

### Особливості визначення моменту електродинамічного гальма з феромагнітним диском.

Отримане в [1] аналітичне рішення для густини струму в провідному диску, що обертається в нерівномірному магнітному полі, дозволяє розрахувати гальмівні моменти, обумовлені гармонічними складовими магнітної індукції. Оскільки змінне магнітне поле та наведені ним струми затухають по відомому закону [3,4], то фактичний розподіл струму можна замінити фіктивним рівномірно розподіленим струмом на еквівалентній глибині проникнення :

$$u = \sqrt{\frac{2}{\omega_j \sigma \mu}}, \quad (1)$$

де  $u$  - еквівалентна глибина проникнення;

$\omega_j$  - кутова частота зміни струму;

$\sigma$  - електрична провідність матеріалу диску;

$\mu$  - магнітна проникність матеріалу диску.

В диску електродинамічного гальма, який обертається в нерівномірному робочому зазорі магнітопровода з обмоткою збудження постійного струму, спостерігається складне магнітне поле. Постійна складова магнітного поля підмагнічує диск, а просторові гармонічні складові магнітного поля, обумовлені зубчатою структурою зазору, створюють в диску при його обертанні змінні магнітні поля, а відповідно і струми, зусилля та гальмівний момент.

Оскільки кутова частота змінних струмів і змінних магнітних полів зростає зі збільшенням порядку гармонічної складової магнітного поля, то глибина проникнення струму і гармонічної складової магнітного поля зменшується. Таким чином, в загальному випадку, гармонічні складові струмів і магнітного поля знаходяться в неоднакових умовах насичення суцільного електропровідного феромагнітного диску.

Для провідного феромагнітного диску магнітна проникність залежить від величини магнітної індукції в кожній точці. Величина ефективного значення магнітної індукції для гармонічних складових більш високих порядків, в загальному випадку, більша, ніж для складових меншого порядку. Але слід враховувати, що для тонкого феромагнітного диску при відносно невеликих частотах обертання цією різницею можна знехтувати. Розглянемо вплив магнітної проникності на величину електромагнітного моменту дископодібного електродинамічного гальма при таких припущеннях:

1. Будемо вважати магнітну індукцію незмінною по ефективній глибині проникнення.
2. Матеріал диску ізотропний .
3. Гармонічний склад розподілу магнітної індукції вдовж тангенційної координати не залежить від швидкості обертання диску.
4. Магнітна проникність матеріалу диску визначається ефективним значенням магнітної індукції, пропорційним амплітуді основної робочої гармонічної складової індукції магнітного поля при відповідній швидкості обертання диску, по характеристиці намагнічування.
5. Електромагнітний момент гальма знаходимо як суму електромагнітних моментів від взаємодії просторових гармонічних складових однакового порядку струмів і магнітної індукції. (Приймаємо, що результуючий електромагнітний момент від взаємодії просторових гармонічних складових струмів з просторовими гармонічними складовими магнітної індукції не співпадаючих порядків дорівнює нулю).

Ефективне значення магнітної індукції визначимо як результат геометричного додавання гармонічних складових:

$$B_{ef} = \sqrt{\sum_{v=0}^{\infty} B_v^2} = B_p \sqrt{1 + \frac{\sum_{v=0, v \neq p}^{\infty} B_{av}^2}{B_{ap}^2}} = B_p \cdot k_{ef}, \quad (2)$$

де  $B_v$  - амплітуда гармонічної складової порядку  $v$  магнітної індукції при певній швидкості обертання диску;

$B_{av}$  - початкова (при нерухомому диску) амплітуда відповідної складової магнітної індукції в робочому зазорі;

$B_p$  - амплітуда основної гармонічної складової порядку  $p$  магнітної індукції в диску при певній швидкості обертання диску;

$B_{ap}$  - початкова амплітуда основної гармонічної складової порядку  $p$  магнітної індукції в робочому зазорі;

$k_{ef}$  - коефіцієнт пропорційності між ефективним значенням магнітної індукції та амплітудою основної гармонічної складової порядку  $p$  магнітної індукції в диску при відповідній швидкості обертання диску

Розглянемо зміну магнітної проникності матеріалу диску, обумовлену зменшенням глибини проникнення електромагнітного поля при збільшенні швидкості обертання диску.

Якщо ефективна глибина проникнення суттєво менша половини товщини диску  $u \ll \frac{d}{2}$ , то тангенційну складову магнітної індукції в диску (яка в цьому випадку визначає магнітну проникність матеріалу диску) з врахуванням ефекту витіснення змінного магнітного поля вихровими струмами можна виразити через амплітуду відповідної гармонічної складової магнітної індукції в робочому зазорі, виходячи з умови неперервності магнітного потоку, як відношення половини магнітного потоку на полюсному діленні до площі перетину цього потоку на ефективній глибині проникнення, але не менше ніж  $B_{ap}$ :

$$B_{p6} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{\pi} B_{ap} \frac{\pi \rho}{p} \Delta \rho}{u \cdot \Delta \rho} = B_{ap} \frac{\rho}{p \cdot u} = B_{ap} \frac{\rho \sqrt{\omega \sigma \mu}}{\sqrt{2p}}. \quad (3)$$

Глибина проникнення електромагнітного поля збільшується при зменшенні швидкості обертання ротора, що приводить до зменшення тангенційної складової вектора магнітної індукції. Коли глибина проникнення електромагнітного поля стане більшою половини товщини диску  $u > \frac{d}{2}$ , результуюча тангенційна складова вектора магнітної індукції буде зменшуватись ще і за рахунок взаємної компенсації цих складових з обох сторін диску. При цьому максимальне значення магнітної індукції в диску, яке визначає магнітну проникність матеріалу диску, поступово переходить в зону, де переважає осьова складова вектора магнітної індукції. В діапазоні швидкості обертання диску від нуля до швидкості, при якій глибина проникнення дорівнює половині товщини диску, значення магнітної індукції для визначення магнітної проникності з врахуванням витіснення магнітного поля можна прийняти:

$$B_{ps} = B_{ap} \sqrt{\left(1 - \frac{d}{2u}\right)^2 + \frac{\rho^2 \omega \sigma \mu}{2p}} = B_{ap} \sqrt{\left(1 - \frac{d \sqrt{p \omega \sigma \mu}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\rho^2 \omega \sigma \mu}{2p}}, \quad (3a)$$

$\rho$  - радіус точки диску, в якій визначається магнітна індукція;

$p$  - порядок (число пар полюсів) основної гармонічної складової магнітної індукції в робочому зазорі.

Зв'язок між магнітною індукцією та напруженістю магнітного поля поблизу точки на характеристиці намагнічування (рис.1) [5] з цією індукцією можна виразити лінійною залежністю у вигляді:

$$B = B_0 + \mu_\delta \cdot H, \quad (4)$$

де  $\mu_\delta$  - динамічна магнітна проникність;

$B_0$  - точка перетину з віссю ординат дотичної до характеристики намагнічування, проведеної через точку з заданою індукцією  $B$  (початкове значення магнітної індукції апроксимуючої прямої);

$H$  - напруженість магнітного поля в розрахунковій точці.

Розрахункову статичну магнітну проникність  $\mu$  матеріалу диску при значеннях магнітної індукції близьких до  $B_{ef} = B_{p\phi} \cdot k_{ef}$  можна виразити через динамічну:

$$\mu = \frac{\mu_0 B_{ef}}{B_{ef} - B_0} \quad (5)$$

В залежності від значення  $B_0$  розрахункова магнітна проникність по різному змінюється зі зміною  $B$ . При  $B_0 > 0$  (лінія 2 на рис. 1)  $\mu$  зменшується із збільшенням  $B$ , при  $B_0 = 0$  (лінія 3 на рис. 1)  $\mu = const$ , при  $B_0 < 0$  (лінія 4 на рис. 1)  $\mu$  збільшується із збільшенням  $B$ .

Оскільки еквівалентна глибина проникнення залежить від магнітної проникності, яка визначається ефективним значенням магнітної індукції по (2), (3), то, враховуючи (5), отримаємо:

$$B_{p\phi} = \frac{B_{ap} \rho}{p\sqrt{2}} \sqrt{p\omega\sigma \frac{\mu_0 B_{p\phi} \cdot k_{ef}}{B_{p\phi} \cdot k_{ef} - B_0}}, \quad (6)$$

де  $\omega_j = p\omega$ ,  $\omega$  - кутова швидкість диску.

Розв'язавши (6) відносно  $B_{p\phi}$ , отримаємо:

$$B_{p\phi} = \frac{B_0}{2 \cdot k_{ef}} + \sqrt{\frac{B_0^2}{4 \cdot k_{ef}^2} + \frac{B_{ap}^2}{2p} \mu_0 \sigma \omega \rho^2}, \quad (7)$$

а підставивши (7) в (5) знайдемо залежність магнітної проникності від частоти обертання:

$$\mu = \mu_0 \frac{\sqrt{\frac{B_0^2}{4} + \frac{B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{2p} \mu_0 \sigma \omega \rho^2} + \frac{B_0}{2}}{\sqrt{\frac{B_0^2}{4} + \frac{B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{2p} \mu_0 \sigma \omega \rho^2} - \frac{B_0}{2}}. \quad (8)$$

Для розрахунку електромагнітного моменту приймемо значення магнітної проникності на середньому радіусі робочої зони  $\rho = \frac{r_1 + r_2}{2}$  таким:

$$\mu = \mu_0 \frac{\sqrt{\frac{B_0^2}{4} + \frac{B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{8\rho} \mu_0 \sigma \omega (r_1 + r_2)^2} + \frac{B_0}{2}}{\sqrt{\frac{B_0^2}{4} + \frac{B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{8\rho} \mu_0 \sigma \omega (r_1 + r_2)^2} - \frac{B_0}{2}} . \quad (9)$$

Електромагнітний момент будемо розраховувати по отриманій в [1] залежності, приймаючи замість товщини диску  $d$  двосторонню ефективну глибину проникнення у випадках, коли остання менша половини товщини диску  $u < \frac{d}{2}$ :

$$M_v = \frac{\pi u v^2 B_{av}^2}{2\mu^2 \sigma \omega} \ln \frac{(\mu \sigma \omega r_2^2)^2 + v^2}{(\mu \sigma \omega r_1^2)^2 + v^2} . \quad (10)$$

В цьому випадку магнітну проникність слід розраховувати по (9).

Якщо товщина диску менша подвійної глибини проникнення, то електромагнітний момент необхідно розраховувати по товщині диску, а магнітну проникність - по (5) з врахуванням (3а):

$$M_v = \frac{\pi d v^2 B_{av}^2}{4\mu^2 \sigma \omega} \ln \frac{(\mu \sigma \omega r_2^2)^2 + v^2}{(\mu \sigma \omega r_1^2)^2 + v^2} . \quad (11)$$

Результати розрахунків електромагнітного моменту для випадку  $\mu = const$  показані на рис.2. На цьому ж рисунку показані точки значень електромагнітного моменту, що отримані експериментально при ширині радіальних пазів рівній ширині зубців.

Розрахунок проводився при таких параметрах електродинамічного гальма:

- порядок основної гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = 16$ ;
- початкова амплітуда цієї складової  $B_{a16} = 0,08$  Тл;

- порядок другої гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = 32$ ;
- початкова амплітуда цієї складової  $B_{a32} = 0,0311$  Тл ( $38,9\% B_{a16}$ );
- порядок третьої гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = 48$ ;
- початкова амплітуда цієї складової  $B_{a48} = 0,0064$  Тл ( $8\% B_{a16}$ );
- менший радіус робочої зони  $r_1 = 0,055$  м;
- більший радіус робочої зони  $r_2 = 0,07$  м;
- середній радіус робочої зони  $r_{cp} = 0,062$  м;
- електропровідність матеріалу диску (сталь 10)  $\sigma = 6 \cdot 10^6$  1/(Ом·м);
- магнітна проникність спрямленої ділянки кривої намагнічування  $\mu_\delta = 3,33 \cdot 10^{-5}$  Гн/м ( $\mu_\delta = 26,5 \cdot \mu_0$ );
- ширина паза дорівнює ширині зубця  $b_n = b_z$ .

Експериментально електромагнітний момент визначався як різниця між гальмівним моментом електродинамічного гальма при заданих ампервитках збудження (934 А) та гальмівним моментом при розмагніченому індукторі, обумовленим тертям в підшипниках та в повітряному зазорі.

Експериментально були отримані також (рис. 3) характеристики дископодібного електродинамічного гальма, радіальні пази індуктора якого мають постійну ширину, рівну мінімальній ширині зубців. Електромагнітний момент електродинамічного гальма з такою конфігурацією системи практично співпадає як по формі залежності моменту від швидкості обертання диску, так і по величині електромагнітного моменту.

Розрахунковий електромагнітний момент при постійній магнітній проникності  $\mu$  суттєво відрізняється від експериментальних значень, співпадаючи лише в діапазоні швидкості від 0 до 500 об/хв. (Рис.2). Це пояснюється тим, що із збільшенням частоти

обертання зменшується результуюча амплітуда гармонічної складової магнітного поля за рахунок дії вихрових струмів в диску, а тому змінюється магнітна проникність  $\mu$ .

Таким чином, для отримання точніших результатів розрахунку електромагнітного моменту необхідно враховувати зміну магнітної проникності матеріалу диску із зміною результуючої амплітуди просторової гармонічної складової магнітної індукції.

Амплітуду результуючої просторової гармонічної складової магнітного поля з врахуванням дії вихрових струмів в диску знайдемо, скориставшись отриманими в [1] рішеннями. Запишемо вираз для індукції в диску у вигляді

$$B_v = B_{av} \left( \frac{\mu \sigma v \omega r^2}{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2} \sin v\varphi + \left( 1 - \frac{(\mu \sigma \omega r^2)^2}{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2} \right) \cos v\varphi \right) \quad (12)$$

Винесемо за дужки  $\frac{v}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}}$

$$B_v = \frac{v}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} B_{av} \left( \frac{\mu \sigma \omega r^2}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} \sin v\varphi + \left( \frac{v}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} \right) \cos v\varphi \right) \quad (13)$$

Можна позначити

$$\frac{\mu \sigma \omega r^2}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} = \sin \alpha \quad (14)$$

$$\frac{v}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} = \cos \alpha, \quad (15)$$

оскільки  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Тоді

$$B_v = \frac{v}{\sqrt{(\mu \sigma \omega r^2)^2 + v^2}} B_{av} \cos(v\varphi - \alpha). \quad (16)$$

Введемо позначення  $\frac{\sigma r^2}{v} = k$ , тоді з врахуванням (16) результуючу амплітуду

змінної складової магнітної індукції можна записати:

$$B_{зmv} = \frac{1}{\sqrt{(\mu\omega k)^2 + 1}} B_{av}. \quad (17)$$

На рис.4 приведено графіки залежності результуючої амплітуди гармонічної складової магнітного поля  $B_{зmv} / B_{av}$  від швидкості обертання диску при незмінній магнітній проникності матеріалу диску та при зменшенні магнітної проникності із зменшенням індукції магнітного поля (апроксимація 4, 5 рис. 1).

Оскільки перемагнічування середовища змінним магнітним полем з магнітною індукцією  $B_{зmv}$  буде відбуватись по характеристиці намагнічування навколо певної точки з ефективним значенням магнітної індукції по (2) , то магнітна проникність буде визначатись співвідношенням

$$\mu = \frac{B_{ef}}{H} \quad (18)$$

Із характеристики намагнічування в зоні дії цієї складової можна записати:

$$B_0 + \mu_0 H = B_{ef} \quad (19)$$

Підставивши  $H$  із (18) в (19), отримаємо:

$$B_0 \mu = (\mu - \mu_0) B_{ef}, \quad (20)$$

а з врахуванням залежності (17) результуючої амплітуди змінної складової магнітної індукції від частоти обертання та магнітної проникності можна записати:

$$B_0 \mu = \frac{(\mu - \mu_0) B_{ap} \cdot k_{ef}}{\sqrt{(\mu\omega k)^2 + 1}} \quad (21)$$

З (21) отримаємо рівняння для визначення магнітної проникності

$$\mu^4 - \frac{B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2 - B_0^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} \mu^2 + \frac{2\mu_0 B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} \mu - \frac{\mu_0^2 B_{ap}^2 \cdot k_{ef}^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} = 0 \quad (22)$$

Щоб знайти корені цього рівняння, необхідно знати дійсний корінь кубічного рівняння [2]:

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0, \quad (23)$$

$$\text{де } b = 0 ; c = -\frac{B_{ap}^2 k_{ef}^2 - B_0^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} ; d = \frac{2\mu_\delta B_{ap}^2 k_{ef}^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} ; e = -\frac{\mu_\delta^2 B_{ap}^2 k_{ef}^2}{\omega^2 k^2 B_0^2} .$$

Рівняння (23) введенням нової змінної  $t = y + \frac{b_1}{3a_1}$  можна привести до вигляду:

$$t^3 + 3pt + 2q = 0, \quad (24)$$

$$\text{де } a_1 = 8 ; b_1 = -4c ; c_1 = (2bd - 8e) ; d_1 = e(4c - b^2) - d^2 ; 2q = \frac{2b_1^3}{27a_1^3} - \frac{b_1 c_1}{3a_1^2} + \frac{d_1}{a_1} ;$$

$$3p = \frac{3a_1 c_1 - b_1^2}{3a_1^2} .$$

Дійсний корінь цього рівняння знаходимо за формулою Кардана [2]:

$$t = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad (25)$$

Тоді знаходимо один з коренів рівняння (23)  $y_1 = t - \frac{b_1}{3a_1}$ , а магнітну проникність

$\mu$  - як найменший позитивний корінь наступних квадратних рівнянь:

$$\mu^2 \pm \sqrt{8y_1 + b^2 - 4c} \frac{\mu}{2} + \left( y_1 + \frac{by_1 - d}{\sqrt{8y_1 + b^2 - 4c}} \right) = 0 \quad (26)$$

Розрахунок електромагнітного моменту ведеться згідно з умовами, описаними вище по формулах (10) (11) .

Результати розрахунку приведені на рис. 5

Розрахунок електромагнітного моменту дископодібного електродинамічного гальма проведено з врахуванням зміни магнітної проникності матеріалу диску при наступних вихідних даних:

- порядок основної гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = p = 16$ ;

- початкова амплітуда цієї складової  $B_{a16} = 0,08$  Тл;

- початкове значення магнітної індукції апроксимуючої прямої  $B_o = -0,057$  Тл;
- порядок другої гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = 32$ ;
- амплітуда цієї складової  $B_{a32} = 0,0311$  Тл ( $38,9\% B_{a16}$ );
- порядок третьої гармонічної складової магнітної індукції в повітряному зазорі  $\nu = 48$ ;
- амплітуда цієї складової  $B_{a48} = 0,0064$  Тл ( $8\% B_{a16}$ );
- менший радіус робочої зони  $r_1 = 0,055$  м;
- більший радіус робочої зони  $r_2 = 0,07$  м;
- середній радіус робочої зони  $r_{cp} = 0,062$  м;
- електропровідність матеріалу диску (сталь 10)  $\sigma = 6 \cdot 10^6$  1/Ом·м;
- магнітна проникність спрямленої ділянки кривої намагнічування  $\mu_o = 1,4 \cdot 10^{-5}$  Гн/м ( $11 \mu_0$ );
- ширина паза дорівнює ширині зубця  $b_n = b_z$ .

Як видно з наведених даних залежність магнітної проникності матеріалу диску від магнітної індукції зі зміною швидкості обертання суттєво впливає на форму залежності електромагнітного моменту від швидкості обертання диску. Експериментально отримані характеристики електромагнітного моменту підтверджують справедливість запропонованого підходу до визначення магнітної проникності матеріалу диску.

Розрахунки показують, що при збільшенні магнітної проникності матеріалу диску зменшуються максимальний електромагнітний момент ( $M_{max} \equiv \frac{1}{\mu}$ ) та швидкість обертання диску, при якій він досягається, ( $n_{kp} \equiv \frac{1}{\mu}$ ). Електропровідність диску впливає

лише на швидкість обертання диску, при якій досягається максимальний електромагнітний момент, ( $n_{кр} \equiv \frac{1}{\sigma}$ ).

#### ЛІТЕРАТУРА

1. *Антоненко А.И., Цыганкова А.А.* Электромагнитное поле и усилия в проводящем диске моментомера с осевым воздушным зазором. // Техн. електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки». – 2004. - ч. 7. – с.16-19.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука. 1964. – 608 с.
3. *Говорков В.А.* Электрические и магнитные поля, изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Энергия. 1968. – 488 с.

4. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники.- М.-Л.: Энергия, 1966. – 522 с.
5. *Ермолин Н.П.* Электрические машины малой мощности. – М. «Высшая школа», 1967. – 504 с.
6. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества: Учебн. пособие для вузов.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 504 с.

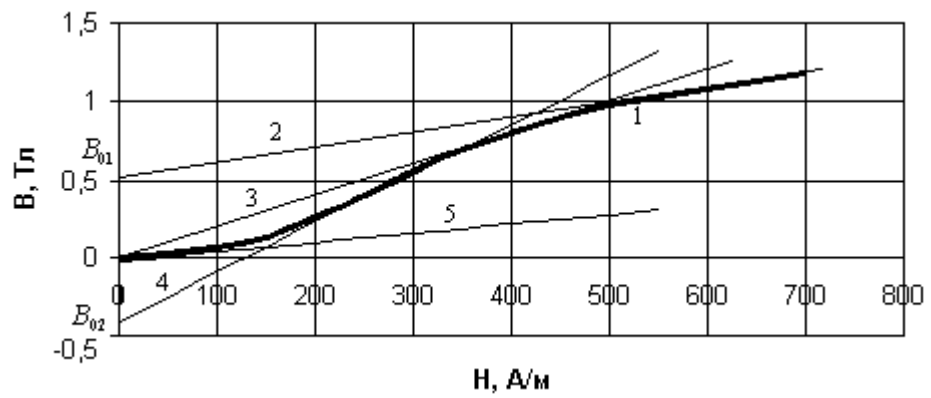


Рис. 1 Характеристика намагнічування сталі 10.

- 1 – Характеристика; 2 – Апроксимація  $B = 0,5 + 0,00027 \cdot H$ ; 3 - Апроксимація  $B = 0,00207 \cdot H$ ;  
 4 – Апроксимація  $B = -0,41 + 0,00315 \cdot H$ ; 5 - Апроксимація  $B = -0,031 + 0,0006 \cdot H$ ;

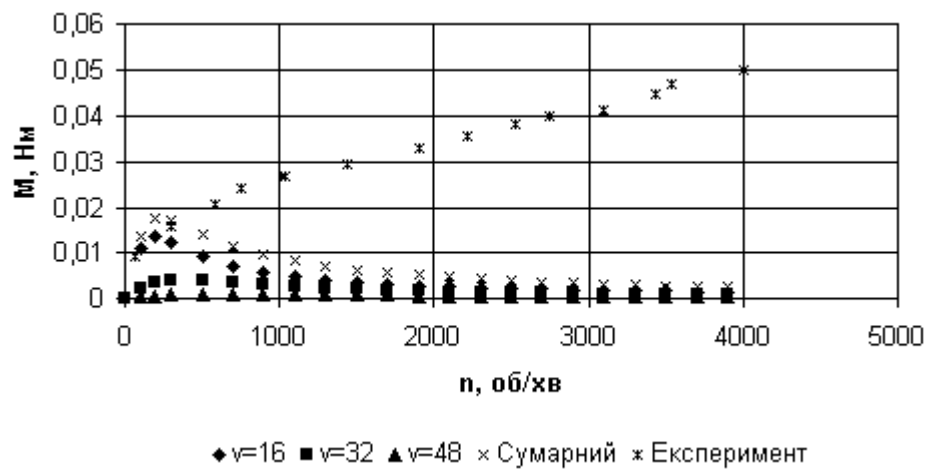


Рис. 2. Електромагнітний момент.

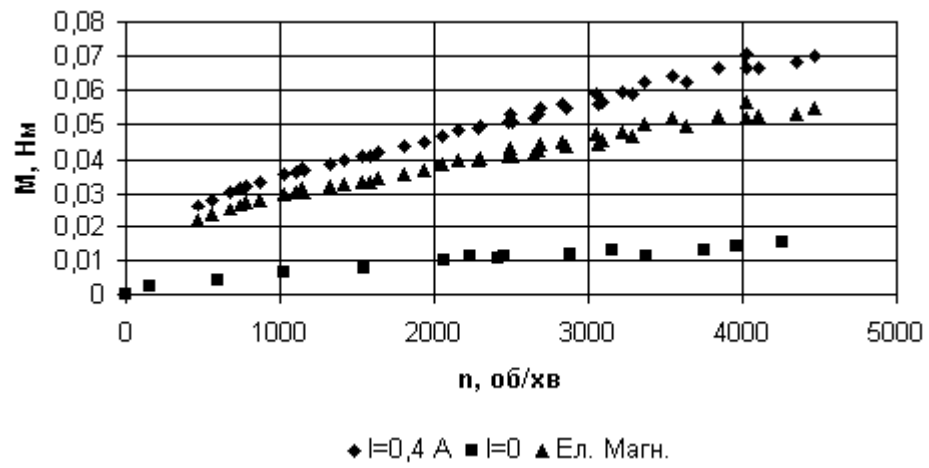
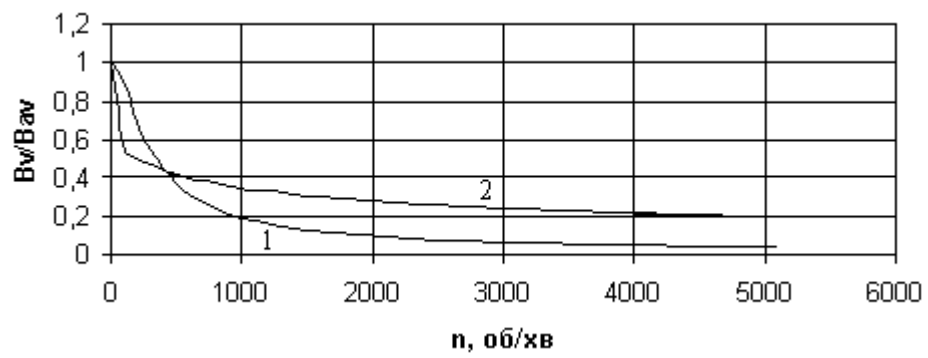


Рис. 3 Гальмівний момент дископодібного електродинамічного гальма при  $b_n = 10 \text{ мм} = \text{const}$



1 – при незмінній магнітній проникності; 2 – при зменшенні магнітної проникності  
із зменшенням індукції магнітного поля

Рис.4. Залежність результуючої амплітуди гармонічної складової магнітного поля від швидкості обертання диску.

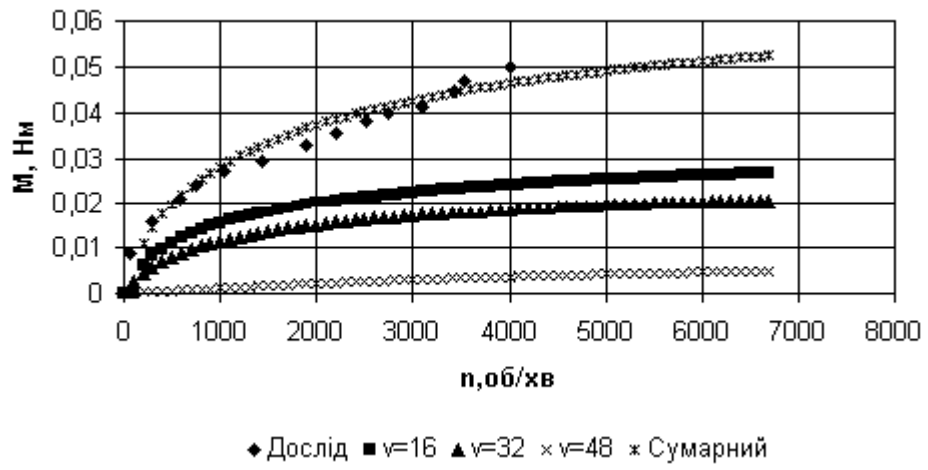


Рис. 5. Електромагнітний момент дископодібного електродинамічного гальма з врахуванням змінного значення магнітної проникності .