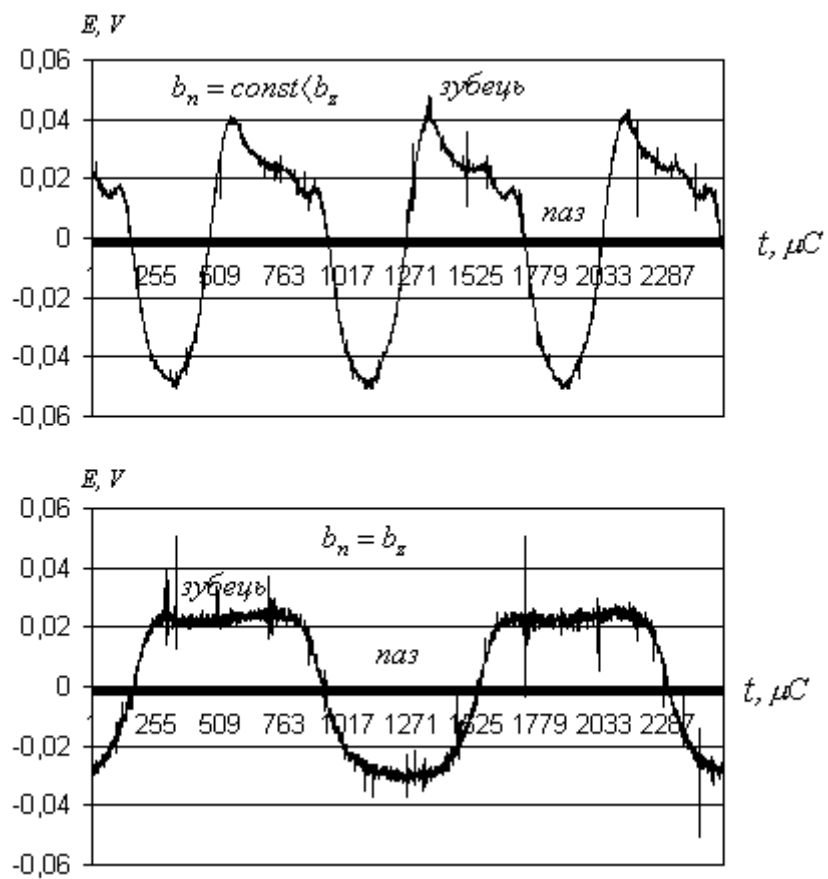


Рис. 4. Осцилограми електрорушійних сил вимірювальних витків.