МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для вивчення дисципліни та виконання лабораторних і контрольних робіт

для студентів спеціальності 6.080401
„Інформаційні управляючі системи та технології”
напряму 0804 „Комп’ютерні науки”
денної та заочної форм навчання
(Тема: “Задачі нелінійного програмування (частина 2)”)

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
інформаційних систем
протокол № 8
від 19.03. 2008 р.

Київ НУХТ 2008

Математичні методи оптимізації та дослідження операцій: Метод. вказівки для вивчення дисципліни та викон. лаб. і контр. робіт для студентів спеціальності 6.080401 „Інформаційні управляючі системи та технології" напряму 0804 „Комп'ютерні науки" денної та заочної форм навч. (Тема: "Задачі нелінійного програмування (частина 2") /Уклад.: В.В.Самсонов, Т.М. Горлова. –К.:НУХТ, 2008. – **23** с.

Рецензент А.С. Богатарчук, канд. фіз.-мат. наук

Укладачі: В.В. Самсонов , к. т. н.
Т.М. Горлова, к. т. н.

Відповідальний за випуск В.В. Самсонов, к. т. н., проф.

1. Загальні відомості

Предметом навчальної дисципліни «Математичні методи оптимізації та дослідження операцій», на який повинна бути спрямована пізнавальна діяльність студентів, є:

- задачі оптимізації практичної діяльності фахівців;
- математичні методи розв'язку задач оптимізації та дослідження операцій;
- алгоритми чисельних методів розв'язку різних типів задач оптимізації;
- правила та приклади побудови математичних методів виробничих процесів та задач прийняття рішень;
- алгоритми створення інформаційних технології прийняття рішень з використанням процедур їх оптимізації.

Метою дисципліни є забезпечення базової профілюючої підготовки за спеціальністю, використання сучасних і перспективних математичних методів та програмних засобів розв'язання задач різної практичної направленості в економіці, техніці, управлінні, на виробництві та соціальної сфері.

Базується на дисциплінах: "Вища математика"; "Основи дискретної математики"; "Системний аналіз та проектування комп'ютерних інформаційних систем"; "Основи програмування та алгоритмічні мови"; "Чисельні методи в інформатиці".

Забезпечує дисципліни: "Методи та засоби комп'ютерних інформаційних технологій"; "Моделювання систем"; "Системи штучного інтелекту"; "Економіка і організація виробництва".

Студент повинен знати:

- Основні поняття теорії і методів оптимізації, поняття задачі оптимізації, алгоритму, математичного та чисельного методу розв'язання задачі, програмного та інформаційного забезпечення процесу розв'язку
- Поняття екстремумів функцій однієї і багатьох змінних, необхідні та достатні умови екстремуму
- Методи одновимірної оптимізації без використання інформації про похідну
- Методи одновимірної оптимізації з використанням інформації про похідну
- Метод ділення навпіл. Алгоритм методу.
- Метод Ньютона. Алгоритм методу.
- Наближені методи одновимірної оптимізації для унімодальних функцій, чисельні методи безумовної та умовної оптимізації, їх класифікація
- Алгоритми розв'язання задач оптимізації різних типів

Студент повинен уміти:

- Розробляти математичну модель задачі за словесним описом
- Аналізувати і корегувати математичну модель
- Визначати тип задачі
- Вибирати метод розв'язку задачі

- Розробляти людино-машинний алгоритм розв'язання задачі
- Розробляти програмне забезпечення алгоритму розв'язання задачі
- Аналізувати отримане рішення задачі
- Адаптувати модель, алгоритм та програмне забезпечення задачі
- Розв'язувати задачі у багатокритеріальної постановці

Навчальна дисципліна "Математичні методи оптимізації та дослідження операцій" має важливу роль у підготовці майбутніх фахівців в галузі розробці та експлуатації інформаційних систем та технологій.

Для успішного засвоєння дисципліни важливим є знання студентами розділів класичної математики, які присвячені дослідженню функцій на екстремум.

Кількість лекційних годин за темами курсу складає 64 і 16 для очної та заочної форм навчання відповідно, 32 і 12 годин лабораторних занять для очної та заочної форм навчання.

Студенти заочної форми навчання виконують контрольну роботу за планом, що наводиться в розділі 4.

2. Зміст дисципліни

2.1. Лекційні заняття

№ позиції	Тема та зміст лекції	Кількість годин за формою навчання	
		денною	заочною
1	2	3	4
1 чверть			
1	Основні поняття та історія розвитку задач оптимізації. Предмет та мета дисципліни. Основні напрями та методи дослідження задач на екстремум. Класифікація задач математичного програмування.	2	0.5
2	Основні етапи розв'язання задач. Розробка математичної моделі задачі. Приклади побудови математичних моделей виробничих ситуацій.	2	0,5
3	Методи одновимірної оптимізації без використання інформації про похідну Загальна характеристика методів одновимірної оптимізації. Основна теорема скорочення інтервалу невизначеності. Алгоритми методів рівномірного пошуку; дихотомічного пошуку; методу золотого перерізу; методу Фібоначчі.	4	1
4	Методи розв'язання задач багатовимірної оптимізації без використання інформації про похідну Загальна характеристика методів сходження. Методи	4	1

	та алгоритми покоординатного сходження. Приклади розв’язання задач. Алгоритм Хука і Дживса з використанням одновимірної мінімізації. Приклади.		
5	Методи одновимірної оптимізації з використанням інформації про похідну Метод ділення навпіл. Алгоритм методу. Метод Ньютона. Алгоритм методу. Приклади розв’язання задач зазначеними методами.	4	1
6	Методи розв’язання задач багатовимірної оптимізації з використанням інформації про похідну Градієнтні методи. Градієнтний метод найшвидшого сходження. Основний варіант градієнтного методу. Градієнтний метод з постійним множником кроку. Градієнтний метод з адаптивним вибором кроку.	4	1
7	Задачі лінійного програмування. Загальна та основна задачі ЛП. Геометрична інтерпретація та метод розв’язання задач ЛП. Симплекс-метод розв’язання задач ЛП. Метод штучного базису. Модифікований симплекс-метод.	8	2
8	Двоїста задача ЛП Геометричний та економічний зміст двоїстої задачі ЛП. Двоїстий симплекс-метод.	2	0,5
9	Післяоптимізаційний аналіз. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок. Аналіз стійкості двоїстих оцінок.	2	0,5
ВСЬОГО ЗА 1 ЧВЕРТЬ		32	
10	Задачі дискретного програмування Методи цілочисельного програмування. Метод Гомори. Метод гілок та меж. Комбінаторні методи. Задача комівояжера. Алгоритм Ленда і Дойга. Приклади.	6	1,5
11	Задачі нелінійного програмування. Загальна задача математичного програмування. Метод множників Лагранжа. Умови та теорема Куна-Такера. Методи випуклого програмування. Методи квадратичного програмування. Градієнтні методи. Методи розв’язання задач з сепарабельними функціями.	16	4
12	Задачі динамічного програмування Геометрична і економічна інтерпретація задачі. Принцип оптимальності Белмана. Алгоритм розв’язання задачі.	4	1
13	Задачі багатокритеріальної оптимізації	4	1

	Аналіз методів розв’язання багатокритеріальних задач.		
14	Теорія ігор Загальні положення теорії ігор. Алгоритми. Приклади.	2	0,5
ВСЬОГО ЗА 2 ЧВЕРТЬ		32	
ЗАГАЛОМ		64	16

3. Запитання для підготовки до іспиту

- Загальна постановка задачі нелінійного програмування
- Що таке оптимальне рішення задачі нелінійного програмування?
- Чим відрізняється постановка задачі безумовної оптимізації від постановки задачі умовної оптимізації?
- Поняття локального та глобального екстремумів.
- Необхідні і достатні умови існування екстремуму функції
- Ідея методу множників Лагранжа
- Основні етапи алгоритму реалізації методу множників Лагранжа
- Яка функція є сепарабельною?
- Що таке градієнт функції?
- Що таке квадратична форма?
- Загальний вид задачі квадратичного програмування
- Алгоритм розв’язання задачі квадратичного програмування
- Особливості задачі квадратичного програмування
- Основні етапи визначання екстремальних точок методом множників Лагранжа
- Точка екстремуму задачі нелінійного програмування
- Алгоритм Хука і Дживса з використанням одномірної мінімізації
- Метод покоординатного сходження
- Метод ділення навпіл. Алгоритм методу
- Особливості градієнтних методів
- Чи необхідне при дослідженні функції на екстремум розраховувати значення функції на кінцях інтервалу?
- Скільки точок інтервалу [a, b] використовується у методі ділення навпіл?
- Де може бути точка оптимуму задачі нелінійного програмування в області допустимих розв’язків?
- Ознака зупинення алгоритму розрахунку задачі методом покоординатного сходження
- Ознака зупинення алгоритму градієнтного методу найшвидшого сходження
- До якої групи методів відносяться методи покоординатного сходження та градієнтні методи ?
- Чим відрізняються методи сходження?

4. Варіанти лабораторних робіт та порядок їх виконання

Завдання лабораторних робот для студентів денної і заочної форми навчання та контрольної роботи для студентів заочної форми навчання охоплюють розділи навчальної програми курсу “Математичні методи оптимізації та дослідження операцій”, які відносяться до завдань, що розв’язуються в 2 чверті вивчення предмету.

Студент виконує завдання лабораторних робот самостійно і в повному обсязі. Варіант задачі для кожного завдання вибирається студентом за номером в списку навчальній групі. За результатами лабораторної роботи студентами складається протокол виконання завдань, який захищається на наступному занятті у викладача. Після цього завдання вважається виконаним.

Контрольна робота для студентів заочної форми навчання складається з 2 видів завдань. Виконана контрольна робота здається на кафедру “Інформаційних систем” за 2 тижня до початку сесії і має вигляд розрахунково-пояснювальної записки, що містить варіант завдання, детальний опис рішення кожного завдання та висновки за результатами рішення кожної задачі. Електронна версія виконаних завдань додається до розрахунково-пояснювальної записки.

4.1. Лабораторна робота 1
Метод покоординатного сходження для розв’язання задач нелінійного програмування

Мета : набуття навичок знаходження оптимуму задачі безумовної багатовимірної оптимізації наближено методом покоординатного сходження

Варіанти задач

1. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^4 + (2 x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$	2. $f(x_1, x_2) = (3 x_1 + 1)^4 + (- x_2 + 4 x_1)^2 \Rightarrow \min$
3. $f(x_1, x_2) = (5 x_1 - 3)^4 + (3 x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$	4. $f(x_1, x_2) = (3 x_2 - 1)^4 - (3 x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$
5. $f(x_1, x_2) =(7 x_2 + 4)^4 + (4 x_2 - 3 x_1)^2 \Rightarrow \min$	6. $f(x_1, x_2) =(2 x_1 - 3)^4 + (3 x_2 + 4 x_1)^2 \Rightarrow \min$
7. $f(x_1, x_2) = (2 x_1 - 3)^4 + (3 x_2 - 7 x_1)^2 \Rightarrow \min$	8. $f(x_1, x_2) = (3 x_1 - 4 x_2)^4 + (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$
9. $f(x_1, x_2) = (3 x_2 - 4)^4 + (5 x_2 - 3 x_1)^2 \Rightarrow \min$	10. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4 x_2)^4 + (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$
11. $f(x_1, x_2) =(3x_1 - 4x_2)^4 + (2x_2 - 5 x_1)^2 \Rightarrow \min$	12. $f(x_1, x_2) = (6 x_1 - x_2)^4 + (x_2 - 10x_1)^2 \Rightarrow \min$
13. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 7 x_2)^4 + (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$	14. $f(x_1, x_2) = (3 x_1 - 4 x_2)^4 + (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$
15. $f(x_1, x_2) =(- x_1 + 4 x_2)^4 + (x_2 - 3x_1)^2 \Rightarrow \min$	16. $f(x_1, x_2) = (- 4 x_1 + x_2)^4 + (2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$
17. $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2)^4 + (2x_2 - 5)^2 \Rightarrow \min$	18. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3 x_2)^4 + (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \min$

19. $f(x_1, x_2) = (3x_1 – 1{,}5x_2)^4 + (x_2 – 3{,}5\, x_1)^2 \Rightarrow$ min	20. $f(x_1, x_2) = (5x_1 + 7x_2)^4 + (3x_2 – 1{,}5x_1)^2 \Rightarrow$ min
21. $f(x_1, x_2) = (x_1 – 1{,}6x_2)^4 + (- 0{,}7x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min	22. $f(x_1, x_2) = (4\, x_1 – x_2)^4 + (2{,}8\, x_2 + x_1)^2 \Rightarrow$ min
23. $f(x_1, x_2) = (3{,}5\, x_1 – x_2)^4 - (2x_2 – 5)^2 \Rightarrow$ min	24. $f(x_1, x_2) = (-x_1 + 3\, x_2)^4 + (2{,}5x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min
25. $f(x_1, x_2) = (2{,}3x_2 – 4\,)^4 + (5{,}2x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min	26. $f(x_1, x_2) = (3x_1 – 4x_2)^4 + (2{,}3x_2 + x_1)^2 \Rightarrow$ min
27. $f(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3\,)^4 + (2\, x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min	28. $f(x_1, x_2) = (x_2 – 1\,)^4 + (3\, x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min
29. $f(x_1, x_2) = (\,6x_1 – 1)^4 + (2{,}4x_2 – x_1)^2 \Rightarrow$ min	30. $f(x_1, x_2) = (2x_1 -1\,)^4 + (- x_2 + 4\, x_1)^2 \Rightarrow$ min

4.2. Лабораторна робота 2
Градієнтний метод розв’язання задач нелінійного програмування

Мета : набуття навичок знаходження оптимуму задачі умовної оптимізації наближено градієнтним методом.

Варіанти завдань

1. $F = -(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to \max$ $5x_1 - 2x_2 \le 7$ $-x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 1, x_1, x_2 \ge 0$	**2.** $F = x_1^2 - 2x_1 + 1 + (x_2 - 8)^2 \to \min$ $2 \le x_1 \le 8$ $2 \le x_2 \le 6$
3. $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \max$ $2 \le x_1 \le 9$ $1{,}5 \le x_2 \le 6$	**4.** $F = \frac{x_1^2}{25} + \frac{x_2^2}{36} \to \max$ $0{,}5 \le x_1 \le 6{,}5$ $3 \le x_2 \le 7{,}5$
5. $F = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{20} \to \max$ $1{,}5 \le x_1 \le 7$ $1 \le x_2 \le 6$	**6.** $F = -x_1 + (x_2 - 1)^2 \to \max$ $2x_1 + 2x_2 \ge 3$ $x_1 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
7. $F = (x_1 - 2)^2 + x_2 \to \max$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$ $4x_1 + 5x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$	**8.** $F = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8{,}5)^2 \to \min$ $0 \le x_1 \le 5$ $1{,}5 \le x_2 \le 7{,}5$

9. $F = x_1 - (x_2 - 2)^2 \to \max$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 \le 3, x_1, x_2 \ge 0$	**10.** $F = (x_1 - 11)^2 + x_2^2 - 14x_2 + 49 \to \min$ $0 \le x_1 \le 3$ $1 \le x_2 \le 5$
11. $F = \dfrac{x_1^2}{21} + \dfrac{x_2^2}{31} \to \max$ $0{,}5 \le x_1 \le 6$ $3 \le x_2 \le 8$	**12.** $F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max$ $1 \le x_1 \le 10$ $1{,}5 \le x_2 \le 5{,}5$
13. $F = \dfrac{x_1^2}{24} + \dfrac{x_2^2}{35} \to \max$ $0{,}5 \le x_1 \le 6$ $3 \le x_2 \le 8$	**14.** $F = 2(x_1 - 4)^2 + x_2 \to \max$ $x_1 + 3x_2 \le 12$ $3x_1 - x_2 \ge 6$
15. $F = (x_1 - 2)^2 + x_2 \to \max$ $4x_1 + 8x_2 \le 36$ $10x_1 + 5x_2 \le 54$ $x_1, x_2 \ge 0$	**16.** $F = (x_1 - 3{,}5)^2 + (x_2 - 4{,}8)^2 \to \max$ $2 \le x_1 \le 8$ $3 \le x_2 \le 7$
17. $F = x_1 + (x_2 - 3)^2 \to \min$ $5x_1 + 8x_2 \le 40$ $9x_1 + 4x_2 \le 54$	**18.** $F = x_1 - (x_2 - 1)^2 \to \max$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $-x_1 + 3x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
19. $F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \max$ $1 \le x_1 \le 7$ $1 \le x_2 \le 8$	**20.** $F = (x_1 + 2)^2 - 3x_2 \to \max$ $4x_1 + 8x_2 \le 36$ $10x_1 + 5x_2 \le 54$ $x_1, x_2 \ge 0$
21. $F = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max$ $2 \le x_1 \le 9$ $3 \le x_2 \le 7$	**22.** $F = 2x_1^2 - x_1 + 1 + (x_2 - 8)^2 \to \min$ $2 \le x_1 \le 8$ $2 \le x_2 \le 7$
23. $F = \dfrac{x_1^2}{25} + \dfrac{x_2^2}{16} \to \max$ $0{,}5 \le x_1 \le 8{,}5$ $3 \le x_2 \le 7{,}5$	**24.** $F = -3x_1 + (x_2 - 1)^2 \to \max$ $x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$

25. $F=(x_1-3)^2+3x_2 \to \max$ $x_1+2x_2 \ge 6$ $4x_1+3x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$	**26.** $F=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2 \to \max$ $2 \le x_1 \le 7$ $1 \le x_2 \le 7$
27. $F=(x_1-5)^2+(x_2-8)^2 \to \min$ $0 \le x_1 \le 6$ $1 \le x_2 \le 7{,}5$	**28.** $F=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2 \to \max$ $1 \le x_1 \le 9$ $1{,}5 \le x_2 \le 5{,}5$
29. $F=\frac{x_1^2}{9}+\frac{x_2^2}{16} \to \max$ $0{,}5 \le x_1 \le 6$ $3 \le x_2 \le 8$	**30.** $F=(x_1-2)^2+3x_2 \to \max$ $4x_1+8x_2 \le 36$ $10x_1+5x_2 \le 54$ $x_1, x_2 \ge 0$

4.3. Лабораторна робота 3
Метод множників Лагранжа для розв'язання задач нелінійного програмування

Мета : набуття навичок знаходження оптимуму задачі умовної багатовимірної оптимізації наближено методом множників Лагранжа.

Варіанти завдань

1. $F=4x_1^2+3x_1x_2-x_2^2 \to \max$ $4x_1-3x_2=5$ $2x_1^2+3x_2^2=6$ $x_1, x_2 \ge 0$	2. $F=x_1^2+x_3+x_2^2 \to \min$ $x^2 1+x_2+x^2 3=4$ $2x_1-3x_2=12$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
3. $F=3x_1^2+x_3+x_2^2-x_1 \to \min$ $x_1+x^2 2+x^2 3=4$ $2x^2 1-3x_2=12$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	4. $F=2x_1-3x^2{}_1+4x_1x_2 \to \max$ $3x_1+2x_2=4$ $x_1x_2+3x_1^2=6$ $x_1, x_2 \ge 0$
5. $F=4x_1^2+3x_1-x_2^2-x_2 \to \max$ $4x_1-3x_2=5$ $2x_1x_2+x_2^2=4$ $x_1, x_2 \ge 0$	6. $F=-x_1^2-2x_3+x_2^2+8x_1+4x_3 \to \max$ $2x_1+x^2{}_2-x^2{}_3=6$ $2x_1+x_3x_2=2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
7. $F=x_1^2-8x_2-2x_2^2+3x_1x_2 \to \max$ $2x_1+x_1x_2=8$ $2x_1+3x_2=12$ $x_1, x_2 \ge 0$	8. $F=-x_1^2+3x_1x_2-2x_2^2-3x_1 \to \min$ $2x_1+x^2{}_2=4$ $2x^2{}_1+3x_2=8$ $x_1, x_2 \ge 0$

9. $F=-x_1^2+2x_2-x_2^2+x_1 \rightarrow \max$ $x_1^2+2x_2=16$ $x_1^2-x_2^2=8$ $x_1, x_2 \geq 0$	10. $F=-x_1^2+6x_2+3x_2^2-x_1+3x_1x_2 \rightarrow \max$ $x_1+x_2^2=3$ $-2x_1+x_2+x_1x_2=2$ $x_1, x_2 \geq 0$
11. $F=-x_1^2+8x_2-2x_2^2+3x_1 \rightarrow \max$ $2x_1^2+3x_2=8$ $2x_1+3x_2^2=6$ $x_1, x_2 \geq 0$	12. $F=-5x_1^2-x_2^2+4x_1x_2 \rightarrow \max$ $x_1^2+x_2^2+2x_1-4x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
13. $F=4x_1^2+3x_1x_2-x_2^2 \rightarrow \max$ $4x_1-3x_2=5$ $2x_1^2+3x_2^2=6$ $x_1, x_2 \geq 0$	14. $F=x_1^2+x_3+x_2^2 \rightarrow \min$ $x_1^2+x_2+x_3^2=4$ $2x_1-3x_2=12$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
15. $F=3x_1^2+x_3+x_2^2-x_1 \rightarrow \min$ $x_1+x_2^2+x_3^2=4$ $2x_1^2-3x_2=12$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	16. $F=2x_1-3x_1^2+4x_1x_2 \rightarrow \max$ $3x_1+2x_2=4$ $x_1x_2+3x_1^2=6$ $x_1, x_2 \geq 0$
17. $F=4x_1^2+3x_1-x_2^2-x_2 \rightarrow \max$ $4x_1-3x_2=5$ $2x_1x_2+x_2^2=4$ $x_1, x_2 \geq 0$	18. $F=-x_1^2-2x_3+x_2^2+8x_1+4x_3 \rightarrow \max$ $2x_1+x_2^2-x_3^2=6$ $2x_1+x_3x_2=2$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
19. $F=x_1^2-8x_2-2x_2^2+3x_1x_2 \rightarrow \max$ $2x_1+x_1x_2=8$ $2x_1+3x_2=12$ $x_1, x_2 \geq 0$	20. $F=-x_1^2+3x_1x_2-2x_2^2-3x_1 \rightarrow \min$ $2x_1+x_2^2=4$ $2x_1^2+3x_2=8$ $x_1, x_2 \geq 0$
21. $F=-x_1^2+2x_2-x_2^2+x_1 \rightarrow \max$ $x_1^2+2x_2=16$ $x_1^2-x_2^2=8$ $x_1, x_2 \geq 0$	22. $F=-x_1^2+6x_2+3x_2^2-x_1+3x_1x_2 \rightarrow \max$ $x_1+x_2^2=3$ $-2x_1+x_2+x_1x_2=2$ $x_1, x_2 \geq 0$
23. $F=-x_1^2+8x_2-2x_2^2+3x_1 \rightarrow \max$ $2x_1^2+3x_2=8$ $2x_1+3x_2^2=6$ $x_1, x_2 \geq 0$	24. $F=-5x_1^2-x_2^2+4x_1x_2 \rightarrow \max$ $x_1^2+x_2^2+2x_1-4x_2=4$ $x_1, x_2 \geq 0$

25. $F=-2x_1^2-4x_2+3x_3-2x_1+8\to\max$ $8x_1-3x_2+3x_3=40$ $-2x_1+x_2-x_3=-3$ $x_1,x_2\ge 0$	26. $F=-3x_2^2+3x_2+x_3+11x_1+27\to\max$ $x_1-7x_2+3x_3=-7$ $5x_1+2x_2-x_3=2$ $x_1,x_2\ge 0$
27. $F=x_1^2-3x_2-2x_2^2+5x_1\to\max$ $2x_1+3x_1x_2=6$ $x_1+3x_2=2$ $x_1,x_2\ge 0$	28. $F=-x_1^2+8x_1-2x_2^2+3x_1x_2\to\max$ $x_1+5x_1x_2=5$ $2x_1-x_2=12$ $x_1,x_2\ge 0$
29. $F=x_1^2-8x_2-2x_2^2+3x_1x_2+x_1\to\max$ $x_2+3x_1x_2=6$ $2x_1-3x_2=2$ $x_1,x_2\ge 0$	30. $F=x_1^2+3x_2-4x_2^2+x_1x_2\to\max$ $2x_1+x_1x_2+x_2=8$ $x_1+x_2=1$ $x_1,x_2\ge 0$

4.4. Лабораторна робота 4

Мета: навчитися використовувати симплекс-метод для розв’язання задач нелінійного квадратичного програмування.

1. $f=x_1+2x_2-x_1^2-x_2^2\to\max$ $x_1+2x_2\le 16$ $x_1+x_2=8$ $x_1,x_2\ge 0$	2. $f=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+5x_1\to\min$ $2x_1+3x_2\le 15$ $x_1+2x_2\le 10$ $x_1,x_2\ge 0$
3. $f=(x_1+x_2+x_3)^2\to\min$ $x_1\le 2,$ $x_2\le 4,$ $x_3\le 6$	4. $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2\to\min$ $2x_1+x_2+x_3=10$ $3x_1-2x_2-x_3\ge 6$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$
5. $f=2x_1-3x_2-x_1^2-3x_2^2\to\max$ $3x_1+x_2+x_3+x_4=16$ $-x_1+3x_2-x_3-x_4=4$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$	6. $f=3x_1+4x_2-x_1^2-x_2^2\to\max$ $x_1+2x_2\le 20$ $x_1+x_2\ge 8$ $x_1,x_2\ge 0$
7. $f=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+5x_1-6x_2\to\min$ $x_1+3x_2\le 12$ $x_1+x_2\ge 6$ $x_1,x_2\ge 0$	8. $f=x_1+3x_2-2x_1^2-3x_2^2\to\max$ $x_1+3x_2\le 12$ $x_1+x_2\ge 6$ $x_1,x_2\ge 0$

9.	$\begin{gathered} f=-x_1-2x_2+x_2^2 \to \min \\ 3x_1+2x_2 \le 6 \\ x_1+2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$	10.	$\begin{gathered} f=5x_1+2x_2-x_1^2+x_1x_2-x_2^2 \to \max \\ 2x_1+3x_2 \le 15 \\ x_1+2x_2 = 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$
11.	$\begin{gathered} f=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+3x_1+4x_2 \to \min \\ x_1+x_2 \ge 6 \\ 2x_1+x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$	12.	$\begin{gathered} f=3x_1+10x_2-2x_1^2-5x_2^2 \leftarrow \max \\ 4x_1-x_2 \le 8 \\ x_1+x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$
13.	$\begin{gathered} f=x_1^2+x_2^2-8x_1-10x_2 \to \min \\ 3x_1+2x_2+x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{gathered}$	14.	$\begin{gathered} f=2x_1x_2-x_1^2-x_2^2 \to \max \\ 2x_1-x_2 \le 6 \\ x_1+2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$
15.	$\begin{gathered} f=3x_1+8x_2-x_1^2-2x_2^2 \to \max \\ 2x_1+x_2 \ge 8 \\ 2x_1+3x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$	16.	$\begin{gathered} f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1+x_2 \to \min \\ x_1+2x_2+3x_3 \le 12 \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{gathered}$
17.	$\begin{gathered} f=8x_1+x_2-x_1^2 \to \max \\ 2x_1+x_2 \le 16 \\ x_1+5x_2 = 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$	18.	$\begin{gathered} f=x_1-x_2^2+2x_1x_2 \to \max \\ x_1+x_2 = 8 \\ x_2+x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{gathered}$
19.	$\begin{gathered} f=15x_1+8x_2-x_1^2+x_1x_2-3x_2^2 \to \max \\ 3x_1+x_2 \le 15 \\ x_1+2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$	20.	$\begin{gathered} f=8x_1+2x_2+4x_3-x_1^2-2x_3^2 \to \max \\ 2x_1+x_2-x_3 \le 16 \\ 3x_2+4x_3 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{gathered}$
21.	$\begin{gathered} f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2 \to \min \\ 2x_1+x_2+x_3 = 10 \\ 3x_1-2x_2-x_3 \ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{gathered}$	22.	$\begin{gathered} f=2x_1-x_2-2x_1^2-3x_2^2 \to \max \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4 = 16 \\ -x_1+3x_2-x_3-x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{gathered}$

23. $f = 3x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to \max$ $x_1 + 2x_2 \le 20$ $x_1 + x_2 \ge 8$ $x_1, x_2 \ge 0$	24. $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 5x_2 \to \min$ $x_1 + 3x_2 \le 12$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
25. $f = x_1 - 2x_2 + 2x_2^2 \to \min$ $3x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	26. $f = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 \to \min$ $x_1 \le 2,$ $x_2 \le 4,$ $x_3 \le 6$
27. $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \to \min$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$ $3x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	28. $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \to \min$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$ $3x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 8$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
29. $f = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 \to \min$ $x_1 + x_2 \ge 7$ $2x_1 + x_2 \le 17$ $x_1, x_2 \ge 0$	30. $f = 4x_1 + 9x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2 \leftarrow \max$ $4x_1 - x_2 \le 9$ $x_1 + x_2 \le 13$ $x_1, x_2 \ge 0$

5. Контрольна робота для студентів заочної форми навчання

Контрольна робота для студентів заочної форми складається з 2 видів завдань. Варіант задачі для кожного завдання вибирається студентом за особистим номером у списку навчальній групі:

- завдання 1 (лаб 1-2) - знаходження оптимуму задачі безумовної багатовимірної оптимізації наближено одним з методів (покоординатного сходження або градієнтним) за вибором, потребує розробки програми для знаходження оптимуму функції
- завдання 2 (лаб 3) - рішення задачі умовної оптимізації методом множників Лагранжа.

6. Вказівки до виконання лабораторних та контрольної робіт

6.1. Градієнтні методи

Приклад. Знайти максимум функції

$$f(X) = 6x_1 - 2x + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$$

при обмеженнях

$$0 \le x_1 \le 4; h_1 = 0{,}4;$$
$$1 \le x_2 \le 2; h_2 = 0{,}2.$$

використовуючи градієнтний метод із точністю ε= 0,001.

Розв'язання. Із області допустимих значень функції f(x) довільним чином вибираємо початкову точку x = (1 ; 1,5). Обчислимо значення цільової функції f(x) в точці X^0:

$$f(X^0) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1{,}5 - 2(1{,}5)^2 = 2{,}5.$$

Знайдемо градієнт функції $f(X)$:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \right) = (6 - 4x_1 + 2x_2; 2x_1 - 4x_2).$$

Перша ітерація. Обчислимо в точці X^0 напрямок l^0:

$$l^0 = \nabla f(X^0) = (6 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}5; 2 - 4 \cdot 1{,}5) = (5; 4).$$

Тоді $X^1 = X^0 + l^0 h_0$, отже

$$x_1^1 = x_1^0 + l_1^0 h_0 = 1 + 5 \cdot 0{,}4 = 3;$$
$$x_2^1 = x_2^0 + l_2^0 h_0 = 1{,}5 + (-4) \cdot 0{,}2 = 0{,}7.$$

Отримали точку $X^1 = (3; 0{,}7).$ Значення цільової функції в точці x^1 буде: $f(X^1) = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}7 = 3{,}22.$

f (x^1) > f (x^0), отже рухаємось в напрямку збільшення функції, але f (x^1) – f (x^0) > ε

Друга ітерація.

$$l^1 = \nabla f(X^1) = (6 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0{,}7; 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0{,}7) = (-4{,}6; 3{,}2).$$

Знайдемо крок $h_1 = \frac{h_0}{2} = \left(\frac{0{,}4}{2}; \frac{0{,}2}{2} \right) = (0{,}2; 0{,}1).$

Тоді $X^2 = X^1 + l^1 h_1.$

$$x_1^2 = 3 + (-4{,}6)\cdot 0{,}2 = 2{,}08;$$
$$x_2^2 = 0{,}7 + 3{,}2\cdot 0{,}1 = 1{,}02.$$

Отримали точку $X^2 = (2{,}08;1{,}02).$

$$f(X^2) = 6\cdot 2{,}08 - 2(2{,}08)^2 + 2\cdot 2{,}08\cdot 1{,}02 - 2\cdot(1{,}02)^2 = 5{,}9896.$$

$$\left|f(X^1) - f(X^2)\right| = \left|3{,}22 - 5{,}9896\right| \rangle \varepsilon.$$

Третя ітерація.

$$l^2 = \nabla f(X^2) = (-0{,}28;0{,}08).$$

Крок $h_2 = \dfrac{h_1}{2} = (0{,}1;0{,}05).$

Точка $X^3 = X^2 + l^2 h_2 = (2{,}052;1{,}024)$

f (x^3) = 5,9959. f (x^2) – f (x^3) = 5,9896 – 5,9959 > ε .

Четверта ітерація.

$$l^3 = \nabla f(X^3) = (-0{,}16;0{,}08), \quad h_3 = \frac{h}{2} = (0{,}05;0{,}25).$$

Точка $X^4 = X^3 + l^3 h_3 = (2{,}044;1{,}026).$

$$f(X^4) = 5{,}997.$$

Оскільки | f(x^3) – f(x^4) | = | 5,9959-5,997 | = 0,001 = ε , то ітераційний процес припинаємо.

Отримали локальний екстремум в точці X = (2,044; 1,026) В цій точці цільова функція досягає максимального значення $f(X)_{\max} = 5{,}997$ із заданою точністю ε = 0,001.

6.2. Метод множників Лагранжа

Знайти екстремум функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

при обмеженнях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

де обмеження складаються лише із рівнянь, відсутні умови невід'ємності, функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервні разом із своїми частинними похідними.

Така задача називається задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Основна ідея метода множників Лагранжа полягає в переході від задачі на умовний екстремум до задачі знаходження безумовного екстремуму деякої спеціальним чином побудованої функції Лагранжа.

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right],$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ - множники Лагранжа, кількість яких дорівнює числу обмежень.

Приклад. Необхідно використовуючи метод множників Лагранжа визначити екстремум функції:

$$f(X) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях $x_1 + x_2 = 7$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа. Оскільки за умовою тільки одно обмеження, то множник Лагранжа буде один λ.

$$L(X, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - \lambda(7 - x_1 - x_2).$$

Знайдемо частинні похідні по x_1, x_2 і λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - \lambda \\ \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - \lambda \\ \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda} = 7 - x_1 - x_2. \end{cases}$$

Прирівнюючи похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2) - \lambda = 0 \\ 2(x_2 - 3) - \lambda = 0 \\ 7 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь знаходимо $x_1^* = 3,\ x_2^* = 4,\ \lambda^* = 2.$ Отже, отримали стаціонарну точку x* =(3, 4, 2).. Перевіримо достатню умову екстремуму в цій точці. Для цього знаходимо другі похідні і обчислюємо матрицю Гессе:

$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$ Оскільки матриця Гессе Н додатне визначена, а головний мінор першого порядку $M_1 = \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1^2} \rangle\ 0$ і мінор другого порядку $M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \rangle\ 0,$

то функція f(x) опукла і в точці x^* має абсолютний мінімум $f_{\min} = f(X^2) = 2.$

Можна відмітити, що такий же результат отримаємо, якщо дослідження задачі на умовний екстремум функції f(x) зведемо к дослідженню на безумовний екстремум функції $f_1(x)$, отриманої шляхом перетворення функції f(x). Для цього з рівняння $7-x_1-x_2 = 0$ знайдемо $x_1 = 7 - x_2$ і підставимо його в функціонал. В результаті отримаємо функцію однієї змінної x_2: $f_1(X) = (7 - x_2 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = (-x_2 + 5)^2 + (x_2 - 3)^2.$

Знайдемо стаціонарну точку цієї функції

$$\frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} = 2(-x_2 + 5)(-1) + 2(x_2 - 3) = 4x_2 - 8 = 0.$$

Маємо стаціонарну точку $x_1^* = 3, x_2^* = 4.$ По аналогії із вище наведеним прикладом встановлюємо, що точка x^* - є точкою мінімуму і функція f(x) в цій точці приймає мінімальне значення.

6.3. Методи знаходження рішення задачі квадратичного програмування

Алгоритм розв’язання задачі квадратичного програмування:

1. Складаємо функцію Лагранжа.
2. Записуємо необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа (8.31)-(8.35).
3. Використовуючи метод штучного базису, або встановлюємо, що сідлова точка функції Лагранжа відсутня, або знаходимо її координати.
4. Записуємо оптимальний розв’язок задачі квадратичного програмування і знаходимо значення цільової функції.

Приклад. Знайти максимальне значення функції

$$f(X) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 \qquad (6.3.1)$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \le 7; \qquad (6.3.2)$$

$$x_2 \le 5;$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \qquad (6.3.3)$$

Розв'язання. Функція f є угнутою оскільки являє собою суму лінійної функції $f_1 = x_1 + 8x_2$ (яку також можна розглядати як угнуту) і квадратичної форми $f_2 = -x_1^2 - x_2^2$, яка є недодатне визначеною і йому також є угнутою функцією. Система обмежень задачі містить лише лінійні рівняння. Отже, можна застосувати теорему Куна-Таккера. З цією метою запишемо функцію Лагранжа:

$$L = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 + \lambda_1(7 - x_1 - x_2) + \lambda_2(5 - x_2) \qquad (6.3.4)$$

Запишемо необхідні і достатні умови існування сідловок точки побудованої функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 1 - \lambda_1 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 7 - x_1 - x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 5 - x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (6.3.5)$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(-2x_1 + 1 + \lambda_1) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(-2x_2 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(7 - x_1 - x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(5 - x_2) = 0, \end{cases} \qquad (6.3.6)$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \lambda_1 \ge 0; \lambda_2 \ge 0. \qquad (6.3.7)$$

Запишемо систему (6.3.5) таким чином:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 \ge 1 \\ 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_2 \le 5 \end{cases} \qquad (6.3.8)$$

Зведемо ці нерівності до строгих рівностей. З цією метою введемо додаткові невід’ємні змінні v_1, v_2, w_1, w_2.

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - v_1 = 1 \\ 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 8 \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7 \\ x_2 + w_2 = 5 \end{cases} \qquad (6.3.9)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \ge 0 \qquad (6.3.10)$$

Враховуючи рівності (6.3.9) можна записати:

$$v_1 x_1 = 0; v_2 x_2 = 0; w_1 \lambda_1 = 0; w_2 \lambda_2 = 0. \qquad (6.3.11)$$

Для знаходження базисного розв’язку системи лінійних рівнянь (6.3.9) застосовуємо метод штучного базису. Для цього в перше і друге рівняння системи (6.3.9) вводимо додаткові невід’ємні змінні z_1 , z_2 і розв’яжемо задачу лінійного програмування:

$$F = -Mz_1 - Mz_2 \rightarrow \max \qquad (6.3.12)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - v_1 + z_1 = 1; \\ 2x_2 + y_1 + y_2 - v_2 + z_2 = 8; \\ x_1 + x_2 + w_1 = 7; \\ x_2 + w_2 = 5; \end{cases} \qquad (6.3.13)$$

$$x_1, x_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \qquad (6.3.14)$$

Розв’язавши задачу (6.3.12) - (6.3.13) знаходимо допустимий розв’язок системи лінійних рівнянь (6.3.13) (табл. 1).

Як видно з таблиці 1 розв’язком задачі є

$$x_1^0 = 1/2; x_2^0 = 4; w_1 = 5/2; w_2 = 1; \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Оскільки $x_1^0 v_1 = 0; \quad x_2^0 v_2 = 0; \quad \lambda_1^0 w_1 = 0; \quad \lambda_2^0 w_2 = 0,$ то (x^0 , λ^0) = (1/2, 4, 0, 0) є сідловою точкою функції Лагранжа задачі (6.3.1)-(6.3.3). Отже, x^* = (1/2; 4) оптимальний план задачі і f_{max} = 16,75.

Таблиця1.

i	Б	$C_б$	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M
				Ax_1	Ax_2	$A\lambda_1$	$A\lambda_2$	$A\nu_1$	$A\nu_2$	$A\omega_1$	$A\omega_2$	Az_1	Az_2
1	Az_1	-M	1	2	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
2	Az_2	-M	8	0	2	1	1	0	-1	0	0	0	1
3	Aw_1	0	7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	Aw_2	0	5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m+2			-9	-2	-2	-2	-1	1	1	0	0	0	0
1	Ax_1	0	1/2	1	0	1/2	0	-1/2	0	0	0	1/2	0
2	Az_2	-M	8	0	$\boxed{2}$	1	1	0	-1	0	0	0	1
3	Aw_1	0	13/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	1	0	-1/2	0
4	Aw_2	0	5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m+2			-8	0	-2	-1	-1	0	1	0	0	1	0
1	Ax_1	0	1/2	1	0	1/2	0	-1/2	0	0	0		
2	Ax_2	0	4	0	1	1/2	1/2	0	-1/2	0	0		

3	Aw_1	0	5/2	0	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	1	0		
4	Aw_2	0	1	0	0	-1/2	-1/2	0	1/2	0	1		
m+1			0	0	0	0	0	0	0	0	0		

7. Рекомендована література

7.1. Основна

1. Українець А.І., Гуржій А.М., Самсонов В.В., Кривець Т.О., Городенська В.Я. Задачі лінійного та нелінійного програмування. Навч. посібник.- К.:НУХТ, 2007. – 156 с.

2. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зінько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации.- К.: Вища школа. Головное изд-во. 1983. –512с.

.3. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Чернишова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. .- К.: Вища школа. Головное изд-во. 1975. – 372с.

4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. –М.: Высш. Шк., 1986. –319 с.

5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. –М.: Физматгиз, 1963. –776с.

6. Вагнер Г. Основы исследования операций, 3т.: Пер. с анг.. –М.: Мир, 1973.

7. Базара М., Шести К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с анг.. –М.: Мир, 1982. –583с.

8. Бєліков М.І., Гуржій А.М., Кігель В.Р., Самсонов В.В. Розв'язування оптимізаційних задач за допомогою методів лінійного програмування. –К.: УДУХТ, 1994. –132с.

9. Самсонов В.В., Гуржій А.М. Задачі оптимізації в практичної діяльності фахівця. –К.: УДУХТ, 1997. –176.

7.2. Додаткова

10. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. –М.: Советское радио, 1966. –524с.

11. Вензель Е.С. Исследование операций. -М.: Советское радио, 1972. – 552с.

12. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с анг. – Радио и связь, 1981. –560с.

13. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник.–4–те вид., переробл. і допов. – К., 2000. – 687с.