УДК № 517.9.

О.М.Станжицький, А.М.Ткачук (КНУ ім.Т.Шевченка, Київ)

O.M.Stanzhytsky, A.M.Tkachuk

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЛАСТИВОСТЯМИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ABOUT CONNECTION BETWEEN PROPERTIES OF SOLUTIONS OF DIFFERENCE AND CORRESPONDING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Встановлені умови, при яких існування періодичного розв'язку диференціального рівняння зберігається при наявності цієї властивості у розв'язку відповідного різницевого рівняння. Доведена збіжність періодичних розв'язків системи різницевих рівнянь до періодичного розв'язку системи диференціальних рівнянь. Аналогічні питання розглянуто для обмежених розв'язків.

Detected the conditions under which existence of periodical solution of differential equation keeps when takes place this property of solution of corresponding difference equation. Simultaneous proved convergence of periodical solutions of difference equations to periodical solution of simultaneous differential equations. Similar problems considered for limited solutions.

1. Вступ. Ефективним методом дослідження диференціальних рівнянь є перехід від них до різницевих рівнянь, які отримуються з диференціальних заміною похідної відповідним різницевим відношенням. Останнє рівняння легко розв'язується покроковим методом, особливо враховуючи сучасний розвиток ЕОМ. Однак розв'язувати такі рівняння вказаним методом можна лише на скінченному інтервалі (в скінченній кількості вузлових точок). По цій причині він не дає якісних характеристик (обмеженості, періодичності, стійкості) відповідних розв'язків диференціальних рівнянь. Тому актуальною є проблема вивчення якісної відповідності між розв'язками диференціальних та різницевих рівнянь.

В роботах [1], [2] та [3] розглядалися умови збереження властивостей періодичності, стійкості та коливності розв'язків різницевих рівнянь при наявності такої властивості у диференціальних рівнянь. Але не менш актуальною і цікавою є обернена задача про збереження вказаних вище властивостей розв'язків диференціальних рівнянь при наявності таких у відповідних різницевих. В роботі [4] дане питання розглянуто для стійкості та коливності. В даній роботі ці питання будуть вивченні для обмеженості та періодичності розв'язків. Розглядаються також питання про збіжність періодичних та обмежених розв'язків різницевих рівнянь до відповідних періодичних та обмежених розв'язків диференціальних рівнянь.

Приведемо спочатку ряд допоміжних тверджень, на основі яких в подальшому будуть отриманні основні результати.

2. Постановка задачі. Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{1}$$

і відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h) \tag{2}$$

$k \in \mathbb{Z},\ h > 0$–крок різницевого рівняння,

$$x_k^h = x_k^h(t_0 + kh),$$

$$x^h(t_0) = x_0^h.$$

Вектор-функція $X(t,x)$ визначена при $t \in \mathbb{R},\ x \in D$ (D–деяка область простору $\mathbb{R}^n$), $t_0 \in \mathbb{R}$.

Мета роботи – вивчити питання про зв'язок між обмеженими і періодичними розв'язками систем (1) та (2).

3. Допоміжні твердження. Для розв'язування вище поставленої задачі приведемо кілька допоміжних тверджень. Надалі скрізь будемо вважати, що функція $X(t,x)$ в області $\mathbb{R} \times D$ є неперервно-диференційовною і обмеженою разом зі своїми частинними похідними так що:

$$|X(t,x)| + \left|\frac{\partial X}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X}{\partial x}\right\| \le C.$$

Тоді справедлива лема про рівномірну оцінку близькості між розв'язками (1) і (2).

Лема 1. *Нехай $x(t)$ і x_k^h розв'язки задач Коші, визначені на відрізку $[t_0, t_0+T]$, для (1) та (2) такі, що $x(t_0) = x_0^h = x_0, \quad x_0 \in D$. Тоді має місце нерівність*

$$\left|x(t_0+kh) - x_k^h\right| \le he^{CT}[1+NT], \qquad \textit{при} \qquad kh \le T,$$

де $N = C + C^2$.

Доведення. Доведення леми безпосередньо випливає з формули (12) монографії [5, с. 384].

Лема 2. *При наведених вище умовах розв'язок системи (2) x_k^h неперервно залежить від початкових даних до моменту виходу його з області D.*

Доведення. Розв'язки системи (2) можемо представити у вигляді

$$x_k^h = x_0^h + h\sum_{p=0}^{k-1} X(t_p, x_p^h)$$

$$y_k^h = y_0^h + h\sum_{p=0}^{k-1} X(t_p, y_p^h).$$

А тому

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| \le \left|x_0^h - y_0^h\right| + h\sum_{p=0}^{k-1}\left|X(t_p, x_p^h) - X(t_p, y_p^h)\right| \le \left|x_0^h - y_0^h\right| + h\sum_{p=0}^{k-1} C\left|x_p^h - y_p^h\right|.$$

Звідси та з [1] маємо

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| \le \left|x_0^h - y_0^h\right|(1+Ch)^k,$$

що й доводить лему.

Лема 3. *Якщо розв'язок системи (2) x_k^h рівномірно асимптотично стійкий по $k_0 \in \mathbb{Z}$, то він рівномірно асимптотично стійкий і по x_0.*

Доведення. Оскільки розв'язок системи (2) x_k^h рівномірно асиптотично стійкий, то для $\forall\,\eta > 0\ \ \exists\,\delta = \delta(\eta) > 0$, що для довільного іншого розв'язку системи (2) y_k^h з того, що

$$\left|x_{k_0}^h - y_{k_0}^h\right| < \delta$$

випливає

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| < \frac{\eta}{2} \qquad \text{при} \qquad k \ge k_0$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\left|x_k^h - y_k^h\right| = 0. \tag{3}$$

Позначимо через $U_\delta(k_0)$ - δ-окіл точки $x_{k_0}^h(x_0)$. Покажемо, що граничне співвідношення (3) рівномірне по $x_0 \in U_\delta(k_0)$. Нехай це не так. Тоді $\exists\,\mu > 0$, що в $U_\delta(0)$ можна вказати збіжну послідовність точок $x^{(n)}$ і послідовність чисел k_n таких, що:

$$\left|x^{(n)} - x_0^h\right| < \delta$$

$$\left|x^h_{k_n}(x^{(n)}) - x^h_{k_n}\right| \geq \mu, \qquad k_n \to \infty, \tag{4}$$

де $x^h_k(x^{(n)})$ – розв'язок (2), що $x^h_0(x^{(n)}) = x^{(n)}$. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x^0$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \left|x^h_k(x^0) - x^h_k\right| = 0$ і можна вказати $N > 0$, щоб виконувалася нерівність

$$\left|x^h_k(x^0) - x^h_k\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2} \tag{5}$$

для всіх $k \geq N + k_0$, де $\sigma(\mu)$ – стала, що гарантує включення розв'язків $x^h_k(x)$ $\left(x^h_0(x) = x\right)$ системи (2), які починаються в $U_{\sigma(\mu)}(0)$ - околі точки $x^h_0(0)$ в $\frac{\mu}{2}$-окіл розв'язку x^h_k для всіх $k \geq 0$.

В силу леми 1 $\exists\, N_1 > 0$, що виконується нерівність

$$\left|x^h_k(x^{(n)}) - x^h_k(x^0)\right| < \frac{\sigma(\mu)}{2}, \qquad k \in [k_0, k_0 + N], \quad n > N_1 \tag{6}$$

(можна вважати, що $k_n \geq N + k_0$ для $n > N_1$).

З (5), (6) випливає

$$\left|x^h_k(k_0 + N, x^{(n)}) - x^h_k(k_0 + N)\right| \leq \sigma(\mu).$$

Тому

$$\left|x^h_k(x^{(n)}) - x^h_k\right| < \frac{\mu}{2}, \qquad k \geq k_0 + N.$$

А отже, при $k = k_n$ маємо, що $\left|x^h_{k_n}(x^{(n)}) - x^h_{k_n}\right| < \frac{\mu}{2}$, що суперечить (4).

Лему доведено.

4. Основні результати. Розглянемо спочатку відповідність між обмеженими розв'язками систем (1) та (2). Наступна теорема гарантує існування обмеженого розв'язку системи (2) при умові, що система (1) має обмежений розв'язок.

Теорема 1. *Якщо система (1) має обмежений, рівномірно за $t_0 \in \mathbb{R}$ асимптотично стійкий розв'язок $x(t)$, визначений на $\mathbb{R}$, і такий, що лежить в області D разом з* *деяким своїм околом, тоді* $\exists\, h_0$, *що при* $h \leq h_0$ *система (2) також буде мати обмежений розв'язок . Причому*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| x(kh) - x_k^h \right| \longrightarrow 0, \qquad h \longrightarrow 0. \tag{7}$$

Доведення. За умовою теореми $x(t)$–обмежений розв'язок системи (1), тобто для нього виконується нерівність

$$|x(t)| \leq A, \qquad \forall t.$$

В силу рівномірної асимптотичної стійкості $x(t)$ для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного t_0 існує $\delta > 0$ і T такі, що якщо $y(t)$–розв'язок системи (1), для якого виконується умова

$$|x(t_0) - y(t_0)| \leq \delta,$$

то

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \qquad \text{при} \qquad t \geq t_0 \tag{8}$$

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \qquad \text{при} \qquad t \geq t_0 + T \tag{9}$$

причому δ і T не залежать від t_0.

Нехай x_m^h–розв'язок системи (2) такий, що в початковій точці t_0 він збігається з розв'язком $y(t)$, тобто:

$$x_0^h = y(t_0). \tag{10}$$

Тоді за лемою 1 буде виконуватись нерівність

$$\left| y(t_0 + mh) - x_m^h \right| \leq h e^{C(T+1)} [1 + N(T+1)] \qquad \text{при} \quad m \leq k_0,$$

де $k_0 : \quad T \leq k_0 h \leq T + 1$. Відзначимо, що в силу стійкості, $y(t)$ при $t \geq t_0$ лежить в D разом з деяким околом.

Виберемо h, щоб

$$he^{C(T+1)}[1+N(T+1)] \leq \frac{\delta}{2}. \tag{11}$$

Звідки

$$\left|y(mh) - x_m^h\right| \leq \frac{\delta}{2}, \qquad m \leq k_0. \tag{12}$$

Надалі будемо розглядати відрізок довжини $k_0 h$.

Оскільки в силу умови (10) маємо:

$$\left|x_0^h - x(t_0)\right| \leq \delta,$$

то з (9) випливає

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta}{2}, \qquad t \geq k_0 h.$$

Тому

$$\left|x(mh) - x_m^h\right| \leq |x(mh) - y(mh)| + \left|y(mh) - x_m^h\right| < 2\varepsilon, \qquad m \leq k_0$$

і

$$\left|x(k_0 h) - x_{k_0}^h\right| \leq \delta. \tag{13}$$

Тепер розглянемо наступний відрізок довжини $k_0 h$ – $[k_0 h, 2k_0 h]$ і виберемо такий розв'язок $\tilde{y}(t)$ системи (1), що починається в точці $k_0 h$ і збігається в цій точці з розв'язком x_m^h:

$$x_{k_0}^h = \tilde{y}(k_0 h).$$

В силу (13) маємо

$$|x(k_0 h) - \tilde{y}(k_0 h)| \leq \delta,$$

а з (8), (9) випливає

$$|x(t) - \tilde{y}(t)| < \varepsilon, \qquad t \geq k_0 h$$

$$|x(t) - \tilde{y}(t)| \le \frac{\delta}{2}, \qquad t \ge k_0 h + T.$$

Тому справедливі нерівності

$$\left|x(mh) - x_m^h\right| < 2\varepsilon, \qquad m \in [k_0, 2k_0]$$

і

$$\left|x(2k_0 h) - x_{2k_0}^h\right| \le \delta.$$

Продовжуючи далі цей процес побудови розв'язку системи (2) x_m^h, переконуємося, що x_m^h постійно знаходиться в 2ε - околі обмеженого розв'язку системи (1) $x(t)$, а у точках вигляду pk_0h в його δ - околі.

Отже, x_m^h лежить в 2ε - околі обмеженого розв'язку, тому і сам x_m^h є обмеженим при $mh \ge t_0$.

Таким чином для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ нами побудовано обмежений розв'язок x_m^h рівняння (2) при $mh \ge t_0$, причому h не залежить від t_0. Побудуємо тепер обмежений на всій осі розв'язок x_m^h рівняння (2). З вище сказаного випливає, що всі розв'язки різницевого рівняння, які починаються в δ - околі розв'язку $x(t)$ не виходять з його 2ε околу, а через k_0 кроків попадають знову в його δ - окіл. А тому обмежені розв'язки x_m^h різницевого рівняння, що в момент $-k_0$ починаються в δ - околі точки $x(-k_0 h)$ при $m = 0$ попадають знову в δ - окіл точки $x(0)$.

Аналогічно можна показати, що всі обмежені розв'язки системи (2), які при $-k_0 n$ починаються в δ - околі точки $x(-k_0 nh)$ не виходять з 2ε - околу розв'язку $x(t)$, а при $m = -k_0(n-1)$ попадають в δ - окіл точки $x(-k_0(n-1)h)$.

Позначимо через $\mathbb{S}_n$ – множину значень розв'язків системи (2) в точці $m = 0$, які при $m = -k_0 n$ лежать в δ - околі точки $x(-k_0 nh)$. В силу вище сказаного, ця множина не порожня для довільного натурального n і при цьому справедливе включення $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_{n-1}$. За своєю побудовою множини $\mathbb{S}_n$ складаються з образів розв'язків рівняння (2), що починаються в точках $m = -k_0 n$. Відображення, що породжує $\mathbb{S}_n$ є неперервним в силу леми 2, а тому $\mathbb{S}_n$ замкнуті (як образи замкнутих множин при неперервному відображенні).

Нехай z_0–точка спільна для всіх $\mathbb{S}_n$.

Розглянемо тепер розв'язок різницевого рівняння $x_m^h(z_0)$, який при $m = 0$ виходить з точки z_0. Даний розв'язок за своєю побудовою продовжуваний вліво і в точках $-k_0 n$ належить δ-околу точки $x(-k_0 nh)$ для довільного натурального n, де $x(t)$–обмежений розв'язок системи (1), що фігурує в теоремі. А тому він необмежено продовжуваний вліво і лежить в 2ε-околі розв'язку $x(t)$. А значить є обмеженим. Його продовжуваність вправо і обмеженість очевидні. Таким чином, перша частина теореми доведена.

З доведення теореми випливає, що нерівність (11) виконується при всіх $h_1 < h$–вибраного з цієї нерівності, тому система (2) при таких h_1 має обмежений розв'язок, що не виходить з 2ε-околу розв'язку $x(t)$. В силу довільності ε звідси слідує справедливість формули (7).

Теорема доведена.

Надалі розглянемо питання про відповідність між періодичними розв'язками рівнянь (1) та (2). Будемо вважати, що функція $X(t,x)$ періодична по t з періодом ω, тобто $X(t+\omega,x) = X(t,x)$. Виберемо крок $h = \frac{\omega}{n}$, n–натуральне число.

Теорема 2. *Якщо система (2) для достатньо малого кроку h $(n \geq N_0)$ має рівномірно по k_0 і h асимптотично стійкий періодичний розв'язок x_k^h, що лежить в D разом з деяким ρ - околом, тоді і система (1) має також періодичний розв'язок* *періоду кратного* ω.

Доведення. За умовою теореми маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad (\varepsilon < \frac{\rho}{2}) \qquad \exists \delta > 0 \qquad (\delta < \varepsilon) \qquad \exists n_0(\delta) \in \mathbb{N},$$

що якщо $\left|x_{k_0}^h - y_{k_0}^h\right| < \delta$, то

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{при} \qquad k \geq k_0 \tag{14}$$

і

$$\left|x_k^h - y_k^h\right| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{при} \qquad k \geq n_0 + k_0. \tag{15}$$

Причому δ не залежить ні від k_0, ні від h.

За заданими $\delta > 0$ і n_0 виберемо крок h_0

$$h_0 = h_0(\delta, n_0) = \frac{\omega}{m_0}$$

такий, що якщо $y_k^{h_0}$ – розв'язок різницевого рівняння, а $\varphi(t)$ – розв'язок диференціального рівняння такий, що $\varphi(kh_0) = y_k^{h_0}$, то тоді виконується нерівність

$$\left|\varphi(ih_0) - y_i^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2}, \qquad i \in [k, k + n_0]. \tag{16}$$

На підставі леми 1 такий вибір h_0 можливий.

За умовами теореми при такому h_0 система (2) має періодичний асиптотично стійкий розв'язок $x_k^{h_0}$ періоду $p\,(h_0)$.

Тепер розглянемо $U_\delta(x_0^{h_0})$ – δ - окіл точки $x_0^{h_0}$. Нехай y_0 довільна точка з $U_\delta(x_0^{h_0})$, $\varphi(t, y_0)$ – розв'язок системи (1) такий, що $\varphi(0, y_0) = y_0$, $y_k^{h_0}$ – розв'язок системи (2) такий, що $y_0^{h_0} = y_0$.

Тоді із співвідношень (14), (15) маємо

$$\left|y_k^{h_0} - x_k^{h_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k \in [0, n_0]$$

$$\left|y_{n_0}^{h_0} - x_{n_0}^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2},$$

а тому

$$\left|x_k^{h_0} - \varphi(kh_0, y_0)\right| < \varepsilon, \qquad k \in [0, n_0]$$

$$\left|x_{n_0}^{h_0} - \varphi(n_0 h_0, y_0)\right| < \delta.$$

Отже розв'язок системи (1) $\varphi(t)$, що починається в δ - околі $x_0^{h_0}$, не виходячи у вузлових точках $kh_0 \quad (k \in [0, n_0])$ з ε - околу розв'язку $x_k^{h_0}$ системи (2), в момент $n_0 h_0$ знову попадає в його δ - окіл при умові, що розв'язок $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, n_0 h_0]$. Покажемо, що цього можна досягти вибором достатньо малого кроку h.

Виберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб точки з ε-околу періодичного розв'язку x_k^h системи (2) лежали в області D разом з $\frac{\rho}{2}$ околом. В силу умов теореми такий вибір можливий. А тому розв'язки системи (1), що починаються в такому $\frac{\rho}{2}$ - околі продовжуються вліво і вправо на інтервал довжини не меншої ніж $\frac{\rho}{2C}$. Виберемо тепер крок h_0 таким, щоб виконувалась нерівність (16) і нерівність $h_0 < \frac{\rho}{2C}$. Отже, в силу сказаного $h_0 = \frac{\omega}{m_0}$, де m_0 – деяке натуральне число.

Тоді розв'язок $\varphi(t)$, що починається в δ-околі $x_0^{h_0}$ продовжується на інтервал $[0, \frac{\rho}{2C}]$, а в точці $t = h_0$ виконується нерівність:

$$\left|\varphi(h_0) - y_1^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2},$$

де $y_k^{h_0}$ – вказаний вище розв'язок системи (2). Отже точка $\varphi(h_0)$ лежить в області D разом з $\frac{\rho}{2}$ околом, а тому розв'язок $\varphi(t)$ продовжується до точки $2h_0$, і $\varphi(2h_0)$ також лежить в D разом з $\frac{\rho}{2}$ околом. Продовжуючи цей процес, переконуємося, що $\varphi(t)$ визначений на відрізку $[0, n_0 h_0]$.

Позначимо через $\widehat{y}_k^h$ – розв'язок системи (2), що в момент n_0 його початкові дані збігаються з початковими даними розв'язку $\varphi(t)$: $\varphi\left(\frac{n_0\omega}{m_0}\right) = \widehat{y}_{n_0}^{h_0}$.

Аналогічно попереднім міркуванням, отримаємо:

$$\left|\widehat{y}_k^{h_0} - x_k^{h_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k \in [n_0, 2n_0]$$

$$\left|\widehat{y}_{2n_0}^{h_0} - x_{2n_0}^{h_0}\right| < \frac{\delta}{2}$$

та

$$\left|x_k^{h_0} - \varphi(kh_0)\right| < \varepsilon, \qquad k \in [n_0, 2n_0]$$

$$\left|x_{2n_0}^{h_0} - \varphi(2n_0h_0)\right| < \delta.$$

Продовжуючи цей процес, на M - кроці, де M – найменше спільне кратне чисел m_0, n_0, p, отримаємо, що

$$\left|x_M^{h_0} - \varphi(Mh_0)\right| < \delta.$$

Причому $Mh_0 := M^0 = r\omega$ - кратне ω. Звідси випливає

$$\left|x_M^{h_0} - \varphi(r\omega)\right| < \delta.$$

Але $x_M^{h_0} = x_0^{h_0}$, тому відображення $\pi : y_0 \longrightarrow \varphi(r\omega, y_0)$ кулю радіуса δ переводить в себе, отже існує $y_1 \in U_\delta(x_0^{h_0})$ – нерухома точка відображення така, що $\varphi(r\omega, y_1) = y_1$. Останнє означає, що розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $\varphi(0) = y_1$ – періодичний з періодом $r\omega$.

Теорема доведена.

Наступний результат дає умови збіжності періодичних розв'язків системи (2) до періодичного розв'язку системи (1).

Теорема 3. *Якщо, при виконанні умов теореми 2, система (1) має єдиний періодичний розв'язок $\varphi(t)$ періоду $s\omega$, s – ціле, то має місце співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\leq n}\left|x_m^h\left(\frac{ms\omega}{n}\right)-\varphi\left(\frac{ms\omega}{n}\right)\right|=0, \tag{17}$$

де x_m^h – періодичний розв'язок системи (2), $h=\frac{s\omega}{n}$ – крок.

Доведення. Для доведення справедливості співвідношення (17), достатньо показати, що для довільного $\varepsilon>0$ існує h_0 (існує $n_0: h_0=\frac{s\omega}{n_0}$), що якщо $h<h_0$ $(n>n_0)$, то має місце нерівність

$$\left|\varphi\left(\frac{s\omega}{n}k\right)-x_k^h\left(\frac{s\omega}{n}k\right)\right|<\varepsilon, \qquad k\leq n. \tag{18}$$

Згідно попередній теоремі, система (2) для всіх достатньо малих h має періодичний розв'язок, причому для вказаного вище $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, існує $h_0=h_0(\delta)$, що при $h<h_0$, в δ - околі x_0^h, де x_k^h – періодичний розв'язок системи (2), починається деякий періодичний розв'язок $\varphi(t)$ системи (1), який у вузлових точках відрізняється від відповідного періодичного розв'язку x_k^h не більше ніж на ε при всіх $h<h_0$. Звідси, в силу єдиності періодичного розв'язку $\varphi(t)$ системи (1) випливає виконання нерівності (18), а відтак і доведення теореми.

Література

[1] *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. - Под ред. Ю. А.Митропольского. К., Наук.думка, 1972.-246 с.

[2] *Карасик Г. Я.* О сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным //Научн. доклады в. ш. физ.-мат. науки.-1958.-№4.-с.43-46.

[3] *Скалкина М. А.* О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений. - ПММ, 1955.-Т.19-вып. 3.

[4] *Ateiwi A. M.* To the problem on periodik solutions of one class of systems of difference equations //Укр. мат. журн.-1997.-49, №2.-с.309-314.

[5] *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.-М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986.- 744 с.