22. Синтез оптимального управління для лінійних стохастичних систем з експоненційним інтегрально - квадратичним критерієм

Мирослав Грабінський
Національний університет харчових технологій

Вступ: В роботі розглядається задача синтезу оптимального управління системами, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями з модифікованим інтегрально-квадратичним критерієм якості.

Матеріали і методи: Використовуються методи оптимального управління, зокрема динамічного програмування стохастичними системами.

Результати: Багато об'єктів управління можуть бути описані наступною математичною моделлю:

$$\begin{cases} dx(t) = \left(A(t)x(t) + B_1(t)u(t) \right) dt + B_2(t)dw(t), \qquad 0 < t \le T, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи, $u(t) \in R^m$ – вектор функцій управління, $w(t) \in R^r$ – випадковий вектор зовнішніх збурень, кожна компонента якого є стандартним вінеровським процесом, $A(t), B_1(t), B_2(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, x_0 – вектор початкового стану системи, який є випадковим вектором з нормальним законом розподілу та з відомими статистичними характеристиками. Зауважимо, що система (1) – це система стохастичних диференціальних рівнянь в сенсі Іто.

Розглядається модель спостереження у вигляді:

$$dy(t) = C_2(t)x(t) + D_2(t)dw(t), \tag{2}$$

де $y(t) \in R^l$ – вектор спостереження, $C_2(t), D_2(t)$ – задані матриці.

За критерій оптимальності візьмемо експоненційно квадратичний функціонал виду:

$$J_\sigma(u) = 2\sigma \log M \left\{ \exp\left(\frac{1}{2\sigma} \left[x^T(T)Mx(T) + \int_0^T F(x(t), u(t))dt \right] \right) \right\}, \tag{3}$$

де $M\{\bullet\}$ – математичне сподівання, σ – заданий скалярний параметр, $M^T = M \ge 0$ – симетрична невід'ємно визначена матриця, $F(x(t), u(t))$ – квадратична форма виду:

$$F(x(t), u(t)) = x^T(t)R(t)x(t) + 2x^T(t)S(t)u(t) + u^T(t)G(t)u(t),$$

в якій, $R^T(t) = R(t) \ge 0$, $G^T(t) = G(t) > 0$, $Y(t)$ – задані вагові матриці відповідних розмірностей.

Задача полягає в тому, щоб знайти управління $u(t)$ у вигляді зворотного зв'язку від вектора спостереження $y(t)$, тобто у вигляді $u(t) = K(t, y(\cdot)\big|_0^t)$, яке мінімізує критерій (3). Коротко цю задачу будемо позначати так $\min\limits_{u(\cdot)} J_\sigma(u)$.

Зауважимо, що критерій (3) є узагальненням відомого інтегрально – квадратичного функціоналу $I(u)$, оскільки, як можна показати, $I(u) = \lim\limits_{\sigma \to \infty} J_\sigma(u)$.

Основним результатом даної роботи є побудова оптимального управління, яке мінімізує критерій (3). Показано, що оптимальне управління має вид:

$$u^*(t) = -G^{-1}(t)\left(B_1^T(t)X(t) + S^T(t) \right)\eta(t), \tag{4}$$

де $\eta(t)$ – розв'язок наступного стохастичного диференціального рівняння

$$d\eta(t)=\left(A(t)-B_1(t)G^{-1}(t)S^T(t)-\left(B_1(t)G^{-1}(t)B_1^T(t)-\frac{1}{\sigma}B_2(t)B_2^T(t)\right)X(t)\right)\eta(t)dt+$$

$$+\left(E-\frac{1}{\sigma}Y(t)X(t)\right)^{-1}\left(Y(t)C_2^T(t)+B_2(t)D_2^T(t)\right)\Gamma^{-1}\left(dy(t)-\left(C_2+\frac{1}{\sigma}D_2B_2^TX\right)\eta(t)dt\right),$$

(5)

в якому $\Gamma=D_2D_2^T>0$, $\rho(Y(t)X(t))<\sigma$, де $\rho(Y(t)X(t))$ – максимальне сингулярне значення матриці $Y(t)X(t)$.

В останньому рівнянні матриці $X(t)$ та $Y(t)$ є розв'язками відповідних матричних диференціальних рівнянь типу Ріккаті, зокрема матриця $X(t)$ задовольняє рівнянню виду:

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=-X(t)\left(A(t)-B_1(t)G^{-1}(t)S^T(t)\right)-\left(A(t)-B_1(t)G^{-1}(t)S^T(t)\right)^T X(t)+\\ \quad +X(t)\left(B_1(t)G^{-1}(t)B_1^T(t)-\dfrac{1}{\sigma}B_2(t)B_2^T(t)\right)X(t)-\left(R(t)-S(t)G^{-1}(t)S^T(t)\right),\\ X(T)=M.\end{cases}$$

(6)

Висновки: Одержане оптимальне управління є узагальненням результатів з аналітичного конструювання оптимальних регуляторів і дозволяє підвищити якість систем керування.

Література

1. Shuping, C., Zhou X.Y. Stochastic Linear Quadratic Regdators with Indefinite Control Weight Costs. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 39, No. 4(2000), pp.1065-1081.

2. Glover, K. Minimum entropy and risk-sensitive control: the continuous time case. In: Proceedings of the 28 th IEEE Conference on Decision and Control, (2002) pp.388–391.