УДК 336.762.3

Ю.А. Толбатов, канд. техн. наук
Н.С. Скопенко

ПРОБЛЕМА ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

З розвитком ринку цінних паперів постає питання оптимального розміщення інвестиційних коштів, тому потрібно застосовувати засоби економіко-математичного моделювання і дослідження операцій до проблеми формування портфеля цінних паперів (ПЦП) та управління ним.

Вкладаючи кошти в цінні папери, інвестори зацікавлені в дохідності, ліквідності та безпеці своїх вкладень. Вибрати найкращий варіант інвестування, який враховує привабливість цінних паперів і вимоги інвестора, допомагає моделювання оптимального портфеля цінних паперів.

Розглянемо процес моделювання оптимального інвестиційного портфеля за різними критеріями.

Позначимо через r_i дохідність i-го цінного паперу. Вона визначається за формулою

$$r_i = \frac{C_{1i} - C_{0i}}{C_{0i}},$$

де C_{0i} – ціна ЦП в початковий період; C_{1i} – ринкова вартість ЦП в кінцевий період.

Якою буде майбутня дохідність цінного паперу, з певністю сказати неможливо, тому для кожного виду ЦП вона вважається випадковою величиною і в моделі враховується її очікуване значення.

Дохідність портфеля цінних паперів визначається за формулою

$$r_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0},$$

де W_0 – сукупна ціна цінних паперів портфеля в початковий період; W_1 – сукупна ринкова вартість ЦП в кінцевий період.

Припустимо, що портфель утворюється n видами ЦП. Позначимо через x_i частку i-го цінного паперу у портфелі. Тоді має виконуватися умова

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0.$$

Якщо відома дохідність кожного цінного паперу, котрий входить до складу інвестиційного портфеля, то дохідність ПЦП можна визначити за формулою

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i.$$

Ризик такого ПЦП оцінюється середньоквадратичним відхиленням, обчисленим на основі коваріацій його дохідності:

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оптимізація структури ПЦП визначається критерієм оптимальності, який обумовлено метою суб'єкта. Розглянемо декілька критеріїв оптимізації інвестиційних портфелів.

Перший критерій.

Підхід Марковиця припускає, що інвестор вирішує дві проблеми при формуванні ПЦП:

а) максимізує очікувану дохідність при заданому рівні ризику s_1, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ \ x_1 \geq 0,$$

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1,$$

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \Rightarrow \max;$$

б) мінімізує ризик при заданому рівні очікуваної дохідності r_2, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ x_1 \geq 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = r_2,$$

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min.$$

Другий критерій:

а) максимізація очікуваної дохідності при ризику, не більшому, ніж заданий:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_1,$$

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \Rightarrow \max;$$

б) мінімізація ризику за умови, що дохідність буде не меншою, ніж задана r_2, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \geq r_2,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min.$$

Складність і неоднозначність наведених задач полягає у заданні меж ризику і дохідності.

Третій критерій.

Оскільки інвестора цікавить максимальний дохід при мінімальному ризику, то розглянемо відношення очікуваної дохідності до ризику і поставимо вимогу, щоб це відношення було максимальним. Математична модель матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{1/2}} \Rightarrow \max.$$

Четвертий критерій.

Припустимо, що норма доходу портфеля цінних паперів при нульовому ризику дорівнює r_f (ставка доходу ПЦП, складеного з безризикових цінних паперів). Для цього випадку оптимальна структура ПЦП визначається з умови

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - r_f}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \max.$$

П'ятий критерій.

Розглянемо однофакторну модель Шарпа. Шарп запропонував розглядати дохідність i-го цінного паперу як стохастичну лінійну залежність від дохідності ринкового індексу:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_I + \varepsilon_i,$$

де r_i – дохідність i-го цінного паперу за даний період; α_i і β_i – оцінювані параметри лінійної регресії; r_I – індексна дохідність ринку; ε_i – випадкова складова рівняння регресії.

Параметр β_i прийнято називати «бета»-коефіцієнтом і він вказує, на скільки одиниць зміниться дохідність i-го ЦП при зміні індексу доходу ринку на 1 одиницю. Якщо $\beta_i>0$, то цінний папір називають агресивним, при $\beta_i<0$ – ЦП називають оборонним.

Безризикову ставку доходу для портфеля цінних паперів зобразимо у вигляді

$$r_f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

За критерій оптимізації ПЦП візьмемо максимізацію відношення

$$\frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \Rightarrow \max.$$

Оскільки

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i,$$

$$r_f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

то

$$r_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i - \alpha_i) x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\beta_i x_i) r_I = r_I - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

У даному випадку модель оптимізації ПЦП буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

$$\frac{r_I \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \max.$$

Вираз $\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ прийнято називати «бета»-коефіцієнтом ПЦП.

Шостий критерій.

Розглянемо ще одну модель Марковиця. Вона полягає у визначенні «кутових» інвестиційних портфелів. Спочатку визначають ПЦП з найбільшою очікуваною дохідністю. Як правило, він складається з одного ЦП з найбільшою очікуваною дохідністю. Цей портфель прийнято називати «кутовим» портфелем. Потім визначають другий кутовий портфель за умови, що дохідність його менша, ніж дохідність першого. Оптимальний портфель визначають як лінійну комбінацію кутових портфелів. Така модель оптимізації має недолік: неоднозначне визначення оптимального ПЦП.

Наведені вище критерії оптимальності враховують різні цілі інвестора. В кожному випадку отримаємо свій оптимальний портфель цінних паперів.

Розглянемо розв'язання задачі оптимізації портфеля ЦП за одним з обраних критеріїв за допомогою таблиць Excel.

Зниження ризику − основна мета обережних інвесторів на ринку цінних паперів. Проте більшість інвесторів також прагне отримати прибуток, не менший ніж заданий, на одиницю вкладених коштів.

Моделювання оптимального портфеля цінних паперів у даному випадку має на меті виявити і найліпшим чином використати обернену залежність змін курсової вартості, щоб забезпечити інвестору отримання бажаної дохідності з найменшим ризиком. Тобто, якщо курс одного паперу і впаде, то іншого − зросте і, отже, небажаний ризик втрат можна зменшити.

Нехай обсяг капіталу, який може вкласти інвестор у цінні папери, дорівнює d. Портфель ЦП утворюється з n видів паперів. Треба знайти такі значення часток ЦП у портфелі цього інвестора, при яких ризик буде мінімальний. Позначимо частку i-го ЦП через x_i, тоді для всіх часток буде виконуватися умова

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

при $x_i \geq 0$ $(i=1, n)$.

Нехай α_i − очікуваний прибуток на одиницю грошових коштів, вкладених в i-й цінний папір, b - величина прибутку інвестора на одиницю вкладених коштів, тоді можна ввести обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq b.$$

Таким чином, з урахуванням усіх обмежень, математична модель оптимізації інвестиційного портфеля буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i = 1, \overline{n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq b,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min.$$

Функцію мети $\sigma_p \Rightarrow \min$ можна замінити на $\sigma^2_p \Rightarrow \min$.

Розглянемо розв'язування наведеної задачі з використанням програми "Поиск решения". Нехай інвестор бажає вкласти кошти в три види ЦП. Позначимо частки цих вкладів відповідно через x_1, x_2, x_3. Знайдемо коваріаційну матрицю (табл. 1). Параметри α_1, α_2, α_3 задані в проміжку комірок A11:C11, а значення b=0,273 − в комірці F7. Для розв'язування задачі вихідні дані наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні дані

№	A	B	C	D	E	F
1			Змінні			
2		X_1	X_2	X_3		
3	Значення змінних	0,333	0,333	0,333		
5			Залежність			
6	Функція ризику		0,2079		Min	
7	Прибуток на одиницю вкладених коштів		0,2765		>=	0,273
8	Обмеження часток		0,99999		=	1
10	α_1	α_2	α_3	Коваріаційна матриця		
11	0,27	0,23	0,315	0,35	0,15	0,07
12	b	0,273		0,15	0,39	0,16
13				0,07	0,16	0,41

Значення змінних (часток) помістимо в комірках B3:D3 і задамо їм початкові значення $x_i=1/n$, де n=3, тобто приймемо, що інвестиційні кошти розділено пропорційно між усіма цінними паперами: $x_1=x_2=x_3=0,333$; $x_1+x_2+x_3=1$.

Використовуючи програму «Поиск решения», дістанемо розв'язок (табл. 2).

Таблиця 2

Отримані результати

№	A	B	C	D	E	F
1			Змінні			
2		X_1	X_2	X_3		
3	Значення змінних	0,4277	0,2268	0,3455		
...						
10	α_1	α_2	α_3	Коваріаційна матриця		
11	0,27	0,23	0,315	0,35	0,15	0,07
12	b	0.273		0,15	0,39	0,16
13				0,07	0,16	0,41

Для наведених даних ризик буде мінімальним, якщо вкладені кошти будуть розподілятися між цінними паперами таким чином:

$$x_1=0,427;\ x_2=0,227;\ x_3=0,345.$$

Висновки. Оптимізація інвестиційного портфеля передбачає підбір такої сукупності цінних паперів, яка забезпечить інвестору здійснення його цілей. Розв'язати таку задачу доцільно за допомогою економіко-математичного моделювання. Оптимізацію структури ПЦП можна проводити за різними критеріями. Наведений приклад розв'язання задачі оптимізації дав змогу зробити висновок про те, що одним з основних факторів при виборі оптимального ПЦП є мінімізація ризику.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вагнер Г.* Основы исследований операций / Пер. с англ. В.Я. Алтаева. − В 2 т. − М.: Мир, 1973. − Т. 2.

2. *Линейное* и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. − К.: Вища шк. Головное изд-во, 1975.

3. *Мазаракі А.А., Толбатов Ю.А.* Математичне програмування в Excel. − К.: Четверта хвиля, 1998.

4. *Рынок* ценных бумаг и его финансовые институты / Под. ред. В.С. Торкановского. − Спб.: АО "Комплект", 1994.

5. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции / Пер. с англ. − М.: ИНФА, 1997.

Надійшла до редколегії 29.06.98 р.