“Вісник Київського університету”
Серія фізико-математичні науки.
Випуск № 4 2002 р.

УДК 517.9:519.46

Юрик І.І., канд. фіз.-мат. наук, доц.

ПРО ТОЧНІ РОЗ’ЯЗКИ РІВНЯННЯ $u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2 + s_0$

Побудовані широкі класи точних розв’язків нелінійного багатовимірного рівняння $u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2 + s_0$.

Yuryk I.I., cand. phys.-math. sci., docent

ON EXACT SOLUTIONS OF EQUATION $u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2 + s_0$

Wide classes of exact solutions of nonlinear multidimensional equation $u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2 + s_0$ *are constructed.*

Дана стаття присвячена побудові точних розв’язків багатовимірного рівняння

$$u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2 + s_0, \tag{1}$$

де $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$, s_0, r — довільні числа,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad (\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Для побудови розв’язків рівняння (1) ми використовуємо метод відокремлення змінних. Отримані розв’язки узагальнюють результати робіт [1, 2].

Розв’язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді $u = a(x_1, \ldots, x_m) + b(t)$, $m = 1, \ldots, n$. Підставивши в рівняння (1), отримаємо

$$b' - b\Delta a - a\Delta A - r(\nabla a)^2 - s_0 = 0. \tag{2}$$

З рівняння (2) випливає, що функції 1, b, b' лінійно залежні, а тому

$$b' = \sigma b + b, \qquad \sigma, p \in R. \tag{3}$$

Підставивши (3) в (2), знаходимо

$$(\sigma - \Delta a)b - a\Delta a - r(\nabla a)^2 - s_0 + p = 0.$$

Тому

$$\Delta a = \sigma, \qquad a\Delta a + r(\nabla a)^2 + s_0 - p = 0. \tag{4}$$

Нехай $\sigma \neq 0$. Розв'язок системи (4) шукаємо у вигляді

$$a = \lambda\left[(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2\right].$$

Тоді

$$\Delta a = 2m\lambda, \qquad (\nabla a)^2 = 4\lambda a,$$

а тому

$$2m\lambda a + 4\lambda r a + s_0 - p = 0,$$

Звідси $m + 2r = 0$, $p = s_0$. Отже, $\lambda = \dfrac{\sigma}{2m}$,

$$a = \frac{\sigma}{2m}\left[(x_1 + k_1)^2 + \cdots (x_m + k_m)^2\right].$$

Оскільки $b' = \sigma b + s_0$, то

$$b = c\exp(\sigma t) - \frac{s_0}{\sigma}.$$

Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (1) для $r = -\dfrac{m}{2}$:

$$u = \frac{\sigma}{2m}\left[(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2\right] + c\exp(\sigma t) - \frac{s_0}{\sigma}. \tag{5}$$

Якщо $m = 1$, то $r = -\dfrac{1}{2}$, і розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \frac{\sigma}{2}(x_1 + k_1)^2 + c\exp(\sigma t) - \frac{s_0}{\sigma}.$$

Якщо $m = 2$, то $r = -\dfrac{3}{2}$, і розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \frac{\sigma}{4}\left[(x_1 + k_1)^2 + (x_2 + k_2)^2\right] + c\exp(\sigma t) - \frac{s_0}{\sigma}.$$

Якщо $m = 3$,

то $\frac{3}{2}$

і розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \frac{\sigma}{6}\left[(x_1 + k_1)^2 + (x_2 + k_2)^2 + (x_3 + k_3)^2\right] + c\exp(\sigma t) - \frac{s_0}{\sigma}.$$

Розглянемо частинний випадок рівняння (1)

$$u_t = u\Delta u + r(\nabla u)^2. \tag{6}$$

Розв'язок рівняння (6) шукаємо у вигляді $u = a(x_1,\ldots,x_m)b(t)$, $m = 1,2,\ldots,n$. Підставивши в рівняння (6), отримуємо

$$ab' = ab^2\Delta a + rb^2(\nabla a)^2. \tag{7}$$

З рівняння (7) випливає, що $b' = \alpha b^2$, $\alpha \in R$, а тому

$$a\Delta a + r(\nabla a)^2 = \alpha a. \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$a = \lambda\left[(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2\right].$$

Маємо $2m\lambda a + 4r\lambda a = \alpha a$, а тому $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m + 4r}$. Оскільки $b' = \alpha b^2$, то $b = -\dfrac{1}{\alpha(t + k_0)}$. Отже,

$$u = -\frac{(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2}{(2m + 4r)(t + k_0)}. \qquad (9)$$

Побудуємо тепер більш загальний розв'язок рівняння (6). Цей розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u = -\frac{(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2}{(2m + 4r)(t + k_0)} + f(t, x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Підставивши в рівняння (6), отримуємо

$$f_t = -\frac{(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2}{(2m + 4r)(t + k_0)} \Delta f - \frac{m}{(m + 2r)(t + k_0)} f + f\Delta f + r(\nabla f)^2.$$

Якщо $f = f(t)$, то $\Delta f = 0$, $(\nabla f)^2 = 0$, а тому

$$f_t = -\frac{m}{(m + 2r)(t + k_0)} f. \qquad (10)$$

Інтегруючи рівняння (10), знаходимо

$$f = c(t + k_0)^{-m/(m+2r)}, \ c \text{ — довільна стала.}$$

Отримуємо наступний розв'язок рівняння (6)

$$u = -\frac{(x_1 + k_1)^2 + \cdots + (x_m + k_m)^2}{(2m + 4r)(t + k_0)} + c(t + k_0)^{-m/(m+2r)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

У випадку $f = f(t, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ матимемо систему

$$\begin{aligned} &f_t = -\frac{m}{(m + 2r)(t + k_0)} f + r(\nabla f)^2, \\ &\Delta f = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Розв'язок системи (12) шукаємо у вигляді $f = k_{m+1}x_{m+1} + \cdots + k_n x_n + k_{n+1}$, де $k_{m+1}, \ldots, k_{n+1}$ є функціями від t, які необхідно визначити. Підставивши в перше рівняння системи (12), знаходимо

$$k_{m+1} = c_{m+1}(t + k_0)^{-m/(m+2r)}, \qquad \ldots, \qquad k_n = c_n(t + k_0)^{-m/(m+2r)},$$

$$k_{n+1} = \frac{m + 2r}{2}\left(c_{m+1}^2 + \cdots + c_n^2\right)(t + k_0)^{(2r-m)/(m+2r)}.$$

В результаті отримуємо наступний розв'язок рівняння (6):

$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+\cdots+(x_m+k_m)^2}{(2m+4r)(t+k_0)}+(c_{m+1}x_{m+1}+\cdots+c_nx_n+c_0)(t+k_0)^{-m/(m+2r)}+$$
$$+\frac{m+2r}{2}\left(c_{m+1}^2+\cdots+c_n^2\right)(t+k_0)^{(2r-m)/(m+2r)}.$$
Якщо $m=1$, $n=3$, то розв'язки рівняння (6) мають вигляд
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2}{(2+4r)(t+k_0)}+(c_2x_2+c_3x_3+c_0)(t+k_0)^{-1/(1+2r)}+$$
$$+\frac{1+2r}{2}\left(c_2^2+c_3^2\right)(t+k_0)^{(2r-1)/(2r+1)},\qquad r\neq-\frac{1}{2}.$$
Якщо $m=2$, $n=3$, то розв'язки рівняння (6) мають вигляд
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+(x_2+k_2)^2}{4(1+r)(t+k_0)}+(c_3x_3+c_0)(t+k_0)^{-1/(1+r)}+$$
$$+(1+r)c_3^2(t+k_0)^{(r-1)/(r+1)},\qquad r\neq-1.$$
Якщо $m=1$, $n=2$, то розв'язки рівняння (6) мають вигляд
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2}{(2+4r)(t+k_0)}+(c_2x_2+c_0)(t+k_0)^{-1/(1+2r)}+$$
$$+\frac{1+2r}{2}c_2^2(t+k_0)^{(2r-1)/(2r+1)},\qquad r\neq-\frac{1}{2}.$$
Повернемося знову до рівняння (1). Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+\cdots+(x_m+k_m)^2}{(2m+4r)(t+k_0)}+f(t),\qquad m=1,\ldots,n.$$
Підставивши в рівняння (1), отримуємо
$$f_t=-\frac{m}{(m+2r)(t+k_0)}f+s_0. \tag{13}$$
Розв'язуючи рівняння (13), знаходимо
$$f=s_0(t+k_0)\ln|t+k_0|+m_0(t+k_0),\ \text{якщо}\ m+r=0;$$
$$f=\frac{s_0(m+2r)}{2(m+r)}(t+k_0)+m_0(t+k_0)^{-m/(m+2r)},\ \text{якщо}\ m+r\neq0.$$
В результаті отримуємо такі розв'язки рівняння (1):
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+\cdots+(x_m+k_m)^2}{(2m+4r)(t+k_0)}+s_0(t+k_0)\ln|t+k_0|+m_0(t+k_0),$$
якщо $m+r=0$, $2m+4r\neq0$;
$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+\cdots+(x_m+k_m)^2}{(2m+4r)(t+k_0)}+\frac{s_0(m+2r)}{2(m+r)}(t+k_0)+m_0(t+k_0)^{-m/(m+2r)},$$
якщо $m+r\neq0$, $2m+4r\neq0$.

У випадку $m=1$ розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$u=\frac{(x_1+k_1)^2}{2(t+k_0)}+s_0(t+k_0)\ln|t+k_0|+m_0(t+k_0),\text{ якщо } r=-1;$$

$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2}{(2+4r)(t+k_0)}+\frac{s_0(1+2r)}{2(1+r)}(t+k_0)+m_0(t+k_0)^{-1/(1+2r)},\text{ якщо } r\neq-1,\ r\neq-\frac{1}{2}.$$

У випадку $m=2$ розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$u=\frac{(x_1+k_1)^2+(x_2+k_2)^2}{4(t+k_0)}+s_0(t+k_0)\ln|t+k_0|+m_0(t+k_0),\text{ якщо } r=-2;$$

$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+(x_2+k_2)^2}{4(1+r)(t+k_0)}+\frac{s_0(1+r)}{2+r}(t+k_0)+m_0(t+k_0)^{-2/(2+r)},$$

$$\text{якщо } r\neq-1,\ r\neq-2.$$

У випадку $m=3$ розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$u=\frac{(x_1+k_1)^2+(x_2+k_2)^2+(x_3+k_3)^2}{6(t+k_0)}+s_0(t+k_0)\ln|t+k_0|+m_0(t+k_0),$$

$$\text{якщо } r=-3;$$

$$u=-\frac{(x_1+k_1)^2+(x_2+k_2)^2+(x_3+k_3)^2}{(6+4r)(t+k_0)}+\frac{s_0(3+2r)}{2(3+r)}(t+k_0)+m_0(t+k_0)^{-3/(3+2r)},$$

$$\text{якщо } r\neq-3,\ r\neq-\frac{3}{2}.$$

1. Barannyk A.F., Yuryk I.I. Separation of variables and construction of exact solutions of nonlienar wave equations // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2000. — Vol. 30, Part 1. — P. 73–82.
2. Cherniha R.M. New exact solutions of nonlinear reaction-diffusion equations // Reports on Math. Phys. — 1998. — Vol. 41. — P. 333–349.

Надійшло до редакції 10.10.2002.