

ВПЛИВ НЕРІВНОМІРНОСТІ РОЗПОДІЛУ В'ЯЗКОСТІ НА ГІДРОДИНАМІЧНІ ПАРАМЕТРИ ГРАВІТАЦІЙНО СТІКАЮЧОЇ ЛАМІНАРНОЇ ПЛІВКИ

Розглянуто вплив нерівномірності розподілу в'язкості як результату вирівнювання концентраційного поля при випаровуванні розчинника з вільної поверхні на гідродинамічні параметри ламінарної плівки рідини.

Ключові слова: плівка, концентраційне поле, випаровування, профіль швидкості.

Influence of non-uniformity of distribution of viscosity as result of smoothing a concentration field is considered at evaporation of solvent from a free surface on hydrodynamic parameters of a laminar film of a liquid.

Key words: distribution of viscosity, hydrodynamic parameters, film.

Для в'язких гравітаційно стікаючих по вертикальній поверхні плівок, що рухаються в ламінарному режимі при відсутності міжфазного тертя, профіль швидкості визначається з рівняння руху, яке з деякими спрощеннями для безградієнтного ізотермічного потоку має вигляд

$$\rho g \delta^2 (1 - \xi) = \mu \frac{du}{d\xi} \quad (1)$$

де $\delta = \sqrt{\frac{3\Gamma_v \mu}{\rho g}}$ — товщина плівки; Γ_v — об'ємна шільність зрощення; μ — динамічна в'язкість; g — прискорення вільного падіння; ρ — густина; y — нормальна до поверхні тепловміну координата; $\xi = y/\delta$.

Розв'язком (1) за умови $\xi = 0, u = 0$, тв μ — const є параболічний розподіл швидкості

$$u = \frac{\rho g \delta^4}{\mu} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \quad (2)$$

який дійсний лише для ізотермічної плівки. В разі нагрівання або охолодження в'язкість в поперізі плівки змінює і профіль (2) стає наближенням.

В разі концентрування в'язких розчинів в режимі випаровування з вільної поверхні (відсутнє бульбашкове кипіння) на міжфазній поверхні утворюється шар збільш

високою концентрацією розчиненого компонента, який дифундує в глибину плівки. Для висококонцентрованих розчинів характерна експоненціальна залежність в'язкості від концентрації, тому в'язкість зовнішнього шару може в декілька разів перевищувати осереднене її значення, з відповідними наслідками щодо розподілу швидкості та товщини плівки в ламінарному режимі руху.

В результаті випаровування з вільної поверхні потік маси розчиненого компонента J з поверхні в глибину плівки пропорційний тепловому потоку q та кон-

центрації на міжфазній поверхні C_1 , тобто $J = \frac{q}{\Gamma} C_1$. За-

довж поверхні збільшення концентрації призводить до надання теплового потоку, тому потік маси з поверхні в глибину плівки з деяким наближенням можна вважати постійним. У цьому випадку профіль концентрації може бути визначений з рівняння конвективної дифузії, з граничними умовами другого роду, розв'язок якого при заміні профіля швидкості (2) на постійну середню відомий і по аналогії з рішенням теплопровідності має вигляд

$$C(y, x) = C_0 + \frac{2J}{\rho D} \sqrt{\frac{Dx}{u}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2 u}{4Dx}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2 u}{4Dx}\right) \right]$$

$$-\frac{y}{2\sqrt{\frac{Dx}{u}}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{Dx}{u}}}\right) \quad (3)$$

де $\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\pi} \int_y^\infty e^{-t^2} dt$ — функція помилок

Гаусса; D — коефіцієнт дифузії; u — середня швидкість плавки;

Приклад розрахунку концентраційного поля за співвідношенням (3) в пливці цукрового розчину (60% сухих речовин) при температурі 80 °C та тепловому потоці 6 кВт/м² з об'ємною витратою $\Gamma_v = 6,0000415$ м³/с, що відповідає числу Рейнольдса $Re = \Gamma_v/\nu = 10$, на різних відстанях від входу зображено на рис. 1.

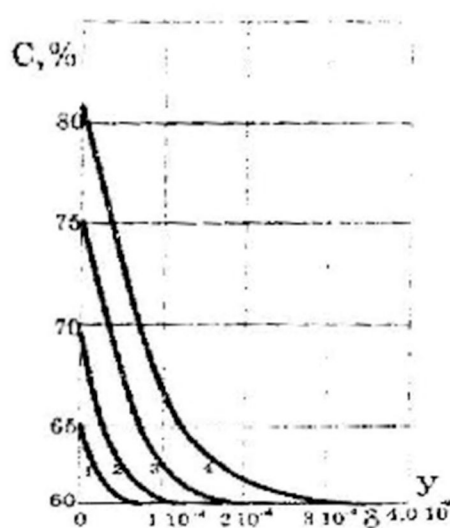


Рис. 1. Розподіл концентрацій в пливці на різних відстанях від входу, м.
1 — $x = 0,1$ м; 2 — $x = 0,5$ м; 3 — $x = 0,8$ м; 4 — $x = 1,5$ м;
 $\delta = 3,75 \cdot 10^{-4}$ м; $\mu = 0,11$ м/с; $Re = 10$.

Скориставшись залежністю в'язкості від концентрації та температури для цукрових розчинів [1]

$$\mu = 0,10^{-9} \cdot 10^{A/(C+T)} \quad (4)$$

$$\text{де } A(C, T) = \left(0,6688 - \frac{98,4}{T}\right)^{-1} + \left[2,357 \cdot 10^{12} T^{-0,425} \cdot \left(\frac{190000}{C \cdot D_b + 0,01} - 18\right)^{0,00447 T - 1,771}\right],$$

де $A(C, T)$ — константа; C — концентрація в %; D_b — чистота розчину, %; T — абсолютна температура, К.

з (3 та 4) отримаємо графік розподілу в'язкості в пливці.

Приклад розрахунку профілю кінематичної в'язкості для розчину концентрацією 60% за умови випаровування з вільної поверхні при початковому тепловому потоці 6 кВт/м² зображено на рис. 2.

Інтегрування (1) за умови (3, 4) не видається можливим, але для оцінки впливу нерівномірності в'язкості на гідродинамічні параметри пливки можна скористатися апроксимаціями для μ з умови відповідності розрахункового середнього та балансового значення осередненої в'язкості.

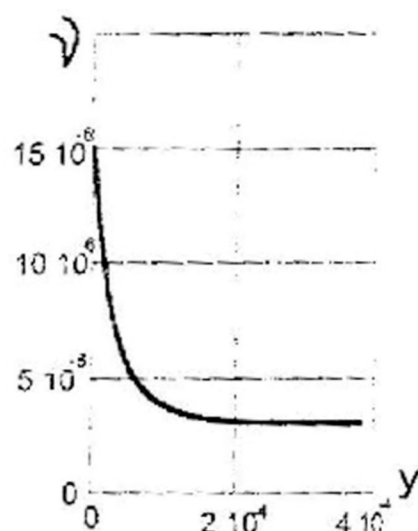


Рис. 2. Зміна в'язкості в перерізі пливки за співвідношенням (3, 4) на відстані 1 м від входу на циліндр випаровувального розчину з початковою концентрацією 60%, температурою 80 °C. Витрата розчину — $\Gamma_v = 4,15 \cdot 10^{-3}$ м³/с; тепловий потік — $q = 6$ кВт/м²; товщина пливки — $\delta = 3,75 \cdot 10^{-4}$ м; $Re = 10$; $\mu = 0,11$ м/с.

Профіль в'язкості можна апроксимувати залежністю

$$\mu = \mu_0 + A\xi^n \quad (5)$$

де μ_0 — мінімальне значення в'язкості на поверхні; $A = \mu_1 - \mu_0$; μ_1 — максимальне значення в'язкості на міжфазній поверхні.

Позначивши $B = \frac{\mu_1}{\mu_0}$, $A = B\mu_0 - \mu_0$, проінтегруємо (5) по товщині пливки δ

$$\bar{\mu} = \int_0^\delta [\mu_0 + (B\mu_0 - \mu_0)\xi^n] d\xi = \mu_0 + \frac{B\mu_0 - \mu_0}{n+1} \xi^n,$$

$$\text{звідки } \mu_0 = \bar{\mu} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{B}{n} \right)$$

Відповідно профіль в'язкості через осереднену в'язкість $\bar{\mu}$

$$\mu = \bar{\mu} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{B}{n} \right) + \bar{\mu} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n} \right) \xi^n. \quad (6)$$

Графіки профілів в'язкості при різних значеннях показника степеню n зображено на рис. 3.

Як видно з рис. 3 співвідношення (6) при значеннях показника степеню n від 2 до 4 наближено апроксимують профіль в'язкості на різних відстанях від входу.

$$\text{Позначивши } B_1 = \frac{n+1}{n} - \frac{B}{n}, \quad B_2 = \frac{n+1}{n} (B-1)$$

рівняння руху для встановленого потоку матиме вигляд

$$\delta^2 \operatorname{erfc}\left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right) - \bar{\mu} (B_1 - B_2 \xi^n) \frac{d\bar{\mu}}{d\xi} = 0. \quad (7)$$

Інтегрування (7) при граничних умовах $\xi = 0$ та $\bar{\mu} = 0$ дає розподіл швидкостей в пливці, профілі яких для показників степеню n в апроксимації (6) від 2 до 4 мають вигляд:

$$\text{при } n = 2, \quad B_1 = \frac{3}{2} - \frac{B}{2}; \quad B_2 = \frac{3}{2} B - \frac{3}{2}; \quad c = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

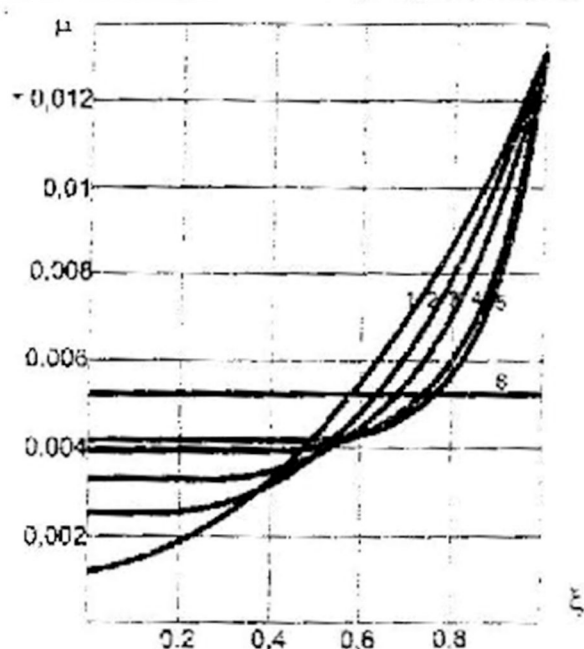


Рис. 3. Профілі швидкості за співвідношенням (5)

при $B = 2,5$
1 - $n = 2$; 2 - 3; 3 - 4; 4 - 6; 5 - 8; 6 - $\mu = \text{const}$

$$u = \frac{\delta^2 \rho g}{B_2 \mu} \left(\frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{c} - \frac{1}{2} \ln(c^2 + \xi^2) - \frac{1}{2} \ln c^2 \right) \quad (8)$$

при $n = 3$, $B_1 = \frac{4}{3} - \frac{B}{3}$; $B_2 = \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}$; $a = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$

$$u = \frac{\delta^2 \rho g}{B_2 \mu} \left(\frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a - \xi)^2}{a^2 - a\xi - \xi^2} + \left(\frac{1}{a^2 \sqrt{3}} - \frac{1}{a\sqrt{3}} \right) \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} \frac{2\xi - a}{a\sqrt{3}} - \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2 - a\xi + \xi^2}{(a - \xi)^2} \right) \quad (9)$$

при $n = 4$, $B_1 = \frac{5}{4} - \frac{B}{4}$; $B_2 = \frac{5}{4}B - \frac{5}{4}$; $b = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$

$$u = \frac{\delta^2 \rho g}{\mu B_2} \left(\frac{1}{4b^2 \sqrt{2}} \ln \frac{\xi^2 + \xi b \sqrt{2} - b^2}{\xi^2 - \xi b \sqrt{2} - b^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}b^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi \sqrt{2}}{b} + 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{2}b^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi \sqrt{2}}{b} - 1 \right) - \frac{1}{2b^2} \operatorname{arctg} \frac{\xi^2}{b^2} \right) \quad (10)$$

Профілі швидкості відповідно до отриманих співвідношень при $B = 2,5$ зображено на рис. 4.

Як видно з рис. 4 при параболічному законі зміни в'язкості маємо найбільше відхилення швидкості (крива 4) від параболічного профілю (крива 1) відповідно до випадку рівномірно розподіленої в'язкості.

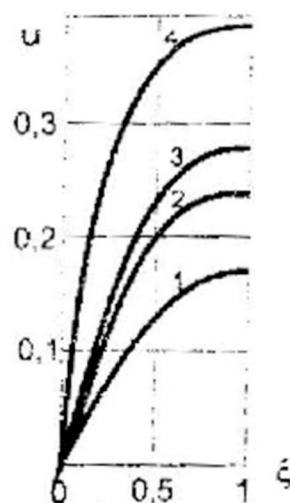


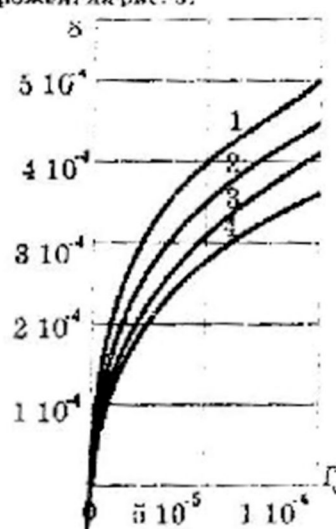
Рис. 4. Профілі швидкості в'язкості при

 $Re = 10$; $\mu = 1$; $\rho = \mu = \text{const}$.1 - $n = 4$; 2 - $n = 3$; 3 - $n = 2$.

Для знаходження товщини плівки за умови різного профілю розподілу в'язкості за співвідношенням

$$\delta = \frac{\Gamma_v}{u} = \frac{\Gamma_v}{\int_0^\delta u d\xi} \quad (11)$$

необхідно проінтегрувати (8, 9, 10), що легко здійснюється в системі Mathcad. Аналітичні вирази для середніх швидкостей із-за громоздкості не приводяться. Графіки залежності товщини плівки в установившому режимі від шільності зрошення при різних профілях в'язкості зображені на рис. 5.

Рис. 5. Залежність товщини плівки від шільності зрошення при $Re = 10$; $\mu = 1$; $\rho = \mu = \text{const}$; 1 - $n = 4$; 2 - $n = 3$; 3 - $n = 2$.

Як видно з рис. 5 перерозподіл в'язкості з рівномірно розподіленою до профільної з максимумом на міжфазній поверхні і мінімумом на стінці призводить до більш заповненого профілю швидкості і, відповідно, до зменшення товщини плівки. Так, якщо в'язкість розподілена по квадратичному закону відношення товщини плівки до товщини при рівномірно розподіленій

в'язкості становить $\delta/\delta_0 = 0,72$. δ_0 — товщина плівки при рівномірно розподіленій в'язкості. Відповідно при показниках степеню $n = 8$ та $n = 4$ при ξ з формулі (8) відношення товщин плівок становлять 0,88 та 0,87. Зазначене свідчить, що в рухомій, допрітій до температури насичення плівці концентрованого розчину, в якій відбувається теплопередача в режимі випаровування з вільної поверхні і сформований певний профіль концентрації та в'язкості, довідне перемішування плівки (в результаті утворення парової бульбашки, або наявності механічних перешкод), викликає вирівнювання профілю в'язкості, талмування плівки та її локальне потовщення. Зазначений механізм спричиняє нерівномірність руху та утворення певної різноманітності хвиль.

Висновки: При випаровуванні розчинника з поверхні ламінарно стікаючої плівки висококонцентро-

ваного розчину виникає поперечний градієнт концентрації. Якщо єдиним механізмом вирівнювання концентрації є молекулярна дифузія, виникає значний поперечний градієнт в'язкості, що призводить до суттєвої деформації профілю швидкості; при цьому, максимальне відхилення товщини плівки від розрахункової при постійній поперечній в'язкості, досягає 30%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Синал Федченко Д.Е. Формулы для динамической и кинематической вязкости чистых и производственных сахарных растворов. В кн. — Тепло- и массообменные процессы в пищевой промышленности. Темат. Сб. науч. тр. — К.: УМК ВО, 1990. — 220 с.

Надійшла до редакції 00.09.09 р.