ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НА МЕЖІ ПІВПЛОЩИНИ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ, МЕЖА ЯКОГО ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНА, ПІД ТИСКОМ ШТАМПУ

О.А. Звьоздочкіна, В.В. Лисенко
Запорізький державний університет

1. Вступ

Сьогодні в механіці деформівного твердого тіла практично для всіх класів задач про вдавлювання жорстких штампів в однорідну пружну напівнескінченну область одержані аналітичні розв’язки [1, 2]. Однак математичне моделювання природничих процесів приводить до розрахункових схем, що містять фактори, які ускладнюють розв’язання задач, зокрема жорсткі включення тіла, складні типи крайових умов та ін. Для розв’язання даного класу задач використовують різні чисельні методи [3-4]. При цьому дослідники обмежують напівнескінченну область і на нову межу переносять умови, що повинні виконуватися на нескінченності. Таким чином одержують нову, але спрощену, модель для поставленої задачі, для якої використовують чисельні методи у класичному вигляді. Але при розв’язанні задач для нової області виникає проблема впливу штучно введеного контуру. В роботі наведений розв’язок задачі методикою, що дозволяє уникнути таких недоліків і зменшити вплив штучно введеного контуру за допомогою аналітичного розв’язку задачі Фламана.

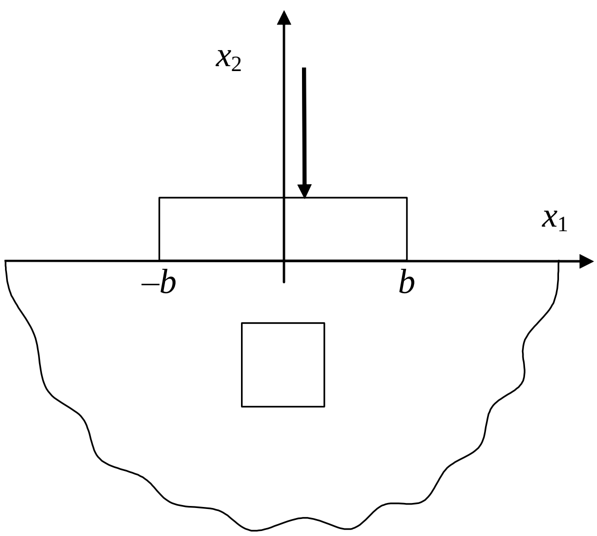

Рис. 1 Задача про вдавлювання штампа

2. Постановка задачі

Розглянемо пружну задачу про вдавлювання штампа із мастилом без тертя у напівнескінченну багатозв’язну область з такими крайовими умовами: на скінченній ділянці прямолінійної межі області задані переміщення, решта межі вільна від зусиль. Усередині тіла є квадратний отвір, межа якого жорстко защемлена (рис. 1).

Визначення напружено-деформованого стану розглянутої області зводиться до розв'язання рівнянь Ламе [5]:

$$G\Delta u_j + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{1}$$

де j = 1,2; ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль пружності при зсуві.

При цьому задані такі крайові умови: під штампом – $u_2 = -\tilde{u}$, $\sigma_{12} = 0$; на частині межі півплощини, що залишилася, – $\sigma_{ij} = 0,\quad i, j = 1,2$ та на межі квадратного отвору $u_j = 0,\ j = 1,2$.

3. Методика розв'язання задачі

Для розв'язання поставленої задачі використовувався чисельно-аналітичний метод крайових елементів. Як відомо [6], загальний вигляд інтегрального рівняння є таким:

$$\begin{gathered} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_\Gamma p*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \\ = \int_\Gamma u*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_\Omega u_{ij}(\xi,x)b_j(x)d\Omega(x),\ \ \xi\in\Gamma \end{gathered}, \tag{2}$$

де функції $c_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2}$; δ_{ij} – символ Кронекера; $u*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальний розв'язок Кельвіна для площини; $p*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальні напруження; $r = r(\xi,x)$ – відстань між точкою ξ, до якої прикладається навантаження, і деякою точкою x площини.

Розроблена методика, що дозволяє зменшити вплив введеного контуру шляхом вираження частини невідомих на штучно введеному контурі через невідомі на прямолінійній межі області за допомогою аналітичного розв'язку задачі про розподілене навантаження на межі півплощини, описана в роботі [7]. Для поставленої задачі інтегральне представлення має вигляд:

$$\begin{gathered} c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma-\Gamma_5)u_j(\xi) + \int_\Gamma \hat{p}*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \\ = \int_\Gamma \hat{u}*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x) + \hat{b}_i(\xi) \end{gathered}, \tag{3}$$

де

$$\hat{p}*_{ij}(\xi,x) = \Theta(\xi,\Gamma-\Gamma_5)p*_{ij}(\xi,x),$$

$$\hat{u}*_{ij}(\xi,x)=\left(u*_{ij}(\xi,x)-\delta_{j2}\Theta(\xi,\Gamma_1\cup\Gamma_2)\left(\int_{\Gamma_5}p*_{ij}(\xi,y)F_j(y,x)d\Gamma(y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma_5)F_j(\xi,x)\right)\right),$$

$$\hat{b}_i(\xi)=-\int_{\Gamma_3}\left(\int_{\Gamma_5}p*_{ij}(\xi,y)F_j(y,x)d\Gamma(y)+c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma_5)F_j(\xi,x)\right)p_2(x)d\Gamma(x),$$

$$\Theta(\zeta,S)=\begin{cases}1, & \text{якщо } \zeta\in \mathrm{S},\\ 0, & \text{якщо } \zeta\notin \mathrm{S},\end{cases},$$

де F_i – підінтегральні вирази аналітичного розв'язку задачі про розподілене навантаження [8], Γ – вся межа розглянутої області, Γ_5 – межа штучно введеного контуру.

На відміну від інтегрального рівняння (2) в інтегральному співвідношенні (3) з'явився доданок $\hat{b}_i(\xi)$, який для даної задачі дорівнює нулю, але може враховувати навантаження, задане в будь-які точці прямолінійної межі напівнескінченної області.

При розв'язанні рівняння (3) використовувалась класична схема методу крайових елементів: дискретизація меж багатозв'язаної області та зведення методом колокацій до повної системи алгебраїчних рівнянь. Після визначення невідомих розв'язок для внутрішньої області будується за формулою (3). У необмеженій частині області – за формулою аналітичного розв'язку задачі про розподілене навантаження на межі півплощини [8].

4. Дослідження напруженого стану області з квадратним отвором різних розмірів під дією штампа

Для поставленої задачі проведені чисельні дослідження розподілу нормальних напружень під штампом, що вдавлюється у багатозв'язну напівнескінченну область з квадратним отвором в залежності від розташування отвору щодо штампа. На рис. 2 та у табл. 1 для різних значень відстані між центром отвору і прямолінійною межею наведені графіки та значення напружень під штампом, що порівнювалися з аналітичним розв'язком задачі про вдавлювання штампа у півплощину [9].

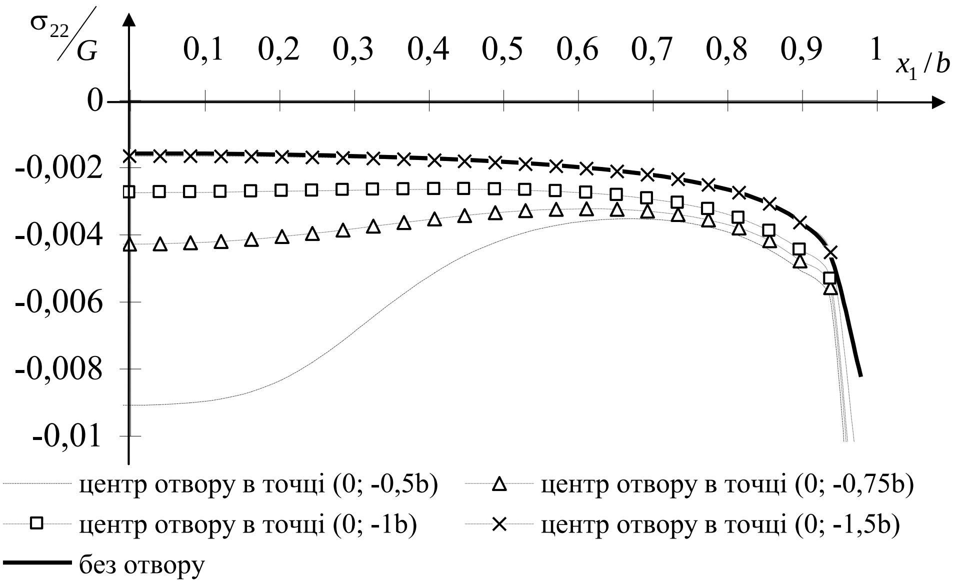

Рис. 2. Нормальні напруження під штампом

Таблиця 1. Значення напружень $\sigma_{22}/G \cdot 10^{-3}$ під штампом

x_1/b	Координати центра отвору				Без отвору
	$(0; -0{,}5b)$	$(0; -0{,}75b)$	$(0; -1b)$	$(0; -1{,}5b)$	
0	-9,10	-4,30	-2,76	-1,68	-1,60
0,081	-9,03	-4,26	-2,76	-1,68	-1,61
0,163	-8,70	-4,15	-2,74	-1,69	-1,62
0,244	-7,82	-3,98	-2,71	-1,72	-1,65
0,326	-6,46	-3,77	-2,68	-1,75	-1,70
0,408	-5,16	-3,55	-2,67	-1,80	-1,76
0,489	-4,25	-3,36	-2,68	-1,87	-1,84
0,571	-3,74	-3,26	-2,73	-1,98	-1,95
0,653	-3,55	-3,26	-2,85	-2,13	-2,12
0,734	-3,63	-3,41	-3,08	-2,37	-2,36
0,816	-4,05	-3,82	-3,53	-2,77	-2,77
0,897	-5,08	-4,8	-4,48	-3,66	-3,64
0,979	-17,19	-15,66	-14,87	-12,02	-8,26

5. Висновки

З одержаних результатів слідує, що віддалення отвору з жорстко защемленою межею від прямолінійної межі області приводить до зниження напружень під штампом. Причому зміщення центра отвору на $0{,}25b$ вглиб області привело відразу до різкого зниження нормальних напружень приблизно у 2 рази. Після віддалення центра отвору ще на $0{,}25b$ напруження під штампом знизилися у 1,6 рази в порівнянні з попередніми. При наступному зміщенні отвору вже на $0{,}5b$ призвело до практичного збігу напружень під штампом, отриманих для багатозв'язної області та півплощини.

Отже, якщо різниця між розв'язком для півплощини й отриманим розв'язком для багатозв'язної напівнескінченної області з отвором, центр якого знаходиться в точці $(0,-0{,}5b)$, склала приблизно 470% в т. (0; 0), то в останньому випадку – 4%. Тобто при дослідженні напружено-деформованого стану розглянутої області доведено, що у граничному випадку за допомогою розробленої методики одержаний розв'язок, що практично співпадає з аналітичним розв'язком [9].

6. Література

1. Калоеров С.А. Решение основных задач теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1998. – Вып. 28. – С. 157-171.
2. Кузьменко В.І. Вступ до методу скінчених елементів. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2002. – 84 с.
3. Алейников С.М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно-неоднородных оснований. – М.: Ассоциация строит. вузов, 2000. – 754 с.
4. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
6. Звьоздочкіна О.А., Толок В.О. Про один метод розв'язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісник Державного університету "Львівська політехніка". Сер. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 172-175.
7. Крауч С., Старфилд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела. – М., 1987. – 328 с.
8. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. – М., 1961. – 667 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕННОГО СТАНУ НА МЕЖІ ПІВПЛОЩИНИ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ, МЕЖА ЯКОГО ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНА, ПІД ТИСКОМ ШТАМПУ

О.А. Звьоздочкіна, В.В. Лисенко

В роботі представлені дослідження напружено-деформованого стану багатозв'язаної напівнескінченної пружної однорідної області в залежності від розташування квадратного отвору щодо прямолінійної межі, в яку вдавлюється штамп. При розв'язанні застосована чисельно-аналітична методика, побудована на методі крайових елементів та аналітичному розв'язку задачі Фламана. Дослідження проведені для граничного випадку у порівнянні з аналітичним розв'язком задачі про вдавлювання штампу у півплощину.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ГРАНИЦА КОТОРОГО ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕНА, ПОД ДАВЛЕНИЕМ ШТАМПА

Е.А. Звездочкина, В.В. Лысенко

В работе представлены исследования напряженно-деформированного состояния многосвязной полубесконечной упругой однородной области в зависимости от расположения квадратного отверстия относительно прямолинейной границы, в которую вдавливается штамп. При решении применена численно-аналитическая методика, построенная на методе граничных элементов и аналитическом решении задачи Фламана. Исследования проведены для предельного случая в сравнении с аналитическим решением задачи о вдавливании штампа в полуплоскость.

THE RESEARCH OF STATE OF STRESS ON BOUNDARY LINE OF THE HALF-PLANE WITH SQUARE HOLE WITH CLAMPED BOUNDARY UNDER PRESSURE OF THE PUNCH

Ye.A. Zvyozdochkina, V.V. Lysenko

In this paper strainly-deformed state of multiply connected semi-infinite elastic uniform domain with the square hole with clamped boundary is investigated. Considered domain is under the pressure of the punch. Numerically-analytical technique based on the BEM and Flaman's solution is applied to the problem. Obtained solutions compare well with known analytical solution of the contact problem of a punch with a half-plane.