Український математичний вісник
Том 9 **(2012)**, № 1, 114 – 124

Об оценках сингулярных чисел интегрального оператора Гильберта–Шмидта

Елена И. Радзиевская

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. Работа посвящена оценкам сингулярных чисел интегрального оператора через модули непрерывности его ядра.

2010 MSC. 47B50, 46C20.

Ключевые слова и фразы. Сингулярные числа, интегральный оператор, модуль непрерывности.

1. Введение

Рассмотрим в $L_2[0;1]$ интегральный оператор

$$(Af)(t) := \int_0^1 a(t,s)f(s)\,ds, \quad f \in L_2[0;1], \tag{1.1}$$

с ядром Гильберта–Шмидта, т.е. $a(t,s)$ измеримая на $[0;1]\times[0;1]$ функция с суммируемым квадратом,

$$\int_0^1 \int_0^1 |a(t,s)|^2\,dt\,ds < \infty.$$

Данная работа посвящена оценкам сингулярных чисел (s-чисел) оператора A. В первой теореме эти оценки установлены в терминах первого интегрального модуля непрерывности, а во второй — при дополнительных ограничениях на область значений оператора A аналогичные оценки получены в терминах равномерных модулей непрерывности высшего порядка.

В пункте 2 будут сформулированы основные результаты этой работы, а их доказательства будут приведены в пункте 3.

Статья поступила в редакцию 9.09.2011

2. Формулировка основных результатов и следствий из них

Введем используемые далее обозначения. Пусть A — компактный оператор в гильбертовом пространстве L_2. Как обычно, $\lambda_k(A)$ обозначают собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания их модулей; $s_k(A) = \sqrt{\lambda_k(AA^*)}$ — сингулярные числа (s-числа) оператора A, где A^* — оператор сопряженный к A.

Далее, равенством

$$\omega(\delta, a)_2 := \sup_{0\leq\ h\leq\delta} \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-h} |a(t+h,s) - a(t,s)|^2 \, dt \, ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \delta \leq 1 \tag{2.1}$$

определяется интегральный модуль непрерывности первого порядка ядра $a(t,s)$ оператора A.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Для s-чисел оператора A вида* (1.1) *имеет место оценка*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \leq 2\omega^2\Big(\frac{1}{r-1}, a\Big)_2, \quad r = 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

Приведем следствия из этой теоремы.

Следствие 2.1. *Для сингулярных чисел оператора A вида* (1.1) *справедлива оценка*

$$s_r(A) \leq 2r^{-\frac{1}{2}}\omega\Big(\Big[\frac{r}{2}\Big]^{-1}, a\Big)_2, \quad r = 2, 3, \ldots,$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа.

Доказательство. Для произвольного натурального числа $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$s_r^2(A) \leq 2r^{-1} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^{r} s_k^2(A).$$

Отсюда и из неравенства (2.2) получаем оценку

$$s_r^2(A) \leq 2r^{-1} \sum_{k=[\frac{r}{2}]+1}^{r} s_k^2(A) \leq 4r^{-1}\omega^2\Big(\Big[\frac{r}{2}\Big]^{-1}, a\Big)_2,$$

доказывающую следствие 2.1. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть* $\omega(\delta, a)_2 \le c\delta^\alpha$, $\delta \in [0,1]$, *для некоторых* $c > 0$ *и* $\alpha \in (0;1]$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(A) < \infty$$

при $p > 2(2\alpha+1)^{-1}$.

Следствие 2.2 непосредственно вытекает из следствия 2.1. При этом оно является уточнением следующей теоремы Фредгольма [2].

Теорема 2.2 ([2]). *Пусть* $|a(t,s_2) - a(t,s_1)| \le c|s_2 - s_1|^\alpha$, *где* c *не зависит от* $t \in [0;1]$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(A)|^p < \infty, \tag{2.3}$$

при $p > 2(2\alpha+1)^{-1}$.

Из следствия 2.2 получаем, что в теореме Фредгольма сходимость ряда (2.3) можно заменить сходимостью ряда из p-х степеней сингулярных чисел оператора A. Отметим, что вопрос о справедливости следствия 2.2 был поставлен в [1, гл. III, с. 153]. Впоследствии положительный ответ на этот вопрос был получен другими методами, например, в [3, теорема 2] и в следствии к теореме 3.1 из [5].

Далее, рассмотрим случай, когда область значений оператора A лежит в пространстве непрерывных функций и установим аналогичное теореме 2.1 утверждение для модуля непрерывности высшего порядка. Для этого введем понятие модуля непрерывности порядка $m = 1, 2, \ldots$ ядра $a(t,s)$.

Для каждого $0 \le \delta \le m^{-1}$. полагаем

$$\omega_m(\delta, a) := \sup_{\substack{f\in L_2,\\ \|f\|_2=1}} \ \sup_{0\le\ h\le\delta} \ \sup_{0\le\ t\le 1-hm} \left| \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \binom{m}{q} (Af)(t+hq) \right|. \tag{2.4}$$

Для $\delta > m^{-1}$ считаем, что $\omega_m(\delta, a) = \omega_m(m^{-1}, a)$.

Теорема 2.3. *Пусть область значений оператора* A *лежит в пространстве непрерывных функций, а* $m = 2, 3, \ldots$. *Тогда*

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\Big(\frac{2}{r}, a\Big), \quad r = m+1, m+2, \ldots \tag{2.5}$$

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть область значений оператора A лежит в пространстве непрерывных функций, и $m = 2, 3, \ldots$. Тогда*

$$s_r(A) \le \left(\frac{10m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_m\left(\frac{4}{r}, a\right), \quad r = m+1, m+2, \ldots \tag{2.6}$$

Доказательство. В случае $r \ge 2m$ вывод следствия 2.3 из теоремы 2.3 полностью повторяет вывод следствия 2.1 из теоремы 2.1. Пусть теперь $m + 1 \le r < 2m$. Используя неравенство (2.5), получаем

$$s_r^2(A) \le \sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\left(\frac{2}{r}, a\right) \le \frac{2m}{r} 25\omega_m^2\left(\frac{2}{r}, a\right),$$

из которой вытекает оценка (2.6) в случае $r < 2m$. □

Используя свойства модулей непрерывности (2.4), которые аналогичны соответствующим свойствам модулей непрерывности числовых функций, из следствия 2.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.4. *Пусть для некоторого натурального l область значений оператора A лежит в пространстве Соболева $W_2^l[0;1]$ и,*

$$\frac{d^l}{dt^l}(Af)(t) = \int_0^1 b(t,s) f(s)\, ds,$$

для любой $f \in Ł_2[0,1]$, где $b(t,s)$ измерима на единичном квадрате и

$$\int_0^1 \int_0^1 |b(t,s)|^2\, dt\, ds < \infty.$$

Тогда

$$s_r(A) \le \left(\frac{10(l+1)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{r}\right)^l \omega\left(\frac{4}{r}, b\right)_2.$$

Из следствия 2.4 вытекает, в частности, уточнение одного результата М. Г. Крейна. А именно, справедливо утверждение.

Следствие 2.5. *Пусть выполнены условия следствия 2.4. Тогда*

$$s_r(A) = o\left(\frac{1}{r^{l+\frac{1}{2}}}\right) \tag{2.7}$$

при $r \to \infty$.

Отметим, что условия следствия 2.5, при которых справедлива асимптотическая формула (2.7), менее ограничены, чем условия утверждения 4 из [1, с. 157]. Действительно, в следствии 2.5 требуется лишь слабая дифференцируемость ядра $a(t,s)$ по переменной t , рассматриваемого как вектор-функция от t со значениями в $L_2[0,1]$ (по переменной s), а в [1, с. 157] предполагается дифференцируемость этой вектор-функции по норме $L_2[0,1]$.

3. Доказательства теорем 2.1 и 2.3

Пусть $f(t)$ — вектор-функция, определенная на $[0;1]$, принимающая значения в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$.

Обозначим через $L_p(0,1;\mathfrak{B})$ банахово пространство сильно измеримых вектор-функций $f\colon[0,1]\to\mathfrak{B}$, для которых

$$\|f\|_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} = \left(\int\limits_0^1 \|f(t)\|_{\mathfrak{B}}^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1\le p<\infty,$$

(см., например, [6, с. 103]). Отметим, что если $f(t)$ сильно измеримая вектор-функция, то скалярная функция $\|f(t)\|_{\mathfrak{B}}$ измерима. Модуль непрерывности вектор-функции $f\in L_p(0,1;\mathfrak{B})$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} = \sup_{0\le\ h\le\delta}\left(\int\limits_0^{1-h} \|f(t+h)-f(t)\|_{\mathfrak{B}}^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0\le\delta\le1.$$

Приведем нужные в дальнейшем аналоги лемм 2 и 3 работы П. Л. Ульянова [4] для вектор-функции со значениями в банаховом пространстве.

Лемма 3.1. *Пусть* $f\in L_p(a,b;\mathfrak{B})$, $1\le p<\infty$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b \|f(x)-f(y)\|_{\mathfrak{B}}\,dx\,dy = 2\int\limits_0^{b-a}\left\{\int\limits_0^{b-u}\|f(y+u)-f(y)\|_{\mathfrak{B}}\,dy\right\}du.S$$

Лемма 3.2. *Пусть* $f\in L_p(0,1;\mathfrak{B})$, $1\le p<\infty$, *а для некоторого натурального* n *функции* ψ_n *определены равенствами*

$$\psi_n(t) = n\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}} f(\tau)\,d\tau, \quad \frac{l}{n}\le t<\frac{l+1}{n}, \quad l=0,\ldots,n-1.$$

Тогда

$$\|f-\psi_n\|_{L_p(0,1;\mathfrak{B})} \le 2^{\frac{1}{p}}\omega(\frac{1}{n},f)_{L_p(0,1;\mathfrak{B})}.$$

В скалярном случае эти утверждения были получены П. Л. Ульяновым. Доказательства в векторном случае аналогичны, но приведем их для полноты изложения.

Доказательство леммы 3.1. Так как скалярная функция $\|f(t)\|_{\mathfrak{B}}$ измерима, то производя замену переменных и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b \|f(x)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_a^b\left(\int\limits_{a-y}^{b-y}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,du\right)dy$$

$$= \int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_a^{b-u}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right)du$$

$$+ \int\limits_{a-b}^{0}\left(\int\limits_{a-u}^{b}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right)du$$

$$= \int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_a^{b-u}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right)du$$

$$+ \int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_{a+v}^{b}\|f(y-v)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right)dv$$

$$= \int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_a^{b-u}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,du\right)dy$$

$$+ \int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_a^{b-v}\|f(t)-f(t+v)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dt\right)dv$$

$$= 2\int\limits_0^{b-a}\left(\int\limits_a^{b-u}\|f(y+u)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right)du.$$

Лемма 3.1 доказана. □

Доказательство леммы 3.2. Функция $\psi_n(t)$ счетнозначная, поэтому вектор-функция $f(t)-\psi_n(t)$ сильно измерима на $[0;1]$ а скалярная функция $\|f(t)-\psi_n(t)\|_{\mathfrak{B}}$ измерима.

Используя лемму 3.1 и неравенство Гельдера, получаем

$$\|f-\psi_n\|^p_{L_p(0,1;\mathfrak{B})}=\int\limits_0^1\|f(t)-\psi_n(t)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dt=\sum_{l=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\|f(t)-\psi_n(t)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dt$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}\left\{\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\left\|f(t)-n\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}f(\tau)\,d\tau\right\|^p_{\mathfrak{B}}\right\}dt$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\left\{\left\|n\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}(f(t)-f(\tau))\,d\tau\right\|^p_{\mathfrak{B}}\right\}dt$$

$$\leq n^p\sum_{l=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\|f(t)-f(\tau)\|^p_{\mathfrak{B}}\,d\tau\left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}dt$$

$$=2n\sum_{l=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\left\{\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}-\xi}\|f(y+\xi)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right\}d\xi$$

$$=2n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}-\xi}\|f(y+\xi)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\,d\xi$$

$$\leq 2n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\left\{\int\limits_0^{1-\xi}\|f(y+\xi)-f(y)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dy\right\}d\xi$$

$$\leq 2n\int\limits_0^{\frac{l}{n}}\omega(\xi,f)^p_{L_p(0,1;\mathfrak{B})}\,d\xi\leq 2\omega\left(\frac{1}{n},f\right)^p_{L_p(0,1;\mathfrak{B})}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы 3.2. □

Теперь перейдем к доказательству приведенных теорем.

Доказательство теоремы 2.1. Для натурального n определим функции

$$a_{l,n}(s) = n \int\limits_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}} a(\tau, s)\, d\tau, \quad l = 0, \dots, n-1,\ 0 \le s \le 1, \tag{3.1}$$

принадлежащие L_2. По этим функциям зададим ядро

$$a_n(t, s) = a_{l,n}(s), \quad \frac{l}{n} \le t < \frac{l+1}{n}, \quad l = 0, \dots, n-1,\ 0 \le s \le 1, \tag{3.2}$$

являющееся измеримой и суммируемой с квадратом функцией на $[0;1] \times [0;1]$. Рассмотрим теперь ядро $a(t,s)$ как вектор-функцию, зависящую от $t \in [0;1]$ и принимающую значения (по s) в пространстве $L_2[0.1]$. Отсюда, учитывая определение (2.1) модуля непрерывности $\omega(\delta, a)_2$ и вид (3.1), (3.2) ядра $a_n(t,s)$ на основании леммы 3.2 (в которой полагаем $p = 2$), имеем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |a(t,s) - a_n(t,s)|^2\, dt\, ds \le 2\omega^2\Big(\frac{1}{n}, a\Big)_2. \tag{3.3}$$

Обозначим через A_n интегральный оператор с ядром $a_n(t,s)$, заданным равенствами (3.1), (3.2). Тогда левая часть неравенства (3.3) определяет квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора $A - A_n$, (см., например, [1, с. 143]), и значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(A - A_n) \le 2\omega^2\Big(\frac{1}{n}, a\Big)_2. \tag{3.4}$$

Область значений сопряженного оператора A_n^* содержится в линейной оболочке $\overline{a_{0,n}}, \dots, \overline{a_{n-1,n}}$. Поэтому размерность оперетора A_n не привышает n , а значит, согласно следствию 2.1 из [1, с. 49] $s_{k+n}(A) \le s_k(A - A_n)$.

Подставляя эту оценку в левую часть неравенства (3.4), приходим к утверждению теоремы 2.1. □

Доказательство теоремы 2.3. Из условия $ran(A) \subset C[0;1]$ вытекает: для каждой функции $f \in L_2$, функция $a(t,s)$, рассматриваемая как вектор-функция от $t \in [0;1]$ со значениями (по s) в пространстве $L_2[0;1]$, является непрерывной в слабом смысле. Поэтому при каждом $t_0 \in [0;1]$ определена функция $a(t_0, s)$, которая принадлежит L_2.

Тем самым, для каждого натурального n определено ядро

$$a_n(t,s) := \sum_{j=j}^{m-1} a\Big(\frac{l}{n} + \frac{j}{n(m-1)}, s\Big) L_{j,l,m,n}(t), \tag{3.5}$$

$$L_{j,l,m,n}(t) := \prod_{q=0, q\neq j}^{m-1} \frac{n(m-1)t-(m-1)l-q}{j-q}, \tag{3.6}$$

$\frac{l}{n} \le t < \frac{l+1}{n}$, $l = 0, \ldots, n-1$, $0 \le s \le 1$. Из этого определения следует, что ядро $a_n(t,s)$ является ядром интерполяции по t ядра $a(t,s)$ на каждом из отрезков $[\frac{l}{n}; \frac{l+1}{n}]$ с узлами интерполяции в точках $\frac{l}{n} + \frac{j}{n(m-1)}$, $j = 0, \ldots, m-1$. Отсюда и из результатов [7] заключаем, что для любой $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 a(t,s)f(s)\,ds - \int_0^1 a_n(t,s)f(s)\,ds \right| \le 5\omega_{l,m}\left(\frac{1}{mn}, \int_0^1 a_n(t,s)f(s)\,ds\right)$$

для $\frac{l}{n} \le t < \frac{l+1}{n}$ с модулем непрерывности

$$\omega_{l,m}(\delta, g) := \sup_{0\le\ h\le\delta} \sup_{\frac{l}{n}\le\ t\le\frac{l+h}{n}-hm} \left| \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \binom{m}{q} g(t+hq) \right|,$$

$$0 \le \delta \le (mn)^{-1}.$$

Здесь g — произвольная непрерывная на отрезке $[\frac{l}{n}; \frac{l+1}{n}]$ числовая функция . Из этого неравенства, учитывая определение (2.4) модуля непрерывности $\omega_m(\delta, a)$ и равенства

$$\sup_{f\in L_2, \|f\|_2=1} \left| \int_0^1 a(s)f(s)\,ds \right| = \|a\|_2,$$

имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |a(t,s) - a_n(t,s)|^2\,dt\,ds \le 25\omega_m^2\Big(\frac{1}{mn}, a\Big). \tag{3.7}$$

Обозначим через A_n интегральный оператор с ядром $a_n(t,s)$, заданным равенствами (3.5) и (3.6). Область значений оператора A_n^* лежит в линейной оболочке $\overline{a(\frac{l}{n} + \frac{j}{n(m-1)}, t)}$, $l = 0, \ldots, n-1$, а $j = 0, \ldots, m-1$, поэтому размерность оператора A_n не превышает $mn - n + 1$, а значит, $s_{k+mn-n+1}(A) \le s_k(A - A_n)$.

Учитывая эту оценку и замечая, что левая часть неравенства (3.7) определяет квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора $A - A_n$, получаем

$$\sum_{k=mn-n+2}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\Big(\frac{1}{mn}, a\Big). \tag{3.8}$$

Пусть произвольное натуральное число $r \ge m+1$. Тогда найдется такое натуральное число n_1, для которого выполнены неравенства $mn_1 - n_1 + 2 \le r \le mn_1 + m - n_1$. Отсюда и из неравенства (3.8) выводим соотношения

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le \sum_{k=mn_1-n_1+2}^{\infty} s_k^2(A) \le 25\omega_m^2\Big(\frac{1}{mn}, a\Big).$$

А так как $r \le 2mn_1$, то $\omega_m(\frac{1}{mn_1}, a) \le \omega_m(\frac{2}{r}, a)$, что и доказывает оценку (2.5). □

Замечание 3.1. Утверждения теоремы 2.3 и следствия 2.3, в общем случае, несправедливы для $r = 1, \dots, m$. Действительно, пусть ядро оператора $b(t,s) = (1+ts)^{m-1}$.

Для него $\omega_m(\delta, b) \equiv 0$, а соответствующий этому ядру интегральный оператор является самосопряженным в L_2 и имеет размерность, равную m. Поэтому его первые m сингулярных чисел отличны от нуля, а все остальные равны 0. Аналогичное замечание относится к теореме 2.1 и следствию 2.1.

Замечание 3.2. Оценка в следствии 2.1 точна по порядку. Покажем это. Действительно, рассмотрим оператор интегрирования J

$$Jf = \int_t^1 f(s)\,ds.$$

Ясно, что он имеет вид (1.1) с ядром

$$a(t,s) = \begin{cases} 0, & t > s \\ 1, & t \le s. \end{cases}$$

Тогда $\omega(\delta, a)_2 \le \delta^{\frac{1}{2}}$ и согласно следствию 2.1

$$s_r(A) \le \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}[\frac{r}{2}]^{\frac{1}{2}}} \le \frac{2}{r-1}, \quad r = 2, 3, \dots$$

С другой стороны, прямое вычисление сингулярных чисел для такого оператора, дает

$$s_r(A) = \frac{2}{\pi(2r-1)}, \quad r = 1, 2, \dots.$$

Литература

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, М.: Наука, 1965.

[2] I. Fredholm, *Sur une classe d'equatioms fonctionnelles* // Acta math., **27** (1903), 365–390.

[3] Н. В. Мирошин, В. В. Хромов, *Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных* // Матем. заметки, **32** (1982), No. 5, 721–726.

[4] П. Л. Ульянов, *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Мат. сб., **81** (1970), No. 1, 104–131.

[5] В. А. Темляков, *Билинейная аппроксимация и приложения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187** (1989), 191–215.

[6] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, М.: Из-во иност. лит-ры, 1965.

[7] Н. В. Крякин, М. Д. Такев, *Об интерполяционных константах Уитни* // Матем. заметки, **59** (1996), No. 3, 461–463.

Сведения об авторах

Елена Ивановна Радзиевская

Национальный университет пищевых технологий,
ул. Владимирская, 68,
Киев,
Украина
E-Mail: `radzl58@mail.ru`