

ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПАНЕЛІ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

К.І.Шнеренко, В.Ф.Годзула, А.С.Богатирчук

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України

Національний університет харчових технологій

1. Постановка задачі. Розглянемо напружений стан непологої циліндричної панелі із композитного матеріалу, виготовленої перетином поверхні циліндричної оболонки двома одноосними круговими циліндричними поверхнями радіусів r_{10} і r_{20} . Внутрішній контур панелі жорстко защемлений, а зовнішній - навантажений розтягуючими зусиллями T .

Віднесемо серединну поверхню панелі до системи криволінійних ортогональних координат (α, β) . В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа [1].

$$\iint_{\Omega} \{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_1} (T_{tt}^0 \delta u_t + T_{ts}^0 \delta u_s + T_{th}^0 \delta w + G_{tt}^0 \delta \gamma_t + G_{ts}^0 \delta \gamma_s) d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23},$$

де V_0 - питома енергія деформації; $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ - узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta), \\ U_2 &= u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad W = w(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v), \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A \\ 2, \beta, B \end{pmatrix}, \quad 2\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12}, \\ G_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ H_{12} &= D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут B_{ij}, D_{ij}, K_i - узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Граничні умови на жорстко защемленому контурі при $\rho = r_{10}$ будуть [1]:

$$u = v = w = \gamma_\rho = \gamma_\theta = 0. \quad (5)$$

На зовнішньому контурі панелі при $\rho = r_{20}$

$$T_\rho = T|\sin\theta|, S_{\rho\theta} = Q_\rho = G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \quad (6)$$

Граничні умови (6) змінюються по гармонійному закону та відповідають розтягуючому зусиллю T , що діє вздовж координати ρ .

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) з урахуванням (5,6), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I(u, v, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

2. Метод розв'язку задачі. Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (x_1, x_2) таку, що $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{4}(1+x_{10})(1+x_{20})(x_{10}+x_{20}-1) \quad (i=1,3,5,7); \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1-x_1^2)(1+x_{20}) \quad (i=2,6); \quad \varphi_i = \frac{1}{2}(1+x_{10})(1-x_2^2) \quad (i=4,8) \end{aligned} \quad (7)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \varphi_i, \quad (8)$$

де $x_{10} = x_1 x_{1i}, \quad x_{20} = x_2 x_{2i}, \quad (x_{1i}, x_{2i}), \quad (\alpha^i, \beta^i)$ - координати i -го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \varphi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \varphi_i. \quad (9)$$

Тут $u_1^i, \dots, \gamma_2^i$ - шукані переміщення в i -му вузлі.

3. Числові результати. В таблиці наведені результати обчислень на контурі отвору $\rho = r_{10}$ коефіцієнтів концентрації напружень

$$k_{\rho}^T = \frac{T_{\rho}}{E_1 h} 10^3, k_{\theta}^T = \frac{T_{\theta}}{E_1 h} 10^3, k_{\rho}^G = \frac{G_{\rho}}{E_1 h^2} 10^3, k_{\theta}^G = \frac{G_{\theta}}{E_1 h^2} 10^3$$

для ортотропної панелі з параметрами :

$$R/h = 41,25; \eta_0/h = 3,3; E_2/E_1 = 1,25; G_{12}/E_1 = 0,23; \nu_1 = 0,2.$$

Таблиця

$\frac{\theta}{\pi/14}$	0	1	2	3	4	5	6	7
K_{ρ}^T	$\frac{-0,03}{-0,01}$	$\frac{-0,04}{-0,01}$	$\frac{-0,11}{-0,02}$	$\frac{0,16}{0,23}$	$\frac{1,04}{0,83}$	$\frac{1,50}{1,14}$	$\frac{1,08}{0,79}$	$\frac{1,16}{0,66}$
K_{ρ}^G	$\frac{0,01}{0,05}$	$\frac{0,01}{0,07}$	$\frac{0,03}{0,11}$	$\frac{0,04}{0,17}$	$\frac{0,03}{0,25}$	$\frac{0,05}{0,37}$	$\frac{0,09}{0,50}$	$\frac{0,12}{0,55}$
K_{θ}^T	$\frac{0,05}{-0,23}$	$\frac{0,27}{-0,07}$	$\frac{0,65}{-0,01}$	$\frac{1,28}{0,09}$	$\frac{3,48}{1,58}$	$\frac{8,16}{5,39}$	$\frac{12,17}{9,87}$	$\frac{20,77}{18,92}$
K_{θ}^G	$\frac{0,55}{0,50}$	$\frac{0,56}{0,52}$	$\frac{0,56}{0,52}$	$\frac{0,46}{0,44}$	$\frac{0,18}{0,26}$	$\frac{-0,11}{0,07}$	$\frac{-0,14}{-0,02}$	$\frac{-0,04}{-0,04}$

В чисельниках приведені значення розрахунків для панелі з параметрами між шарових зсувів $\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0,01$, а в знаменниках – відповідно для

$\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0,1$, що відповідає більшій жорсткості поперечного зсуву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка, 1980.-636 с.