

Розв'язання еліптичного рівняння, використовуючи програмний пакет MathCAD

Світлана Гузенко

Національний університет харчових технологій

Вступ.

У багатьох інженерних задачах використовуються рівняння з частинними похідними. Одним з них є еліптичне рівняння, а саме рівняння, яке має тільки частинні похідні другого порядку, одного знаку. Найбільш поширеним у використанні є рівняння Пуассона. Дане рівняння може описувати розподіл електростатичного поля $u(x,y)$ у двовимірній області з щільністю заряду $f(x,y)$.

Матеріали і методи.

Для того, щоб задача була задана коректно, рівняння Пуассона вимагає граничних умов. Програмний пакет MathCAD розв'язок рівняння знаходить на плоскій квадратній області, яка складається з $(k+1) \times (k+1)$ точок. Отже, граничні умови задачі повинні бути задані для всіх сторін квадратної області. Найпростіше зробити їх нульовими, і тоді можна використовувати для розв'язання рівняння вбудовану функцію `multigrid`. Обов'язково вказуючи її аргументи. Тобто, `multigrid (F, pscycle)` – матриця розв'язання рівняння Пуассона, розміру $(k+1) \times (k+1)$ на квадратній області з нульовими граничними умовами; де F – матриця розміру $(k+1) \times (k+1)$, яка задає праву частину рівняння Пуассона; `pscycle` – параметр алгоритму, який задає кількість циклів для кожної ітерації.

Для більш складних задач, коли граничні умови ненульові, використовують іншу вбудовану функцію MathCAD – `relax`. Отже, `relax(a,b,c,d,e,F,v,gjac)` – матриця розв'язання диференціального рівняння з частинними похідними на області у вигляді квадрату, отриманого за допомогою алгоритму релаксації для методу решіток. Аргументами цієї функції будуть: a,b,c,d,e – квадратні матриці коефіцієнтів різницевої системи, що апроксимують диференціальне рівняння; F – квадратна матриця, яка задає праву частину диференціального рівняння; v – квадратна матриця граничних умов і початкового наближення до розв'язку; `gjac` – параметр алгоритму, що є спектральним радіусом ітерацій Якобі. Параметр алгоритму характеризує швидкість збіжності ітерацій, а тому повинен приймати значення від 0 до 1. У матриці граничних умов необхідно задавати тільки граничні елементи, виходячи зі значень граничних умов за периметром квадратної області. Інші елементи даної матриці потрібні для отримання початкового наближення до розв'язку. Усі матриці, описані раніше, повинні мати однаковий розмір $(k+1) \times (k+1)$. Сам алгоритм релаксації дозволяє, за допомогою ітерацій, здійснити перевірку рівнянь і відповідне корегування значень шуканої функції у кожній точці області.

Результати.

В поданій доповіді представлено різні вбудованих функцій MathCAD, які дозволяють розв'язати рівняння Пуассона з нульовими та ненульовими граничними умовами. Розв'язок даного диференціального рівняння з частинними похідними має графічний вигляд.

Висновки.

Як бачимо програмний пакет MathCAD дозволяє розв'язувати різні диференціальні рівняння з частинними похідними (еліптичних, параболічних та гіперболічних), за допомогою відповідних вбудованих функцій. І розв'язки цих рівнянь мають графічний вигляд, що дозволяє наглядно бачити зміни у розв'язках при заміні граничних умов з одних на інші.