

Романенко В.М. Апроксимація обмежених розв'язків різницевого рівняння старших порядків / В.М. Романенко // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – 2010. – Вип.3. – С. 153–156.

Апроксимація обмежених розв'язків різницевого рівняння старших порядків

Отримані достатні умови наближення обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння в банаховому просторі розв'язками відповідних задач Коші. Оцінена швидкість наближення.

Ключові слова: лінійне різницеве рівняння, банахов простір, задача Коші.

Аппроксимация ограниченных решений разностных уравнений старших порядков

Получены достаточные условия приближения ограниченного решения линейного разностного уравнения в банаховом пространстве решениями соответствующих задач Коши. Оценена скорость приближения.

Ключевые слова: линейное разностное уравнение, Банахово пространство, задача Коши.

Approximation of bounded solutions of difference equation of higher orders

Sufficient conditions are obtained for approximation of bounded solution of linear difference equation in Banach space with solutions of corresponding Cauchy problems. Rate of approximation is estimated.

Key words: linear difference equation, Banach space, Cauchy problem.

Вступ.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахов простір з нульовим елементом $\vec{0}$, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B , I – одиничний оператор, $S := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Нехай також $A_0 : D(A_0) \subset B \rightarrow B$ – замкнений оператор, $\{A_1, \dots, A_{m-1}\} \subset L(B)$. Нехай виконується

Припущення 1. Оператори A_1, A_2, \dots, A_{m-1} попарно комутують, а також

$$\forall k, 1 \leq k \leq m-1 : A_k : B \rightarrow D(A_0), \quad A_0 A_k = A_k A_0 \text{ на } D(A_0).$$

Розглянемо різницево рівняння

$$x(n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k x(n-k) + y(n), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

де $y := \{y(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ – відома обмежена послідовність елементів B , $x := \{x(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ –

шукана обмежена послідовність елементів B .

В роботі [1] розглянуте аналогічне рівняння першого порядку

$$x(n+1) = A_0 x(n) + y(n), n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

За умови, що спектр $\sigma(A_0)$ не перетинається з S , простір B розкладається в пряму суму підпросторів B_+ та B_- , що відповідають частинам спектра $\sigma(A_0)$, що лежать відповідно ззовні та всередині S .

Теорема 1 [1] *Нехай $\sigma(A_0) \cap S = \emptyset$, $y = \{y(n): n \in \mathbf{Z}\}$ – фіксована обмежена послідовність елементів B , $x = \{x(n): n \in \mathbf{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (2), відповідний послідовності y . Тоді існують числа $q_{\pm} \in (0, 1)$, $N_{\pm} \in \mathbf{N}$ такі, що для всіх $\alpha_- \in B_-$, $\alpha_+ \in B_+$, а також для всіх натуральних чисел m, k , які задовольняють умови $m \geq \max\{N_+, N_-\}$, $N_- \leq k \leq 2m - N_+$, справджується нерівність*

$$\|x(-m+k) - u(-m+k)\| \leq q_-^k \|x_-(-m) - \alpha_-\| + q_+^{2m-k} \|x_+(m) - \alpha_+\|.$$

В даній статті результат цієї теореми узагальнюються на випадок рівнянь старших порядків.

Апроксимація розв'язку.

Спочатку зауважимо, що різницеве рівняння (1) еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} x(n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k v_k(n), x(n-1) = v_1(n), x(n-2) = v_2(n), \dots \\ x(n-m+1) = v_{m-1}(n), n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (3)$$

Позначимо через B^m декартів добуток m екземплярів простору B ; B^m – банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою $\|\bar{z}\|_m := \max_{1 \leq k \leq m} \|z_k\|$, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m) \in B^m$.

З урахуванням правил матричного числення система (3) записується в цьому просторі таким чином:

$$\bar{z}(n+1) = A\bar{z}(n) + \bar{y}(n), n \in \mathbf{Z}, \quad (4)$$

$$\bar{z}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ v_1(n) \\ \vdots \\ v_{m-1}(n) \end{pmatrix}, \bar{y}(n) = \begin{pmatrix} y(n) \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} \\ I & O & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & O \end{pmatrix},$$

причому на незаповнених місцях матриці A знаходяться нульові оператори. Матриця A

визначає в просторі B^m оператор, який теж позначатимемо буквою A , з областю визначення $D(A) := \{\vec{w} \in B^m \mid w_1 \in D(A_0)\}$. Використовуючи означення, легко показати замкненість цього оператора.

Припустимо, що спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з одиничним колом S . Нехай σ_- – частина спектра $\sigma(A)$, що міститься всередині S ; $\sigma_+ := \sigma(A) \setminus \sigma_-$, σ_- та σ_+ – непорожні множини. Тоді простір B^m розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора A підпросторів B_{\pm}^m ; звуження оператора A на B_{\pm}^m мають відповідно спектри σ_{\pm} ; A_- – лінійний обмежений оператор; A_+ – замкнений оператор, який має обмежений обернений оператор, причому $\sigma(A_+^{-1})$ лежить всередині S . Нехай P_{\pm} – проектори в B^m відповідно на простори B_{\pm}^m . Покладемо $\vec{y}_{\pm} := P_{\pm} \vec{y}$.

В [2, с. 14] показано, що різницеве рівняння (4) має єдиний обмежений розв'язок \vec{z} , відповідний послідовності \vec{y} . При цьому рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок \vec{x} , відповідний послідовності \vec{y} . Розв'язок \vec{z} зображується у вигляді

$$\vec{z} = \vec{z}_- + \vec{z}_+, \quad (5)$$

$$\text{де } \vec{z}_-(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} A_-^j P_- \vec{y}(n-1-j), n \in \mathbf{Z}, \quad \vec{z}_+(n) = - \sum_{j=-\infty}^{-1} A_+^j P_+ \vec{y}(n-1-j), n \in \mathbf{Z},$$

причому ряди збіжні за нормою.

Відмітимо, що \vec{z}_{\pm} – відповідні обмеженим послідовностям \vec{y}_{\pm} єдині обмежені розв'язки рівнянь

$$\vec{z}_-(n+1) = A_- \vec{z}_-(n) + \vec{y}_-(n), n \in \mathbf{Z}, \quad (6)$$

$$\vec{z}_+(n+1) = A_+ \vec{z}_+(n) + \vec{y}_+(n), n \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

у просторах B_{\pm}^m .

Оскільки спектральні радіуси операторів A_- та A_+^{-1} менші за одиницю, то знайдуться такі числа $q_{\pm} \in (0,1)$, $N_{\pm} \in \mathbf{N}$, що

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_- : \|A_-^n\| &\leq q_-^n, \\ \forall n \geq N_+ : \|A_+^n\| &\leq q_+^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Зафіксуємо $m \geq \max\{N_-, N_+\}$. Рівнянню (6) в просторі B_-^m відповідає задача Коші

$$\begin{cases} \vec{u}_-(-m+k) = A_- \vec{u}_-(-m+k-1) + \vec{y}_-(-m+k-1), k \geq 1, \\ \vec{u}_-(-m) = \vec{\alpha}_-. \end{cases} \quad (9)$$

Тут $\vec{\alpha}_-$ – фіксований елемент з B_-^m . Врахуємо, що

$$A_- \vec{u}_-(k) = A P_- \vec{u}_-(k) = A \vec{u}_-(k), k \in \mathbf{Z}.$$

Позначимо

$$w_-(k) := (\vec{u}_-)_{,1}(k), k > -m,$$

та

$$w_-(k) := (\bar{\alpha}_-)_{-m-k+1}, \quad -2m+1 \leq k \leq -m.$$

Розписавши задачу (9) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} (\bar{u}_-)_{-1}(-m+k) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j (\bar{u}_-)_{j+1}(-m+k-1) + (\bar{y}_-)_{-1}(-m+k-1), \\ (\bar{u}_-)_{-p}(-m+k) = w_-(-m+k-p+1), \quad k \geq 1, \quad 2 \leq p \leq m, \\ (\bar{u}_-)_{-p}(-m) = (\bar{\alpha}_-)_{-p}, \quad 1 \leq p \leq m. \end{cases}$$

Спрощуючи, одержимо

$$\begin{cases} w_-(-m+k) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j w_-(-m+k-j-1) + (\bar{y}_-)_{-1}(-m+k-1), \quad k \geq 1, \\ w_-(k) = (\bar{\alpha}_-)_{-m-k+1}, \quad -2m+1 \leq k \leq -m. \end{cases} \quad (10)$$

Якщо існує A_{m-1}^{-1} , то безпосередньо можна перекоонатися, що оператор A має обернений оператор такого вигляду:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & O & I & \\ A_{m-1}^{-1} & -A_0 A_{m-1}^{-1} & \dots & -A_{m-2} A_{m-1}^{-1} & \end{pmatrix}.$$

При цьому різницевому рівнянню (7) в просторі B_+^m при фіксованому $\bar{\alpha}_+$ відповідає задача Коші

$$\begin{cases} \bar{u}_+(m-k) = A_+^{-1} \bar{u}_+(m-k+1) - A_+^{-1} \bar{y}_+(m-k), \quad k \geq 1, \\ \bar{u}_+(m) = \bar{\alpha}_+. \end{cases} \quad (11)$$

Позначимо

$$w_+(k) := (\bar{u}_+)_{-1}(k), \quad k < m,$$

та

$$w_+(k) := (\bar{\alpha}_+)_{-m+k+1}, \quad m \leq k \leq 2m-1.$$

Розписавши задачу (11) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} w_+(m-k+1) = A_{m-1}^{-1} w_+(m-k) - \sum_{p=0}^{m-2} A_p A_{m-1}^{-1} w_+(m-k-p+1) + (\bar{y}_+)_{-1}(m-k), \quad k \geq 1, \\ w_+(k) = (\bar{\alpha}_+)_{-m-k+1}, \quad m \leq k \leq 2m-1. \end{cases} \quad (12)$$

Зауважимо, що елементи $\bar{u}_-(-m+k), \bar{u}_+(m-k), k \geq 1$, послідовно визначаються відповідно з (10) та (12). Покладемо

$$\bar{u}(-m+k) := \bar{u}_-(-m+k) + \bar{u}_+(-m+k), 0 \leq k \leq 2m. \quad (13)$$

Відповідь на питання про можливість наближення обмеженого розв'язку \bar{z} різницевого рівняння (1) містить

Теорема 2 Нехай оператор $\Omega(z) := \sum_{k=0}^{m-1} A_k z^{m-k} - z^{m+1}$ має неперервний обернений при кожному $z \in S$, існує $A_{m-1}^{-1} \in L(B)$, $y = \{y(n): n \in \mathbf{Z}\}$ – фіксована обмежена послідовність елементів B , $x = \{x(n): n \in \mathbf{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний послідовності y . Тоді існують залежні тільки від операторів A_0, \dots, A_{m-1} числа $q_{\pm} \in (0,1), N_{\pm} \in \mathbf{N}$ такі, що для всіх $\bar{\alpha}_- \in B_-^m, \bar{\alpha}_+ \in B_+^m$, а також для всіх натуральних чисел m, k , які задовольняють умови $m \geq \max\{N_+, N_-\}, N_- \leq k \leq 2m - N_+$, справджується нерівність

$$\|\bar{z}(-m+k) - \bar{u}(-m+k)\|_m \leq q_-^k \|\bar{z}_-(-m) - \bar{\alpha}_-\|_m + q_+^{2m-k} \|\bar{z}_+(m) - \bar{\alpha}_+\|_m,$$

де елементи $\bar{u}(-m+k), 0 \leq k \leq 2m$, визначаються за допомогою формул (10), (12), (13).

Proof. З існування оберненого оператора для $\Omega(z), z \in S$, випливає, що $\sigma(A) \cap S = \emptyset$. Дійсно, користуючись правилами матричного числення, можна показати, що визначник матриці $A - zI_m$, де I_m – одиничний оператор в просторі B^m , рівний $(-1)^m \Omega(z)$.

Отже, для всіх $z \in S$ оператор $A - zI_m$ має неперервний обернений.

Перевіримо, що твердження теореми виконується з числами q_{\pm}, N_{\pm} з оцінок (8). З рівностей (6), (9) випливає, що для всіх натуральних чисел k правильні рівності

$$\|\bar{z}_-(-m+k) - \bar{u}_-(-m+k)\|_m = \|A_-(\bar{z}_-(-m+k-1) - \bar{u}_-(-m+k-1))\|_m = \dots = \|A_-^k(\bar{z}_-(-m) - \bar{u}_-(-m))\|_m,$$

а отже, внаслідок (8),

$$\forall k \geq N_- : \|\bar{z}_-(-m+k) - \bar{u}_-(-m+k)\|_m \leq q_-^k \|\bar{z}_-(-m) - \bar{\alpha}_-\|_m.$$

Аналогічно, скориставшись рівностями (7), (11) та оцінкою (8), отримаємо

$$\forall k \geq N_+ : \|\bar{z}_+(-m+k) - \bar{u}_+(-m+k)\|_m \leq q_+^k \|\bar{z}_+(-m) - \bar{\alpha}_+\|_m.$$

З цих оцінок випливає твердження теореми.

Зауваження 1. З нерівності в теоремі 2 випливає оцінка, яка дозволяє наблизити єдиний обмежений розв'язок x різницевого рівняння (1). Дійсно, оскільки при кожному $n \in \mathbf{Z}$ $x(n)$ – це перша компонента вектора $\bar{z}(n)$, а $\|\bar{y}\|_m = \|y\|$, то для всіх натуральних чисел m, k , які

задовольняють умови

$$m \geq \max\{N_-, N_+\}, N_- \leq k \leq 2m - N_+,$$

справджується нерівність

$$\|x(-m+k) - u_1(-m+k)\|_m \leq q_-^k \|\bar{z}_-(-m) - \bar{\alpha}_-\|_m + q_+^{2m-k} \|\bar{z}_+(m) - \bar{\alpha}_+\|_m.$$

Зауваження 2. Внаслідок рівностей (6), (7) маємо

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|\bar{z}_+(n)\| \leq L_+, \quad \sup_{n \in \mathbf{Z}} \|\bar{z}_-(n)\| \leq L_-,$$

де

$$L_+ := \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \|A_+^j P_+\| \right) \sup_{n \in \mathbf{Z}} \|\bar{y}(n)\|, \quad L_- := \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \|A_-^j P_-\| \right) \sup_{n \in \mathbf{Z}} \|\bar{y}(n)\|.$$

Тому з оцінки в теоремі випливає, що

$$\|\bar{z}(-m+k) - \bar{u}(-m+k)\|_m \leq q_-^k (L_- + \|\bar{\alpha}_-\|_m) + q_+^{2m-k} (L_+ + \|\bar{\alpha}_+\|_m).$$

Зауваження 3. Частинним випадком рівняння вигляду (1) є рівняння вигляду

$$\Delta^{(m)} x(n) + A_1 \Delta^{(m-1)} x(n) + \dots + A_{m-1} \Delta^{(1)} x(n) = A_0 x(n) + y(n), n \in \mathbf{Z},$$

де

$$\Delta^{(1)} x(n) := x(n+1) - x(n-1), \quad \Delta^{(k+1)} x(n) := \Delta^{(k)} x(n+1) - \Delta^{(k)} x(n-1), k \geq 1, n \in \mathbf{Z}.$$

Для таких рівнянь в роботі [3] отриманий деякий аналог теореми 2, більш зручний у застосуванні.

Висновки.

Знайдені достатні умови апроксимації обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння в банаховому просторі розв'язками відповідних задач Коші. Отримана оцінка швидкості наближення.

References

- [1] Романенко В.М. *Наближення обмежених розв'язків різницевого та диференціального рівнянь розв'язками відповідних задач Коші* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 142 - 147.
- [2] Дороговцев А.Я. *Периодические и стационарные режимы бесконечных детерминированных и стохастических динамических систем*. К.: Вища шк. – 1992. – 319с.
- [3] Городній М.Ф., Романенко В.М. *Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач* // Укр. мат. журн. – 2000. – т.52. – №4. – С. 548 - 552.