

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**Інститут** Навчально-науковий інженерно-технічний інститут ім. акад. І.С.Гулого  
**Кафедра** теплоенергетики та холодильної техніки

**«До захисту в ЕК»**

Директор інституту

\_\_\_\_\_ Сергій Блаженко  
(підпис) (ім'я та прізвище)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 р.

**«До захисту допущено»**

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Валентин Петренко  
(підпис) (ім'я та прізвище)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 р.

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
НА ЗДОБУТТЯ ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ МАГІСТРА**

зі спеціальності 142 Енергетичне машинобудування

(код та назва спеціальності)

освітньо-професійної програми \_\_\_\_\_

Холодильні техніка та технологія

на тему: Перевірка адекватності CFD моделей, гідродинаміки та теплообміну при течії в трубах з інтенсифікаторами теплообміну

Виконав: здобувач 2 курсу, групи ХМ-2-9М

\_\_\_\_\_ Бабич Олексій Анатолійович \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я, по батькові повністю)

(підпис)

Керівник \_\_\_\_\_ Грищенко Роман \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я)

(підпис)

Консультант \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я)

(підпис)

Рецензент \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я)

(підпис)

Я як здобувач Національного університету харчових технологій розумію і підтримую політику університету з академічної доброчесності. Я не надавав і не одержував недозволеної допомоги під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідні джерела.

\_\_\_\_\_ (підпис та прізвище здобувача)

Київ – 2023 р.

# НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Навчально-науковий інженерно-технічний інститут ім.акад. І.С.Гулого  
Кафедра теплоенергетики та холодильної техніки

Освітній ступінь магістр

Спеціальність 142 Енергетичне машинобудування  
(код і назва)

Освітньо-професійна програма Холодильні техніка та технології

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри **ТЕХТ**

проф. Петренко В.П.

“07” листопада 2022 року

## **З А В Д А Н Н Я**

### **НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ ЗДОБУВАЧА**

**Бабича Олексія Анатолійовича**

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Перевірка адекватності CFD моделей, гідродинаміки та теплообміну при течії в трубах з інтенсифікаторами теплообміну

керівник роботи к.т.н., Грищенко Р.В.

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом закладу вищої освіти від 07.11.2022 року № 794-кв

2. Строк подання здобувачем роботи 06.02.2022 року

3. Вихідні дані до роботи Розроблення готових тривимірних моделей, що дасть змогу більш якісно використовувати інтенсифікатори теплообміну на практиці, а також скоротити ресурсні затрати на проектування різного роду теплообмінних апаратів.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити): Вступ, Розділ 1. Аналітичний огляд літератури, Розділ 2. Теоретичні засади моделювання, Розділ 3. Створення геометричної моделі, Розділ 4. Обробка результатів дослідження, Розділ 5. Охорона праці, Висновки, Список використаних джерел

5. Перелік графічного матеріалу

---

---

---

---



## АНОТАЦІЯ

Актуальність даної роботи полягає у тому, що вона спрямована на аналіз адекватності тривимірних моделей, гідродинаміки та теплообміну при течії в різного роду каналах з інтенсифікаторами теплообміну за допомогою сучасних комп'ютерних програм на базі МСЕ аналізу. Розроблення готових тривимірних моделей, що дасть змогу більш якісно використовувати інтенсифікатори теплообміну на практиці, а також скоротити ресурсні затрати на проектування різного роду теплообмінних апаратів.

Метою роботи є проведення тривимірного моделювання та аналіз адекватності цих моделей експериментами.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що запропоновано новий підхід у виборі та аналізі інтенсифікаторів теплообміну за допомогою сучасних комп'ютерних програм. Проведено апробацію результатів моделювання з експериментальними дослідженнями, що демонструє високу збіжність результатів.

Практичне значення отриманих результатів.

Розроблено тривимірні моделі з інтенсифікаторами теплообміну та розрахункові сітки з межею інфляції 0,001мм.

Інформативною базою роботи виступили праці вітчизняних та зарубіжних науковців, статті в наукових та періодичних виданнях.

***Ключові слова:*** *тривимірне моделювання, Ansys CFX, моделі турбулентності, гідродинамічні процеси.*

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	7
<b>РОЗДІЛ 1</b>	
<b>АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	9
1.1 Способи інтенсифікації теплообміну.....	9
1.2 Загальні положення про рух та теплообмін в однофазних потоках.....	10
1.3. Положення про рух та теплообмін в однофазових потоках.....	16
1.4. Математичне моделювання.....	33
1.5. Вибір методу інтенсифікації.....	43
1.6 CFD – моделювання процесів турбулентної природної та змішаної конвекції.....	46
1.7 Висновки.....	52
<b>РОЗДІЛ 2</b>	
<b>ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ</b> .....	54
2.1 Метод скінченних елементів.....	54
2.2 Робоче середовище Workbench.....	61
2.3 Алгоритм геометричного моделювання тривимірної моделі.....	63
2.4 Створення розрахункової сітки в ANSYS Meshing.....	68
2.5 Передобробка в CFX-Pre.....	77
2.6 ANSYS CFX Solver.....	78
2.7 ANSYS CFX-Post.....	79
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
<b>СТВОРЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ</b> .....	80
<b>РОЗДІЛ 4</b>	
<b>ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ</b> .....	88

## **РОЗДІЛ 5**

<b>ОХОРОНА ПРАЦІ</b> .....	97
5.1 Вимоги до приміщення.....	97
5.2 Вимоги до особистого робочого місця працівника .....	98
5.3 Соціальні та профілактичні засоби захисту робітників, які працюють з комп'ютером.....	100
5.4 Безпечне налаштування робочої станції .....	100
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	101
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	103

## ВСТУП

Підприємства харчової галузі, в яких технологічні процеси пов'язані з тепловими, насичені обладнанням для нагрівання та охолодження рідин. На деяких енергоємних виробництвах, наприклад цукровому, на теплообмінні апарати (теплообмінники, випарні апарати, вакуум апарати, сушильна установка, вакуум-конденсаторна установка) припадає ледь частина капіталовкладень з усього тепло технологічного обладнання підприємства. Крім того, на харчових підприємствах поверхня теплообміну виготовляється переважно із дорогих нержавіючих сталей, що спонукає до пошуку методів інтенсифікації теплообміну і зменшення металоємності тепло технологічного теплообмінного обладнання.

В ракетній та літакобудівній галузях - застосування високоефективних теплообмінників для охолодження двигунів та інших конструкцій апаратів є взагалі необхідною умовою конструювання літальних апаратів, оскільки дає можливість збільшити корисну вантажопідйомність.

В цукровій промисловості, де нагрівання соків здійснюється вторинною парою із випарної установки, яка має значний вміст газів, що не конденсуються, особливого значення набуває питання зменшення концентрації газів в нагрівних камерах, наявність яких як суттєво погіршує умови конденсації пари і, відповідно, інтенсивність теплообміну, так і зменшує корисний температурний напір із-за зниження парціального тиску пари у парогазовій суміші.

Підприємств харчової галузі, де здійснюється нагрівання продуктів виробництва, виникає проблема утворення накипу. Відкладання накипу є причиною, як завищених поверхонь теплообмінних та випарних апаратів, так і, в деяких випадках, встановлення резервних теплообмінних поверхонь, що суттєво збільшує металоємність тепло технологічного обладнання. Особливо значення ця проблема набуває в процесах концентрування розчинів у випарних апаратах цукрового виробництва, оскільки крім встановлення завищених

величин поверхні теплообміну призводить до зупинки безперервного виробництва на очищення обладнання від накипу.

Застосування штучної турбулізації потоку в даний час визнано найбільш ефективним способом інтенсифікації теплообміну в каналах з однофазними теплоносіями. Але в сучасній світовій літературі наявна обмежена кількість робіт присвячених цим дослідженням. Сучасний розвиток комп'ютерних технологій дозволяє провести дослідження тепло гідравлічної ефективності труб в широких межах із застосуванням тривимірних CFD програм (CFX, Fluent, STAR-CD і т.д.). В даній магістерській роботі виконано аналіз адекватності тривимірних моделей гідродинаміки та теплообміну при течії в трубах з інтенсифікаторами теплообміну, для комп'ютерного моделювання застосовано програму ANSYS Acad. 15.0, licence number: 1023420.

# РОЗДІЛ 1

## АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

### 1.1 Способи інтенсифікації теплообміну.

Розрізняють пасивні або конструктивні та активні, або режимні способи інтенсифікації теплообміну.

До перших відносяться методи, що здійснюють локальну дію на структуру потоку теплоносіїв штучним турбулізатором, накаткою, перфорованим оребренням, штучними вихор утворювачем, тощо.

До активних, або режимних способів відносяться методи, що діють на структуру потоку переважно за межами теплообмінної поверхні і мають об'ємну дію - пульсація витрати теплоносія та тиску на вході в апарат, вдування інертного газового компонента в потік, з вібрацією поверхні теплообміну, застосування електростатичного та акустичних полів.

Комбіновані методи можуть одночасно включати як конструктивні так і режимні способи інтенсифікації теплообміну і являються найбільш ефективними.

Згадані методи інтенсифікації застосовуються як для однофазних потоків без зміни агрегатного стану, так і потоків з фазовими перетвореннями.

Аналіз методів інтенсифікації теплообміну в однофазних потоках та в теплових процесах з фазовими перетвореннями розглянута в багатьох наукових джерелах.

Застосування штучної турбулізації потоку в даний час визнано найбільш ефективним способом інтенсифікації теплообміну в каналах з однофазними теплоносіями. Слід відзначити монографію [1], огляди [2-4], а також роботи [5, 6]. У ряді випадків можуть бути ефективні і інші методи інтенсифікації теплообміну, наприклад застосування спіральних або кручених труб при ламінарному плинні теплоносіїв, застосування закрученого потоку багатохідних шнеків перед тією ділянкою каналу, в якій має місце підвищене тепловиділення [10, 11]. У криволінійних каналах під впливом відцентрових сил розвиваються

гвинтові структури, що охоплюють весь переріз каналу. Крім того, при досить крутих поворотах можуть виникати відривні зони з системою двовимірних і тривимірних вихорів в них. На увігнутій стінці може з'явитися система гвинтових вихорів з протилежним напрямком обертання. У турбулентних потоках все це веде до додаткової турбулізації, зростання тепловіддачі і гідравлічного опору.

## 1.2 Загальні положення про рух та теплообмін в однофазних потоках

Якщо сили в'язкості переважають динамічні рідина рухається пошарово без перемішування. В загальному випадку такий режим називають ламінарним. Для знаходження поля швидкостей розв'язують рівняння руху, яке для пошарової течії між плоскими поверхнями (течія Куетта) має вигляд:

$$\rho \frac{du}{d\tau} = -\frac{dP}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

де  $u$  – повздовжня складова швидкості руху рідини;  $x, y$  – повздовжня та поперечна координати;  $\tau$  - час;  $\mu$  - динамічна в'язкість;  $P$  – тиск.

Для стаціонарного режиму рівняння (1.1) набуває вигляду:

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

розв'язком якого за граничних умов  $y = 0, u = 0, y = \delta/2, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , є функція розподілу швидкості:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) (y^2 - \delta y) \quad (1.3)$$

В круглій трубі за умови ламінарного режиму руху профіль швидкості розвивається від умовно плоского на вході в трубу до параболічного за межами ділянки гідродинамічної стабілізації  $L_{ну}$ . Наближений графічний образ профілю, що розвивається зображено на рис. 1.1.

*Рис. 1.1 Розвиток профілю швидкості в гідродинамічній початковій ділянці труби.*

Рівняння руху для стабілізованого потоку в трубі записують циліндричній формі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (1.4)$$

де  $r$  - поточний радіус труби від осі до стінки.

Враховуючи, що  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right)$  отримаємо:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.5)$$

Подвійним інтегруванням по  $r$  при граничних умовах: при  $r = r_o$ ,  $u = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ , отримуємо профіль швидкості в круглій трубі:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_o^2 - r^2) \quad (1.6)$$

де  $r_o$  – радіус труби.

Відповідно середню швидкість  $U$  знайдемо інтегруванням виразу ( 1.6 ) для всього перерізу труби з врахуванням , що  $S = \pi r_o^2$ ;  $dS = 2\pi r dr$

$$U = \frac{1}{S} \int_S u dS = \frac{r_o^2}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) = \frac{u}{2} \left( \frac{r_o^2}{r_o^2 - r^2} \right). \quad (1.7)$$

Профіль швидкості ламінарного потоку в трубі через середню швидкість виразиться рівнянням:

$$u = 2U \left( 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) \quad (1.8)$$

Дотична напруга в довільній точці потоку визначається градієнтом

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} \quad (1.9)$$

Профіль швидкості відповідає усталеному руху за межами відстані  $L_{ny}$ . На вхідній ділянці труби, тобто на ділянці гідродинамічної стабілізації, профіль швидкості розвивається і змінюється по довжині від плоского до параболічного в режимі стабілізованого руху. Якщо знехтувати градієнтом тиску поперек труби рівняння руху в циліндричній формі набирає вигляду:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (1.10)$$

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} + r w \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \quad (1.10)$$

де  $w$  – поперечна складова швидкості потоку.

Розв'язання рівняння (1.10) викликає значні труднощі. Наближений розв'язок (1.10) лише при малих числах  $Re < 1$  надано в [ 2 ] і має вигляд:

$$u = u_{\infty} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{C_i}{m_i} e^{-m_i X} \left\{ I_0 \left( m_i \frac{r}{r_o} \right) - I_0(m_i) \right\} \quad (1.11)$$

де  $u_{\infty}$  - Пуазейлівський розподіл швидкості для стабілізованого потоку

$$u_{\infty} = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right); \quad X = \frac{x}{r_o}; \quad I_0 - \text{функція Бесселя нульового порядку.}$$

При  $Re = 0.1$   $C_1 = -2,9438$ ;  $C_2 = 3,6846$ ;  $C_3 = -4,3129$

$$m_1 = 5,136; \quad m_2 = 8,4172; \quad m_3 = 11,62,$$

Якщо число Рейнольдса перевищує критичне значення, має місце поступове утворення турбулентних вихорів в режимі чергованості ламінарного та

турбулентного руху в певній точці. В міру зростання числа Рейнольдса частота утворення та час існування вихорів збільшується доти, поки інтервал з ламінарним рухом зникне і режим руху рідини набере статусу розвинутої турбулентності.

*Рис.1.2 Профілі осередненої швидкості в ламінарному (А) та турбулентному (В) стабілізованому потоці.*

В загальному випадку турбулентний рух розглядається як результат накладання рухів ( пульсацій, вихорів) різних масштабів. Масштабом пульсацій прийнято називати порядок величини тих відстаней, протягом яких суттєво змінюється швидкість руху. В міру зростання числа Рейнольдса з'являються масштабні пульсації, які мають найбільшу амплітуду і відіграють основну роль в турбулентному потоці. Їх швидкість по порядку величини відповідає зміні середньої швидкості  $\Delta \bar{u}$  на відстані  $l$  – масштабам турбулентності. При значних числах Рейнольдса присутні як великі так і мілко масштабні пульсації , частота яких більша, а амплітуда менша. Від пульсацій з великими масштабами енергія переходить до пульсацій з меншими масштабами практично без дисипації. Далі енергія передається до пульсацій з малими масштабами та високими частотами; далі енергія пульсацій дисипує – переходить в тепло в пульсаціях самих малих масштабів.

В турбулентному режимі руху швидкість в кожній точці простору прийнято виражати як суму осередненої в часі та пульсаційних швидкостей

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + \bar{u}_x \\ u_y &= u'_y + \bar{u}_y \\ u_z &= u'_z + \bar{u}_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

де  $\bar{u} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\tau+\tau_0} u d\tau$  - осереднена в часі швидкість;  $u_x, u_y, u_z$  – проекції швидкості по

координатам  $x, y, z$ ; ;  $u'_x, u'_y, u'_z$  – пульсації швидкості по координатам  $x, y, z$ .

Турбулентні пульсації характеризуються: амплітудою  $\sigma_{x,y,z}$ , інтенсивністю  $I_{x,y,z}$ , та турбулентною енергією  $E$ , які виражаються співвідношеннями:

### Амплітуда пульсацій

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\tau_o} \int_{\tau}^{\tau+\tau_o} u_x'^2 d\tau = \overline{u_x'^2} \\ \sigma_y &= \frac{1}{\tau_o} \int_{\tau}^{\tau+\tau_o} u_y'^2 d\tau = \overline{u_y'^2} \\ \sigma_z &= \frac{1}{\tau_o} \int_{\tau}^{\tau+\tau_o} u_z'^2 d\tau = \overline{u_z'^2},\end{aligned}\tag{1.13}$$

### Інтенсивність пульсацій

$$I_x = \frac{\sqrt{\sigma_x}}{\bar{u}}, \quad I_y = \frac{\sqrt{\sigma_y}}{\bar{u}}, \quad I_z = \frac{\sqrt{\sigma_{zx}}}{\bar{u}}\tag{1.14}$$

$$\bar{u} = \sqrt{\overline{u_x^2} + \overline{u_y^2} + \overline{u_z^2}}\tag{1.15}$$

### Турбулентна енергія пульсацій

$$E = \frac{1}{2}(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2})\tag{1.16}$$

Внаслідок дії турбулентних пульсацій швидкості виникає дотична напруга, величина якої визначається як:

$$\tau' = -\rho \overline{u_x' u_y'}\tag{1.17}$$

Мірою інтенсивності турбулентних пульсацій може також бути величина  $u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ , яка має розмірність м/с і називається динамічною швидкістю.

Основи напівемпіричної теорії турбулентності були закладені Прандтлем та Тейлором, згідно якої інтенсивність турбулентних пульсацій по перерізу каналу монотонно наростає від стінки до осі потоку. Турбулентний потік умовно розділяють на 3 прошарка – ламінарний, прошарок з нерозвинутою та розвинутою турбулентністю. Границі зон повинні стикуватися між собою, тому зону з ламінарним та квазітурбулентним режимом руху часто об'єднують в один прошарок з нерозвинутою турбулентністю.

Оскільки турбулентність є по-суті хаотичний рух вихорів різних масштабів, величина яких збільшується в міру віддаленості від стінки, кожний

турбулентний вихор при своєму переміщенні безперервно попадає з області, де локальна швидкість потоку відрізняється від швидкості вихорам. За цих умов виникає додатковий опір руху тим більший, чим інтенсивніші вихори та більший градієнт осередненої швидкості. Формально опір в турбулентному потоці аналогічний опору в ламінарному, якщо в'язкість замінити на умовну турбулентну в'язкість, тому дотичну напругу виражають як:

$$\tau = -(\mu + \mu_t) \frac{du}{dy} \quad (1.18)$$

де  $\mu_t$  – турбулентна ( умовна) в'язкість

Найбільш розповсюдженими для коефіцієнта турбулентного переносу  $\mu_t$  є залежності Прандтля та Ван-Дрїста відповідно:

$$\mu_t = \rho l_y^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right) \quad (1.19)$$

$$\mu_t = \rho l_y^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right) \left[ 1 - \exp\left( -\frac{y^+}{26} \right) \right]^2 \quad (1.20)$$

Експоненціальний член в рівнянні Ван-Дрїста дає характер зміни турбулентної в'язкості в перерізі потоку від зони розвинутої турбулентності  $y^+ = 26$  до, «0» на стінці при  $y^+ = 0$ .

Профіль осередненої швидкості можна отримати підставивши в рівняння руху замість молекулярної ефективну в'язкість  $(\mu + \mu_t)$ .

Швидкість в турбулентному потоці можна моделювати універсальним логарифмічним профілем у відповідності до тришарової моделі Мартинеллі-Нікурадзе, згідно якої потік ділиться на зону з ламінарним прошарком ( $y^+ \leq 5$ ); зоною розвинутої ( $y^+ \geq 30$ ), та нерозвинутої турбулентності ( $5 \leq y^+ \leq 30$ ):

$$u^+ = y^+ \text{ при } (y^+ \leq 5) \quad (1.21)$$

$$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05 \text{ при } (5 \leq y^+ \leq 30) \quad (1.22)$$

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \text{ при } (y^+ \geq 30) \quad (1.23)$$

де  $y^+ = \frac{yu^*}{\nu}$ ,  $u^+ = \frac{u}{u^*}$ ,  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ , безрозмірні відстань, швидкість та динамічна швидкість, відповідно;  $\tau_w$  - дотична напруга на стінці.

В загальному рівнянні балансу турбулентної енергії важливими є точки зору аналізу перенесення турбулентної теплоти та імпульсу в граничному шарі є величина інтенсивності вироблення турбулентності ( турбулентної енергії)  $T$ , яка враховує, яка кількість енергії осередненого потоку переходить в кінетичну енергію турбулентних пульсацій

$$T = \rho u'_x u'_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \quad (1.24)$$

та її дисипації

$$D = (\mu + \mu_t) \frac{E}{\rho l_y^2} \quad (1.25)$$

де  $l_y = 0.4y$  - довжина шляху змішування.  $\mu_t$  - коефіцієнт турбулентного переносу імпульсу.  $E$  - турбулентна енергія пульсацій (1.16).

Процеси вироблення та дисипації енергії існують одночасно в кожній точці турбулентного потоку.

З виразу (1.24) видно, що інтенсивність вироблення турбулентності пропорційна добутку дотичної напруги турбулентних пульсацій на градієнт осередненої швидкості. Тому важливим фактором інтенсифікації теплообміну у пристінному шарі є організація умов проникнення турбулентних вихорів із ядра потоку у пристінний шар, де має місце максимальний градієнт осередненої швидкості, і, відповідно, вироблення турбулентності. Якщо турбулентні вихори утворюються і дисипують на значній відстані від пристінного ламінарного прошарку має місце лише зростання гідравлічного опору без помітної інтенсифікації тепловіддачі.

### 1.3 Течія і теплоперенесення у каналах

#### 1.3.1 Загальні характеристики течії у каналах

Течія в основному направлена уздовж осі  $z$  (назвемо її поздовжньою координатою на відміну від поперечних координат  $x$  і  $y$ ). Серед трьох компонент швидкості  $u$ ,  $v$  і  $w$  поздовжня складова  $w$  звичайно набагато більше поперечних  $u$  і  $v$ . Течія викликається градієнтом тиску  $\partial p / \partial z$ , який звичайно

від'ємний. Тиск практично постійний у поперечному перетині і змінюється уздовж осі  $z$ .

Оскільки зміна швидкості і температури по осі  $z$  мала в порівнянні зі змінами їх по осі  $x$  або  $y$ , то дуже часто нехтують в'язким напруженням, яке викликане градієнтом  $\partial w/\partial z$  і перенесенням тепла за рахунок градієнта  $\partial T/\partial z$ . При цьому, звичайно, член  $\partial p/\partial z$  в рівнянні для поздовжньої складової швидкості вважають таким, що дорівнює  $\partial \bar{p}/\partial z$ , де  $\bar{p}$  відповідає середньому значенню тиску в поперечному перетині. Течія у каналі може бути стаціонарною або нестаціонарною. Будемо розглядати тільки стаціонарну течію.

Розглянемо течію (рис. 1.3) рідини у каналі при однорідному полі швидкості  $w$  на вході. У міру того як рідина рухається уздовж каналу, течія біля стінки сповільнюється через тертя об стінки. Швидкість течії в ядрі потоку залишається постійною по перетину, але збільшується уздовж каналу. При цьому відбувається перетікання рідини від пристінкової області в ядро потоку. Приграничні шари біля стінок каналу поступово зростають і врешті-решт зливаються. На цьому етапі ядро потоку зникає і у всьому поперечному перетині переважають ненульові градієнти швидкостей. До цього моменту розвиток профілю швидкості завершується і поле течії для всіх подальших перетинів стає незалежним від поздовжньої координати  $z$ . Градієнт тиску  $\partial \bar{p}/\partial z$  також перестає змінюватися уздовж осі  $z$ .

Область течії, в якій компоненти швидкості не залежать від поздовжньої координати, називається областю *повністю гідродинамічно розвиненої течії*. Область, в якій розподіл швидкості визначається геометричною формою каналу і приходить у відповідність до тертя на стінках, називається *початковою ділянкою*.

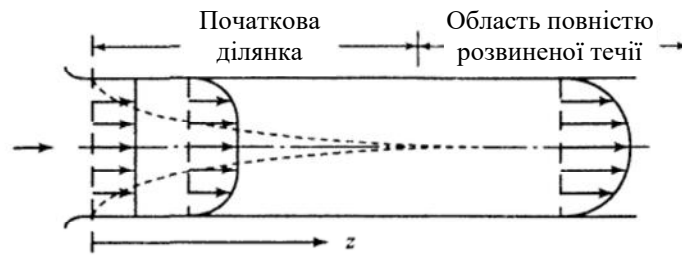


Рисунок 1.3 - Розвиток течії

Задачі про течії в прямокутному каналі є в загальному випадку тривимірними. Проте для області повністю розвинутої течії задача стає двовимірною, оскільки зміни швидкості уздовж координати  $z$  відсутні (для двовимірних течій, наприклад, у каналі круглого перетину або у плоскопаралельному каналі, задача про повністю розвинену течію стає одновимірною). Можна одержати розв'язок відразу для повністю розвинутої течії, не розглядаючи початкової ділянки. Таким чином, обмежуючись повністю розвинутою течією, ми зменшуємо розмірність задачі і виграємо за рахунок набагато простіших обчислень.

У багатьох практичних задачах довжина каналу набагато більше його поперечних розмірів. Таким чином, початкова ділянка займає тільки невелику частину довжини каналу. У такому разі розумно розглядати весь канал, ґрунтуючись на повністю розвиненій течії. Тому аналіз повністю розвинених течій має істотне практичне значення.

Розглянемо, що відбувається з поперечними компонентами швидкості в області повністю розвинутої течії. У ситуації, показаній на рис. 1.5, течія стає строго поздовжньою, і поперечні швидкості  $u$  і  $v$  дорівнюють нулю. Проте існують складніші течії, при яких поперечні швидкості не дорівнюють нулю і у області повністю розвинутої течії. Подібна особливість спостерігається при течіях в криволінійних або каналах, які обертаються, а також при течіях з вільною конвекцією і при деяких турбулентних течіях в каналах некруглого поперечного перетину. Залежно від того, дорівнюють поперечні компоненти швидкості нулю чи ні, повністю розвинені течії можуть бути розділені на прості і складні.

*Складна повністю розвинена течія* у каналі характеризується такими залежностями:

$$u = u(x, y); \quad (1.26)$$

$$v = v(x, y); \quad (1.27)$$

$$w = w(x, y). \quad (1.28)$$

Помітимо, що швидкості  $u$ ,  $v$  і  $w$  не залежні від поздовжньої координати  $z$ , при цьому швидкості  $u$  і  $v$  можуть бути ненульовими, навіть якщо вони не залежать від  $z$ .

*Прості повністю розвинені течії* у каналі визначаються таким чином:

$$u = 0; \quad (1.29)$$

$$v = 0; \quad (1.30)$$

$$w = w(x, y). \quad (1.31)$$

Ще однією характеристикою простої повністю розвиненої течії є те, що тиск постійний по поперечному перетину і змінюється лінійно уздовж поздовжньої координати, тобто

$$p = p(z); \quad (1.32)$$

$$dp/dz = const. \quad (1.33)$$

Як ми скоро побачимо, тільки *прості* повністю розвинені течії описуються рівнянням типу рівнянь теплопровідності. Для *складних* повністю розвинених течій також можна спростити обчислення за рахунок зменшення розмірності, але через наявність поперечних швидкостей потрібне включення в основні диференціальні рівняння конвективних членів. Для визначення цих швидкостей необхідне розв'язання взаємозв'язаних рівнянь руху і нерозривності у поперечному перетині, що є дуже складною задачею.

Прості повністю розвинені течії звичайно реалізуються далі входу в прямі канали постійного поперечного перетину. Щоб течія залишалася повністю розвиненою, такі властивості рідини, як в'язкість і густина (а також теплопровідність і теплоємність при тому, що далі розглядається повністю розвинене теплоперенесення), повинні залишатися постійними. Що стосується геометричної форми, то поперечний перетин каналу може бути представлений в

декартовій  $(x, y)$  або полярній  $(\theta, r)$  системі координат. Осесиметрична система координат  $(x, r)$  при аналізі течій у каналах не використовується, в цій системі координат можна представити заокруглений (зігнутий) канал прямокутного поперечного перетину, але це призведе до складної течії.

### 1.3.3 Математичне поставлення задачі визначення поля швидкості

**Основні рівняння.** У разі стаціонарної ламінарної тривимірної течії у каналі рівняння для складової швидкості уздовж осі  $z$  може бути записане у вигляді

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.34)$$

де у лівій частині представлені конвективні члени, а в правій – члени, які відповідають в'язким напруженням і градієнту тиску. За допомогою виразів (1.33) —(1.37) для простої повністю розвиненої течії, яка тут і розглядається, перетворюємо (1.38) до вигляду

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.35)$$

З фізичної точки зору це рівняння є балансом між тиском і в'язким напруженням, що викликається змінами  $w$  по перетину. Цікаво, що у виразі (1.39) відсутня густина рідини. Помітимо також, що  $\partial p / \partial z$  - просто константа у всьому поперечному перетині. Видно, що (1.39) відповідатиме стаціонарному рівнянню (1.35), якщо зробити такі заміни:

$$\phi = w; \quad (1.36)$$

$$\Gamma = \mu; \quad (1.37)$$

$$S = dp/dz. \quad (1.38)$$

Таким чином, розрахунок поля поздовжньої швидкості з математичної точки зору подібний розв'язку задачі теплопровідності з постійною швидкістю генерації тепла.

**Безрозмірна форма.** Для знаходження параметрів, що визначають поле швидкості, корисно представити (1.39) у безрозмірному вигляді. При сталій в'язкості це рівняння зручно записати як

$$0 = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + 1, \quad (1.39)$$

де безрозмірні координати  $X$  і  $Y$  мають вигляд

$$X = x/D; \quad (1.40)$$

$$Y = y/D. \quad (1.41)$$

Тут  $D$  - деякий характерний розмір поперечного перетину каналу, наприклад, діаметр або радіус круглого каналу, довжина однієї із сторін прямокутного перетину каналу або гідравлічний діаметр, що обчислюється за формулою (1.42).

Безрозмірна швидкість

$$W = \frac{\mu w}{-(dp/dz)D^2}. \quad (1.43)$$

При течії в каналі тиск  $p$  зменшується уздовж осі  $z$ . Тому величина  $\partial p/\partial z$  додатна.

Оскільки вираз (1.43) не містить параметрів, то його розв'язання залежить тільки від граничних умов. Вони задаються геометричними характеристиками каналу і вимогою, щоб швидкість  $w$  на стінках дорівнювала нулю. Таким чином, розподіл безрозмірної швидкості  $W$  залежить тільки від форми каналу (а не від фізичних розмірів) і не залежить від значень в'язкості, перепаду тиску, числа Рейнольдса та ін. Розмірна швидкість  $w$  може бути знайдена за (1.46) при підстановці конкретних значень в'язкості, градієнта тиску і характерного розміру.

### 1.3.4 Інтегральні характеристики течії

Течія у каналі звичайно характеризується деякими спеціальними величинами і параметрами. Розглянемо деякі з них.

**Деякі корисні визначення.** Гідравлічний діаметр поперечного перетину каналу розраховується за формулою

$$D_h = 4A/P, \quad (1.44)$$

де  $A$  - площа поперечного перетину;  $P$  - змочений периметр (довжина тієї границі, на якій рідина стикається зі стінками каналу). Число 4 в (1.47) використовується для того, щоб зробити гідравлічний діаметр  $D_h$  круглої труби таким, що дорівнює рівним діаметру цієї труби. Для каналу квадратного поперечного перетину  $D_h$  дорівнює довжині сторони квадрата.

Середня швидкість  $\bar{w}$  в поперечному перетині каналу визначається так, щоб об'ємна витрата через канал дорівнювала

$$\bar{w} = \frac{\iint w dx dy}{A} = \frac{\iint w dx dy}{\iint dx dy}. \quad (1.45)$$

Тут подвійні інтеграли позначають інтегрування по поперечному перетину каналу.

Число Рейнольдса для течії в каналі визначається виразом

$$R_e = \frac{\rho \bar{w} D_h}{\mu}, \quad (1.46)$$

де  $\rho$  і  $\mu$  - густина і в'язкість рідини.

Безрозмірною характеристикою градієнта тиску є коефіцієнт тертя  $f$ , який визначається трьома-чотирма різними способами. Надалі використовуватимемо такий вираз:

$$f = \frac{(dp/dz) D_h}{(1/2) \rho \bar{w}^2}. \quad (1.47)$$

Потрібно бути дуже уважним при порівнянні значень, одержаних за (1.50), із значеннями, які знайдені за іншими джерелами. Інші способи визначення, які трапляються часто, дають значення  $f$  в 2 або 4 рази менші, ніж розраховані.

Хоча  $W$  є прийнятною безрозмірною швидкістю для отримання (1.43), іншою корисною безрозмірною величиною може бути  $w/\bar{w}$ . Для каналу деякої заданої форми існує універсальний розподіл  $w/\bar{w}$ .

**Важливість інтегральних параметрів.** Чисельний розрахунок поля швидкості в каналі закінчується, коли розв'язане рівняння (1.39) або (1.43). Обчислення значень величин  $\bar{W}$  або  $f Re$  є просто подальшою обробкою результатів. Ви повинні розуміти, що така обробка не істотна для основної задачі

отримання поля швидкості. Вона проводиться для подання результатів у формі, яка є звичною і знайомою інженерам. На практиці значно поширені різні визначення коефіцієнта тертя і відповідних величин. Жодне з них не повинне розглядатися як найбільш правильне або найбільш головне. Коли між визначенням величини і її розрахованим значенням підтримується належна відповідність, може мати місце будь-яке подання результатів.

### **1.3.5 Повністю розвинений теплообмін**

**Попереднє ознайомлення.** Точно так, як і поле швидкості в каналі має початкову ділянку і область повністю розвиненої течії, поле температури характеризується аналогічними тенденціями. На рис. 1.6 показані профілі температури у різних поперечних перетинах каналу. Рідина втікає в канал, маючи постійну температуру. Потім біля стінок каналу формуються і поступово збільшуються температурні приграничні шари. У результаті профіль температури по перетину встановлюється і не змінюється уздовж координати  $z$ . Ділянку, де температура  $T = T(x, y)$  і  $\partial T / \partial z = 0$ , можна розглядати як область повністю розвиненого теплообміну, але, як буде показано далі, це визначення обмежує область застосування аналізу повністю розвиненого теплообміну досить нецікавими випадками.

У ситуації, показаній на рис. 1.6, рідина одержує тепло від верхньої стінки і втрачає його на нижній. У області повністю розвиненого теплообміну рідина інтегрально не одержує і не втрачає тепло (от чому температура не змінюється уздовж осі  $z$ ). У цій області рух рідини абсолютно не впливає на розподіл температури. Задача вироджується в просту задачу стаціонарної теплопровідності у поперечному перетині без яких-небудь джерел тепла. Така задача легко розв'язується, але вона не відповідає реальній ситуації. При течіях в каналах звичайно має місце охолодження або нагрів рідини.

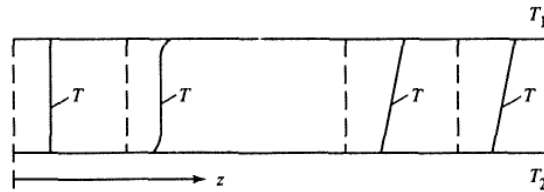


Рисунок 1.4 - Розвиток нуля температури

Якщо рідина в каналі піддається охолодженню або нагріву, то температура  $T$  повинна змінюватися уздовж осі  $z$ . Але навіть в цьому випадку для поля температури можна ввести поняття області повністю розвиненого теплообміну.

**Область повністю розвиненого теплообміну.** Коли деяка безрозмірна температура  $\Theta$  стає незалежною від  $z$ , хоча  $T$  продовжує залежати від  $x$ ,  $y$  і  $z$ , поле температури розглядатиметься як повністю розвинене. Таким чином, для області повністю розвиненого теплообміну

$$\Theta = \Theta(x, y). \quad (1.48)$$

Це означає, що *форма* температурного профілю залишається постійною при різних значеннях  $z$ . Іншими словами, дана область повністю розвиненого теплообміну характеризується постійним коефіцієнтом тепловіддачі.

Оскільки на поле температури впливають швидкості в каналі, то важливою умовою існування області повністю розвиненого теплообміну є повністю розвинене поле швидкості. Для того щоб підсумкове поле температури мало незмінну форму, необхідна деяка міра регулярності теплових граничних умов.

### 1.3.6 Математичне поставлення задачі визначення поля температури

**Диференціальне рівняння.** Рівняння енергії для стаціонарної повільної течії в каналі без в'язкої дисипації записується у вигляді

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1.49)$$

де  $c_p$  - питома теплоємність при постійному тиску;  $k$  - теплопровідність рідини. Ліва частина (1.53) відповідає конвективному перенесенню ентальпії в каналі, а члени правої частини описують теплопровідність у рідині. Оскільки звичайно

перенесення тепла уздовж осі  $z$  дуже мале в порівнянні з перенесенням в поперечному його перетині, то останнім членом у рівнянні (1.53) можна нехтувати. При простій повністю розвиненій течії у каналі поперечні швидкості  $u$  і  $v$  дорівнюють нулю, тому (1.53) спрощується і набуває вигляду

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (1.50)$$

Рівняння (1.50) відповідає стаціонарній формі узагальненого диференціального рівняння при такій заміні:

$$\phi = T; \quad (1.51)$$

$$\Gamma = k; \quad (1.52)$$

$$S = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.53)$$

Таким чином, аналіз теплообміну в каналі зводиться до розв'язання задачі типу задачі теплопровідності при формальному розгляді конвективного перенесення уздовж каналу у вигляді джерельного члена. Звичайно, задача може бути розв'язана в тому випадку, якщо заданий джерельний член. Це означає, що похідна  $\partial T / \partial z$  повинна бути задана або знайдена з наявної інформації. Така можливість з'являється, коли профілі температури схожі при різних  $z$ . Розподіл  $w$  в (1.57) передбачається відомим з аналізу повністю розвиненого поля швидкості.

**Деякі корисні визначення.** Нехай  $q_w$  позначає локальну густину теплового потоку на стінці каналу. У загальному випадку ця густина потоку нестала по всьому периметру каналу, через який здійснюється теплообмін. Через  $Q_w$  позначимо сумарний тепловий потік на одиницю поздовжньої довжини каналу. Отже,

$$Q_w = \int q_w ds, \quad (1.54)$$

де  $s$  - ділянка периметра поперечного перетину каналу; інтегрування проводиться по всій ділянці периметра, що обігрівається.

Середня температура рідини в заданому поперечному перетині звичайно визначається у вигляді так званої середньомасової температури, яка визначається виразом

$$T_b = \frac{\iint \rho c_w T dx dy}{\iint \rho c_w dx dy}. \quad (1.55)$$

Інтегрування проводиться по всьому перетину каналу. Для сталей  $\rho$  і  $c_p$  вираз (1.59) спрощується:

$$T_b = \frac{\iint w T dx dy}{\bar{w} A}, \quad (1.56)$$

де  $\bar{w}$  - середня швидкість;  $A$  - площа поперечного перетину каналу. Зручність такого визначення  $T_b$  полягає у тому, що сумарний потік ентальпії через перетин каналу може бути розрахований як  $(\rho \bar{w} A) c_p T_b$ .

Локальний коефіцієнт тепловіддачі  $h$  в деякій точці на стінці каналу визначається виразом

$$h = q_w / (T_w - T_b), \quad (1.57)$$

де  $T_w$  - локальна температура стінки. Можна також задати формулу для коефіцієнта тепловіддачі, що базується на середній або будь-якій іншій температурі стінки. Середній коефіцієнт тепловіддачі  $\bar{h}$  впливає у результаті усереднювання локальних значень  $h$  або на підставі середньої густини теплового потоку  $\bar{q}_w$  і середньої температури стінки  $\bar{T}_w$ . Хоча може бути використане будь-яке з цих визначень, все ж таки бажано застосувати те, яке дозволить легко розрахувати фізичну величину, яка нас цікавить.

Безрозмірною формою коефіцієнта тепловіддачі є число Нуссельта. Воно визначається як

$$Nu = hD/k, \quad (1.58)$$

де  $D$  - характерний розмір поперечного перетину каналу;  $k$  - теплопровідність рідини.

Середнє число Нуссельта  $\bar{Nu}$  розраховується за  $\bar{h}$  аналогічно. Використовуючи значення  $Nu$  або  $\bar{Nu}$ , що трапляються у літературі, необхідно уважно вивчити визначення, на яких вони базуються. Інакше можуть мати місце деякі помилкові обчислення. Необхідно запам'ятати, що в більшості випадків немає негативних або позитивних визначень - вони просто різні.

Один із способів визначення області повністю розвинутого теплообміну полягає у вимозі, щоб коефіцієнт тепловіддачі  $h$  або число Нуссельта  $Nu$  не залежали від координати  $z$ . Число Нуссельта для повністю розвинутого теплообміну при ламінарній течії є величиною постійною, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля. Воно залежить тільки від геометричних особливостей каналу і граничних умов для температури.

Існують чотири види граничних умов для температури, які часто трапляються і при яких реалізується область повністю розвинутого теплообміну.

**Постійна локальна густина теплового потоку.** Коли заданий розподіл локальної густини теплового потоку  $q_w$  по периметру каналу, який залишається незмінним уздовж осі  $z$ , то у області повністю розвинутого теплообміну температури в усіх точках поперечного перетину змінюються по  $z$  однаково і лінійно, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{dT_b}{dz} = \text{const} . \quad (1.59)$$

Іншими словами, розподіл температури в деякому перетині може бути одержаний додаванням константи до температури в іншому перетині.

Для дотримання балансу енергії для каналу необхідно, щоб приріст потоку ентальпії на одиниці подовжньої довжини каналу дорівнював потоку тепла, який підведений через стінки цієї ділянки каналу. Таким чином,

$$Q_w = \rho \bar{w} A c_p \frac{dT_b}{dz} . \quad (1.60)$$

Отже, значення, необхідне в (1.56), може бути набуто за (1.60) при відомому  $Q_w$ . Якщо ж відомо  $\partial T / \partial z$ , то за рівнянням (1.64) можна розрахувати  $Q_w$ .

Щоб показати незалежність розподілу безрозмірної температури від такого параметра, як число Рейнольдса або число Прандтля, зробимо так. Член у лівій частині (1.54) можна записати у вигляді

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{w}{\bar{w}} \rho c_p \bar{w} \frac{dT_b}{dz} . \quad (1.61)$$

Використовуючи цей вираз, можна перетворити рівняння (1.64) до зручної безрозмірної форми

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\bar{w}} = 0, \quad (1.62)$$

де безрозмірні координати  $X$  і  $Y$  задані, як і раніше, співвідношеннями (1.44) і (1.45), а безрозмірна температура

$$\Theta = \frac{T_w - T}{(\bar{w}D^2/\alpha)(dT_b/dz)}. \quad (1.63)$$

Тут  $\alpha$  - температуропровідність, яка визначається за формулою

$$\alpha = k/(\rho c_p); \quad (1.64)$$

$T_w$  - температура стінки в деякій точці периметра каналу. Рівняння (1.66) відповідає (1.35) з джерельним членом, який відомий з розв'язку рівняння руху.

Якщо середнє число Нуссельта  $\bar{Nu}$  визначене як

$$\bar{Nu} = \frac{D}{k(T_w - T_b)} \frac{Q_w}{P}, \quad (1.67)$$

де  $P$  – ділянка периметра каналу, яка обігривається, то з (1.64), (1.67) можна одержати

$$\bar{Nu} = \frac{1}{\Theta_b} \frac{A}{PD}. \quad (1.68)$$

Тут  $\Theta_b$  - безрозмірна температура, яка відповідає  $T_b$ . Оскільки для каналу із заданими формою і розподілом теплового потоку на стінках рівняння (1.66) має єдиний розв'язок, то число Нуссельта у вигляді (1.70) є константою, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля (локальне число Нуссельта в загальному випадку змінюватиметься по периметру в результаті зміни локальної густини теплового потоку, а також унаслідок геометричних особливостей поперечного перетину каналу).

Можна визначити безрозмірну температуру, грунтуючись на  $T_w$  і  $T_b$  у вигляді  $(T - T_w)/(T_b - T_w)$ . Ця температура аналогічна безрозмірній швидкості  $w/\bar{w}$ .

**Постійна лінійна густина теплового потоку уздовж каналу при сталій температурі стінок.** Якщо стінки каналу мають велику теплопровідність, то за

її рахунок їх температура у заданому перетині каналу стане постійною. У цьому випадку невідома локальна зміна густини теплового потоку  $q_w$ , але задане постійне значення  $Q_w$ .

Рівняння (1.61) - (1.67) тут також справедливі з урахуванням того, що  $T_w$  - постійна температура стінки.

### Постійна температура по периметру і довжині каналу

Коли стінки каналу мають постійну температуру по його периметру і довжині, то формується область повністю розвинутого теплообміну іншого типу. У такій ситуації рідина продовжує нагріватися або охолоджуватися до того часу, поки її температура не досягне температури стінок. У випадках, розглянутих раніше, незмінними залишаються різниця температур  $T_w - T_b$  і відповідний тепловий потік  $Q_w$ . При сталій температурі стінок різниця температур і тепловий потік експоненціально зменшуються уздовж осі  $z$ .

Області повністю розвинутого теплообміну характеризуються подібними формами профілів температури, тобто відношення  $(T_w - T)/(T_w - T_b)$  не залежить від  $z$ . Іншими словами, хоча різниця температур  $T_w - T$  спадає по осі  $z$ , різниця  $T_w - T_b$  зменшується з тією самою швидкістю. Оскільки

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_b} = f(x, y), \quad (1.71)$$

то

$$\ln(T_w - T) - \ln(T_w - T_b) = \ln[f(x, y)]. \quad (1.72)$$

Диференціюючи (1.72) по  $z$ , одержуємо

$$\frac{1}{T_w - T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (1.73)$$

Таким чином,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (1.74)$$

Якщо відомо  $dT_b/dz$ , то локальне значення  $dT/dz$  може бути розраховане відповідно до (1.74). Співвідношення між  $dT_b/dz$  і  $Q_w$  (див. (1.64)) залишається

справедливим і в цьому випадку. Тому якщо відомо  $Q_w$ , може бути знайдено і  $dT_b/dz$ .

При розв'язанні (1.54) вираз для джерельного члена (1.57) може бути записаний у вигляді

$$S = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (1.75)$$

Через наявність  $T$  в (1.75), з'являється необхідність ліанеризувати джерельний член  $\bar{S} = S_c + S_p \phi_p$ , припустивши, що

$$S_c = -\frac{\rho c_p w T}{T_w - T_b} \frac{dT_b}{dz} \quad (1.76)$$

$$S_p = -\frac{\rho c_p w}{T_w - T_b} \frac{dT_b}{dz}. \quad (1.77)$$

Проте це призводить до додатного  $S_p$ , оскільки коли  $(T_w - T_b) > 0$ , то  $dT_b/dz > 0$ . Але для забезпечення збіжності ітераційного процесу небажано використовувати додатні значення  $S_p$ . Тому рекомендується таке подання джерельного члена:

$$S_c = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}; \quad (1.78)$$

$$S_p = 0. \quad (1.79)$$

Звичайно,  $S_c$  розраховується на кожній ітерації за значеннями  $T$  і  $T_b$ , відомими з попередньої ітерації. Добре, що цей ітераційний процес збігається дуже швидко. Це пояснюється тим, що відношення  $(T_w - T)/(T_w - T_b)$  залежить тільки від розподілу температури, а не від абсолютного значення  $T$ . Тому розв'язання, розпочате навіть з довільного наближення, сходиться досить швидко.

Рівняння (1.54) можна записати у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\bar{w}} \frac{\Theta}{\Theta_b} = 0, \quad (1.80)$$

де  $\Theta$  визначається за (1.67). Необхідно помітити, що оскільки  $T_w - T$  і  $dT_b/dz$  спадають по осі  $z$ , безрозмірна температура залишається незалежною від  $z$ . Граничною умовою для (1.80) є значення  $\Theta$  на стінці, що дорівнює нулю.

Число Нуссельта для випадку постійної температури на стінках визначається також за (1.70). З цього випливає, що  $Nu$  залежить тільки від форми поперечного перетину каналу і не залежить від інших параметрів.

**Постійний зовнішній коефіцієнт тепловіддачі.** Розширенням граничної умови з постійною температурою стінок є випадок, коли канал поміщений в осередок з постійною температурою  $T_\infty$  і обмінюється з нею теплом відповідно до виразу

$$q_w = h_e(T_\infty - T_w), \quad (1.81)$$

де  $h_e$  - постійний коефіцієнт тепловіддачі, заданий на зовнішній поверхні каналу. В цьому випадку поставлення задачі аналогічне розглянутій у попередньому пункті. Єдина відмінність полягає у тому, що замість  $T_w$  потрібно використовувати  $T_\infty$  (температура  $T_w$  не залишається постійною, а експоненціально наближається до  $T_\infty$ ). Таким чином, безрозмірна температура  $\Theta$  визначається як

$$\Theta = \frac{T_\infty - T}{(\bar{w}D^2/\alpha)(dT_b/dz)} \quad (1.82)$$

і задовольняє (1.80).

Гранична умова, задана через зовнішній коефіцієнт тепловіддачі і постійну температуру навколишнього середовища, може розглядатися як гранична умова загального вигляду, з якого можна вивести простіші граничні умови. Наприклад, якщо зовнішній коефіцієнт тепловіддачі стає дуже великим, то температура стінки  $T_w$  майже збігається з температурою навколишнього середовища  $T_\infty$ , і ми маємо граничну умову з постійною температурою. При малому коефіцієнті тепловіддачі різниця  $T_\infty - T_w$  стає набагато більшою, ніж перепади температури усередині каналу, тоді на границі досягається умова постійності теплового потоку.

**Складніші граничні умови.** Можна реалізувати складніші граничні умови, застосовуючи граничну умову заданого теплового потоку або температури на стінках тільки до ділянки периметра каналу, а решту частини периметра вважати адіабатичною. Одержані раніше вирази справедливі і у тому випадку, коли на периметрі каналу існують неактивні зони (з нульовим тепловим потоком).

Проте коли на одній ділянці периметра заданий ненульовий тепловий потік, а на решті межі задана температура, то концепція області повністю розвиненого теплообміну повинна бути переглянута. Такі граничні умови можуть привести до досить нецікавих фізичних ситуацій. За умови повністю розвиненого теплообміну заданий тепловий потік надходитиме в канал через частину границі і залишатиме його через решту частини, для якої задана температура. Температурне поле не змінюватиметься по поздовжній осі  $z$ . Тому інтегрально рідина не одержуватиме або витрачатиме тепло. З обчислювальної точки зору задача вироджується на випадок чистої теплопровідності, і рух рідини не виконує ніякої ролі.

### **1.3.7 Завершальні зауваження**

Як було показано вище, обмеження випадком повністю розвиненої течії дозволило зменшити розмірність задачі і спростити обчислення. Прості повністю розвинені течії описуються рівнянням теплопровідності. При розв'язанні рівняння для швидкості використовується постійний градієнт тиску як джерельний член. Для певних граничних умов існує область повністю розвиненого теплообміну, в якій профілі температури демонструють деяку подібність. Конвективний член рівняння енергії може розглядатися у вигляді джерельного члена, залежного від розподілу швидкості у поперечному перетині каналу.

Дані про перепад тиску і тепловий потік, одержані з аналізу повністю розвинених течій в каналах, можуть бути використані для характеристики довгих каналів, в яких на більшій частині довжини виконуються умови повністю розвиненої течії.

## 1.4 Математичне моделювання

Рівняння перенесення, які випливають із законів збереження маси, імпульсу, енергії [2]

Рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1.83)$$

Рівняння перенесення імпульсу

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1.84)$$

Тензор напружень ньютонівської рідини

$$\Pi_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (1.85)$$

Тензор напружень реологічного або турбулентного середовища

$$\Pi_{ij} = L_{ij} [u(x', t'); x, t], t' < t. \quad (1.86)$$

Рівняння перенесення тепла (нестислива рідина):

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_T. \quad (1.87)$$

Рівняння дифузії

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + \sigma_c. \quad (1.88)$$

Рівняння приграничного шару уздовж плоскої поверхні, яка обтікається потоком зі швидкістю  $U(x)$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x)U'(x) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = +a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (1.89)$$

### 1.4.1 Початкові і граничні умови

1 Умова Діріхле

$$u_i(\vec{x}, t) = f_i(x, t) \quad (1.90)$$

на границі області.

Приклади: умова прилипання для швидкості на твердих границях

$\vec{u} = 0$  - умова заданої температури на границі.

2 Умова Неймана

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} = g_i(\vec{x}, t) \quad (1.91)$$

на границі області.

Приклади: заданий потік тепла на границі

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_w(\vec{x}, t)$$

3 Змішані граничні умови

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} + \kappa u_i(\vec{x}, t) = g_i(\vec{x}, t) \quad (1.92)$$

на границі області.

Приклади: умова тепловіддачі

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_w(T - T_a) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_a^4),$$

приграничні функції для турбулентної течії поблизу твердої границі

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \frac{\nu_\tau(U_1, y_1, \nu)}{\kappa y_1}.$$

## 1.4.2 Метод скінченних різниць

**Дискретизація рівнянь** – заміна безперервної області сукупністю ізольованих точок (сітка), причому розв'язок рівнянь шукається тільки в цих точках (вузлах сітки).

Рівняння в часткових похідних зводиться до системи алгебраїчних рівнянь.

Основні позначення, які використовуватимуться надалі на прикладі розв'язку деякої задачі  $u(x, y)$  в прямокутнику  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$ . Введемо декартову сітку (рис. 1.7), вузли якої є точками перетинів ліній декартової системи координат з абсцисами  $\{x_i\}$  і ординатами  $\{y_j\}$ , де  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  - індекси вузлів;  $N_x, N_y$  – кількість вузлів уздовж  $x$ - і  $y$  - напрямків.

Значення обчислюваної змінної у вузлі сітки з **просторовими** координатами  $x_i$  і  $y_j$  позначається **нижніми** індексами:

$$u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Якщо є залежність від часу, то аналогічно вводиться тимчасова сітка  $u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$ , при цьому номер вузла в часі позначається верхнім індексом.

Верхнім індексом позначається також будь-яка маршова координата.

Крок сітки

$$h_i^x = x_i - x_{i-1}.$$



Рисунок 1.5 – Обчислювальна молекула

У випадку, якщо у рівняннях наявні похідні не тільки від фізичної величини, але і від її градієнтів (потоків), зручно вводити також значення функції в напівцілих вузлах сітки

$$u_{i-1/2,j} = u\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, y_j\right). \quad (1.93)$$

### Скінченно-різницеві апроксимації диференціальних операторів

Використовується математичний апарат – розкладання у ряд Тейлора.

**Визначення:** припустимо  $Lu(x)$  - диференціальний вираз, а  $L_h u_i$  – його скінченно-різницевий вираз в точці  $x_i$ . Якщо при достатньо малих  $h$  має місце співвідношення

$$Lu(x_i) - L_h u_i = \psi_i = O(h^\gamma), \gamma > 0, \quad (1.94)$$

то  $\psi_i$  називається похибкою апроксимації (відхилом), а величина  $\gamma$  – порядком апроксимації.

Символ  $O$  широко використовується в асимптотичних методах. Вираз  $f(x) = O(g(x))$  для всіх  $x \in S$  означає, що існує така константа  $K$ , яка не залежить від  $x$ , що для всіх  $x \in S$  має місце

$$|f(x)| \leq K|g(x)|.$$

### Скінченно-різницеві апроксимації першої похідної

**Права різниця** (беруться величини праворуч від вузла):

$$\nabla^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^+,$$

**ліва різниця** (беруться величини ліворуч від вузла):

$$\nabla^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^-,$$

де  $\psi_i^\pm$  - похибки апроксимацій.

З формули Тейлора випливає

$$\psi_i^+ = \frac{h_{i+1}}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{h_{i+1}^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_{i+1}^3), \quad \psi_i^- = -\frac{h_i}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{h_i^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_i^3),$$

тобто  $\psi_i^\pm = O(h)$  – права і ліва різниці мають похибку апроксимації першого порядку.

Якщо додамо праву різницю, помножену на  $h_i$ , і ліву різницю, помножену на  $h_{i+1}$ , то головні члени похибок скоротяться, що дозволяє нам підвищити порядок апроксимації похідної до другого

$$\nabla u_i = \frac{h_i \nabla^+ u_i + h_{i+1} \nabla^- u_i}{h_i + h_{i+1}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + O(h_i^3), \quad (1.96)$$

на рівномірній сітці  $h_i = h$  одержуємо центральну різницю

$$\nabla u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \quad (1.97)$$

### Скінченно-різницева апроксимація другої похідної

Для отримання апроксимації другої похідної застосуємо двічі центральну-різницевий оператор

$$\nabla^2 u_i = \frac{\nabla u_{i+1/2} - \nabla u_{i-1/2}}{h_i} = \frac{1}{h_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right),$$

де  $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$  – крок «напівцілої сітки».

Застосовуючи формулу Тейлора, можна показати, що

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2 - h_i h_{i+1} + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h_i^3),$$

тобто  $\nabla^2 u_i$  є апроксимацією першого порядку.

На «слабонерівномірних» сітках, таких, що  $h_{i+1} - h_i = O(h^2)$ ,  $\nabla^2 u_i$  можна розглядати як апроксимацію другого порядку.

На рівномірній сітці  $\nabla^2 u_i$  є апроксимацією другого порядку

$$\nabla^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4).$$

### Скінченно-різницева апроксимація дифузійного оператора

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) + \psi_i, \quad (1.100)$$

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{12} [\lambda u'' + 3(\lambda u')'] + O(h^2).$$

### Компактні апроксимації високих порядків точності

Розглянемо вираз для відхилу скінченно-різницевої апроксимації другої похідної

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4). \quad (1.101)$$

Введемо позначення  $q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  і перепишемо вираз таким чином:

$$\nabla^2 u_i = q_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4) = q_i + \frac{h^2}{12} \nabla^2 q_i + O(h^4), \quad \text{або}$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{q_{i+1} + 10q_i + q_{i-1}}{12} + O(h^4) \quad - \text{ неявна апроксимація другої похідної}$$

четвертого порядку, яка побудована на триточковому шаблоні.

### 1.4.3 Метод скінченних об'ємів

У методі скінченних об'ємів диференціальні рівняння перенесення еквівалентні деяким інтегральним законам збереження. Ці інтегральні закони збереження також можуть бути апроксимовані шляхом застосування квадратурних формул наближення інтегралів для кожної елементарної комірки сітки (об'єму). Такий метод одержав назву **методу скінченних об'ємів**. Такий метод дозволяє побудувати консервативні різницеві схеми, тобто схеми, для яких виконуються сіткові аналоги законів збереження.

### Інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих схем

Розглянемо одновимірне рівняння дифузії

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k(x)\varphi + \sigma. \quad (1.102)$$

Позначимо потік величини  $\varphi$  як  $q = -\lambda d\varphi/dx$ ,

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dq}{dx} - k(x)\varphi + \sigma$$

і проінтегруємо його в інтервалі  $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -q_{i+1/2} + q_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx.$$

Потоки в напівцілих вузлах виразимо, інтегруючи співвідношення  $d\varphi/dx = -q/\lambda$  у інтервалі  $[x_{i-1}; x_i]$ :

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx = -q_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} + O(h^3).$$

Позначивши

$$\lambda_{i-1/2} = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1},$$

можна записати

$$q_{i-1/2} = -\lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} + O(h^2).$$

Джерельні члени апроксимуємо за допомогою формули прямокутників

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx = \hat{h}_i [\sigma_i - k_i \varphi_i] + O(h^3). \quad (1.103)$$

Конвективний доданок можна апроксимувати, наприклад, таким чином:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3).$$

Підставивши одержані вирази в початкове рівняння (\*), одержимо

$$u_i \nabla \varphi_i = \frac{1}{h} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) - k_i \varphi_i + \sigma_i + O(h^2),$$

що еквівалентне одержаній вище апроксимації рівняння дифузії за допомогою методу скінченних різниць.

Форми апроксимації членів конвективного перенесення за допомогою різних квадратурних формул відповідають різним типам різницевої схем МСР:

$$1) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3) -$$

еквівалентна схемі МСР з центральними різницями;

$$2) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2} [u_{i+1/2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + u_{i-1/2} (\varphi_i - \varphi_{i-1})] + O(h^3);$$

$$3) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = u^+_i (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + u^-_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + O(h^3) -$$

еквівалентна різницям проти потоку.

Переваги методу скінченних об'ємів:

- 1) виконання законів збереження;
- 2) можливість розрахунку рівнянь з розривними коефіцієнтами перенесення.

#### 1.4.4 Стійкість, узгодженість і збіг скінченно-різницевої схем

Чи можна бути упевненим, що чисельний розв'язок диференціального рівняння в часткових похідних буде близьким до точного розв'язку? Можна, якщо різницева схема задовольняє умовам **узгодженості і стійкості**.

Система алгебраїчних рівнянь, які одержані у процесі дискретизації, **узгоджується** з початковим диференціальним рівнянням в часткових похідних, якщо в границі, коли розміри комірок сітки наближаються до нуля, система

алгебраїчних рівнянь еквівалентна диференціальному рівнянню в часткових похідних в кожному вузлі сітки.

Перевірка на узгодженість: точний розв'язок підставляється у скінченно-різницеві рівняння з подальшим розкладанням всіх вузлових значень в ряд Тейлора в околі однієї точки. Одержаний вираз повинен складатися з початкового диференціального рівняння і залишкового члена. Якщо залишковий член наближається до нуля при подрібненні сітки, скінченно-різницєва схема є узгодженою.

Приклади: рівняння конвекції-дифузії

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

і його скінченно-різницєва апроксимація

$$\frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} + u_i \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2h} = D \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{h^2}.$$

Замінюємо кожен член розкладаннями в ряд Тейлора:

$$\varphi_{i\pm 1}^n = \varphi_i^n \pm h \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i \pm \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i + O(h^5),$$

$$\varphi_i^{n-1} = \varphi_i^n - \tau \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + O(\tau^3)$$

і підставляємо в СРС

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + \frac{h^2}{6} u \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i - \frac{h^2}{12} D \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i = O(\tau^2),$$

з початкового рівняння можна виразити всі тимчасові похідні через просторові:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right)^2,$$

в результаті одержимо

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{u^2 \tau}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i + \frac{uh^2}{6} \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i - \\ & - \frac{h^2}{12} D \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i = O(\tau^2, h^3), \end{aligned}$$

з рівняння видно, що для узгодженості необхідне виконання умов на кроці сітки

$$\tau \ll \frac{D}{u^2}, \frac{h^2}{L^2} \ll 1,$$

де  $L$  – характерний масштаб довжини зміни поля  $\varphi(x, t)$

#### 1.4.5 Стійкість скінченно-різницевої схем. Метод фон Неймана

Не кожна узгоджена скінченно-різницева схема забезпечує збіжність чисельного розв'язку до розв'язання початкового диференціального рівняння в часткових похідних. Необхідно також, щоб вона була стійкою. Для лінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних доведена теорема Лакса: *необхідною і достатньою умовою збіжності різницевої схеми для розв'язання коректно поставленої задачі з початковими даними є виконання умов узгодженості і стійкості.*

##### Приклад 1

Проаналізуємо на стійкість явну схему для рівняння теплопровідності

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}$$

Розв'язання цього рівняння можна подати у вигляді суми точного розв'язку різницевого рівняння і похибки округлення:

$$T_i^n = \tilde{T}_i^n + \varepsilon_i^n.$$

Тоді, підставляючи цей вираз в (\*), одержимо рівняння для похибки

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = a \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{h^2}, \text{ або } \varepsilon_i^{n+1} = s\varepsilon_{i+1}^n + (1-2s)\varepsilon_i^n + s\varepsilon_{i-1}^n,$$

$$\text{де } s = \frac{a\tau}{h^2}.$$

Представимо похибку  $\varepsilon(x)$  у вигляді суми ряду Фур'є. Зображення Фур'є для функції  $g(x)$  на інтервалі  $0 \leq x \leq L$  має вигляд

$$g(x) = \sum_m g_m e^{ik_m x}, \quad k_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx. \quad (1.108)$$

Для коміркової функції Фур'є - амплітуда записується як апроксимація

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m \varepsilon_m(t) e^{ik_m x},$$

$$\text{де } k_m = \frac{2\pi m}{L}, \varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(x) e^{-ik_m x} dx.$$

Лінійність рівняння дозволяє розглядати кожну гармоніку окремо. Шукаємо розв'язок (\*\*) у вигляді

$$\varepsilon_i^n = G^n e^{ikx};$$

підставляючи в (\*\*), одержуємо

$$G = se^{ikh} + 1 - 2s + se^{-ikh} = 1 - 4s \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Величина  $G$  називається коефіцієнтом переходу (amplification factor).

Для стійкості необхідно, щоб  $|G| \leq 1$ , що виконується при  $s \leq \frac{1}{2}$ , або  $\frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ .

## Приклад 2

Проаналізуємо стійкість схеми з різницями вперед за часом і центральними різницями по простору (ВЧЦП) для розв'язання одновимірного рівняння конвекції

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Схема має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Підставляючи  $u_i^n = G^n e^{ikx}$ , знаходимо

$$G = 1 - i \frac{c\tau}{h} \sin kh = 1 - iC \sin kh, \text{ де } C = \frac{c\tau}{h} \text{ — так зване число Куранта.}$$

Схема **безумовно нестійка**. Застосуємо замість центральної різниці ліву різницю (різниця проти потоку)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0.$$

У цьому випадку

$$G = 1 - C(1 - e^{-ikx}) = 1 - C + Ce^{-ikx}.$$

Модуль  $G$  менше одиниці і схема стійка (див. рис. 1.8), коли виконується умова Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ)

$$0 < C < 1,$$

яка застосовується до всіх явних схем для рівнянь гіперболічного типу.

Умова КФЛ означає, що частинка середовища за один крок за часом не повинна просуватися більш ніж на один просторовий крок.

### **1.5. Вибір методу інтенсифікації теплообміну.**

Вибір методу інтенсифікації теплообміну в теплообмінних апаратах у вирішальній мірі визначається прикладними цілями і умовами. Він базується на вивченні структури турбулентного потоку заданого теплоносія в конкретних типах гідравлічно-гладких каналів, а також на відомих способах спрямованої зміни структури потоку, оптимальної для інтенсифікації теплообміну. Така жорстка постановка завдання особливо необхідна для створення теплообмінних апаратів, до яких пред'являються високі вимоги до габаритних характеристик і витрат потужності на прокачування теплоносія через них.

Враховуючи попередні дослідження Е.К. Калініна в 1958 р. на основі теоретичного вивчення структури турбулентного потоку в гладких каналах, найбільшого ефекту в інтенсифікації теплообміну можливо досягнути, збільшуючи коефіцієнт турбулентного переносу тепла  $\epsilon_q$  саме в пристінних прошарках[10].

Додаткова турбулізація ядра потоку мало збільшить тепловіддачу, хоча і призведе до великого зростання гідравлічних втрат. Залишається лише вирішити, яким шляхом збільшити  $\epsilon_q$  в такому пристінному шарі. Використовуючи матеріал попереднього розділу, неважко прийти до висновку, що ефективним методом інтенсифікації тепловіддачі може бути періодичне розташування в трубі плавно окреслених виступів-турбулізаторів висотою, рівній товщині цього шару ( $y^+ = 50-150$ ). Вони не повинні бути розташовані занадто часто. При частому розташуванні турбулізаторів ( $t/h < 5$ ) виникають за ними турбулентні пульсації не встигають помітно згаснути на шляху до наступного турбулізаторами. У цьому випадку вони будуть дифундувати в ядро потоку, збільшуючи там інтенсивність турбулентних пульсацій. Саме так відбувається в шорсткуватих трубах. Це

нераціональний шлях, так як він пов'язаний з досить великими гідравлічними втратами на додаткову турбулізацію ядра, яка мало збільшує тепловіддачу.

При досить великій відстані між турбулізаторами ( $t/h > 5-10$ ) турбулентні пульсації, додатково виникли в зоні вихорів або при їх періодичному руйнуванні, переносяться основним потоком близько до стінки. Вони проходять досить великий шлях, передаючи свою кінетичну енергію настільки дрібним пульсаціям, що вона дисипує. На цьому шляху значення  $\varepsilon_q$  буде збільшено практично тільки біля стіни. Крім того, як зазначено в попередньому розділі, нелінійна взаємодія турбулізаторів з вихровими структурами в ядрі потоку призведе до частішого втрати ними стійкості і ударів об стінку. Отже, інтенсифікація тепловіддачі буде досягнута ціною мінімальних гідравлічних втрат. При занадто великій відстані між турбулізаторами ( $t/h > 100-500$ ) додаткова турбулентність, що виникає за ними, встигає помітно згаснути на деякій відстані від них, і решта ділянки каналу до наступного турбулізатора мало відрізняється по структурі потоку від гладкого каналу.

Як показує аналіз експериментів, при заданій формі і висоті турбулізаторів  $h$  (в межах шару  $u^+ = 50-150$ ) максимальні значення показників теплообміну досягаються при  $t/h \sim 10$ , причому сильно залежить від форми турбулізаторів і пов'язаних з нею тривимірних і нестационарних вихрових структур. У разі прямокутних виступів значенням  $t/h \sim 10$  відповідає наявність двох вихорів (за і перед виступом). Поблизу стінки на верхній межі вихорів і між ними існує зона високо інтенсивної турбулентності. При обтіканні вихору перед виступом виникає система гвинтових вихорів. При обтіканні плавно окреслених турбулізаторів (наприклад, окреслених по верхній межі вихорів перед і за прямокутним уступом) двомірних вихорів немає або вони набагато менше. Отже, немає і втрат енергії (або вони менше) на підтримку цих вихорів і компенсацію дисипації енергії в них. Зменшення  $t/h$  веде до злиття вихорів в один і до погіршення тепловіддачі через великий питомий вплив кутових зон з меншою локально тепловіддачею. Збільшення  $t/h$  веде до зростання питомої площі, між вихорами, на якій додаткова

турбулізація встигає помітно згаснути. Конкретне значення кроку і висоти турбулізаторів має вибиратися на основі розрахунків, виходячи з умов кожного завдання. У каналах некруглого перетину, наприклад при поздовжньому обтіканні пучків труб або стрижнів, вибір методу інтенсифікації частково диктується наявністю вузьких кутових зон. Якщо їх немає, як в пучках з великим кроком розташування труб  $s/D_0 > 1,2$  то описаний метод інтенсифікації за допомогою плавно окреслених виступів буде також ефективний, як і в трубі. При наявності вузьких кутових зон (пучки труб з  $s/D_0 < 1,2$ ) важливо збільшити  $\epsilon_q$  саме в цих вузьких зонах, де він набагато менше, ніж в ядрі потоку. Однак застосування виступів-турбулізаторів, особливо при  $s/D_0$ , близьких до одиниці, або неможливо, або буде захищувати розріз кутових зон. У цьому випадку в якості турбулізаторів доцільно застосовувати поперечні канавки. Утворені в них вихрові зони забезпечать вироблення турбулентності, яка буде переноситися усередненим потоком близько до стінки, збільшуючи  $\epsilon_q$  в пристінній області. Тому турбулізатори-канавки також повинні розташовуватися не дуже близько один до одного. Для кожного типу каналів і конкретних програм такий загальний підхід, заснований на якісному аналізі структури потоку і вихрових зон, дозволяє вибрати найбільш ефективний метод інтенсифікації тепловіддачі. При розробці шляхів реалізації методу інтенсифікації тепловіддачі повинні бути враховані основні вимоги технологічності і надійності елементів конструкції і всього теплообмінного пристрою.

Оскільки в сучасній світовій літературі наявна обмежена кількість робіт присвячених дослідженню інтенсифікації теплообміну при перехідних режимах течії рідини [13], а також відсутні конкретні рекомендації по вибору оптимальних параметрів інтенсифікаторів і можливості їх зміни в широких межах в залежності від технологічних потреб, вважаємо за доцільне провести тривимірне моделювання, а також аналіз адекватності цих моделей.

## **1.6. CFD – моделювання процесів турбулентної природної та змішаної конвекції.**

Традиційно розділ механіки рідини, присв'ячений чисельному моделюванню течій, носив назву «обчислювальної механіки рідини» (Numerical Fluid Mechanic). Коли в середині 1980-х років увага фахівців зосередилась на більш затребуваному моделюванні в'язких потоків, що описуються рівняннями Нав'є-Стокса, одночасно еволюціонували різноманітні моделі турбулентності з різним ступенем чисельної складності та точності. Як наслідок, почали активно розвиватись методи аналізу із залученням сучасних обчислювальних технологій.

З розвитком комп'ютерних науки та техніки, відповідного математичного та програмного забезпечення за цією областю механіки закріпилась назва CFD (computational fluid dynamics) – галузь механіки рідин, яка включає чисельний аналіз та структури даних на базі комп'ютерних технологій для виконання обчислень, необхідних для моделювання потоку, а також результати експериментальних досліджень для аналізу систем, що включають рух рідини, теплообмін та пов'язані з ними явища.

Тобто, CFD – це комп'ютерний інструмент математичного моделювання, який об'єднує теоретичні та експериментальні дослідження у області механіки рідини та теплообміну. У своєму сучасному вигляді як базовий елемент технології комп'ютеризованого (автоматизованого) інженерного аналізу CAE (computer-aided engineering) CFD доповнює або повністю замінює існуючі аналітичні методи, пов'язані з великим об'ємом обчислень та з аналізом великих баз даних, в першу чергу, під час дослідження турбулентних течій.

Створення CFD-кодів (програмних пакетів CAE/CFD аналізу) дозволило дослідникам та інженерам основну увагу приділити адекватності фізичних моделей та їх фізичній вірогідності. В основу методики моделювання із застосуванням найбільш усталених CFD-кодів: CFX/ANSYS, FLUENT, PHOENICS, STAR-CD тощо, покладений алгоритм, який включає як обов'язкові дії верифікацію комп'ютерної моделі та валідацію розв'язку.

Тобто, під час процесу CAE/CFD аналізу обов'язковим завершальним етапом є перевірка адекватності комп'ютерного моделювання та вірогідності отриманого розв'язку. На жаль, в більшості наукових досліджень, розглянутих вище, цей етап не проводився, або ж мав обмежений характер внаслідок відсутності еталонних даних.

Дослідження з валідації CFD-моделей природної турбулентної конвекції практично відсутні, а з валідації CFD-моделей турбулентної змішаної конвекції вкрай обмежена.

W. S. Kim et al. на основі проведеного Jackson et al. експериментального дослідження теплообміну до повітря під час його руху у вертикальній трубі, що нагрівається, валідували найбільш поширені моделі турбулентності, розроблені для вимушеного турбулентного руху. До аналізу були залучені сім так званих «низькорейнольдсових» моделей: шість  $k$ - $\epsilon$  моделей Launder–Sharma, Lam–Bremhorst, Chien, Myong–Kasagi, Yang–Shih and Abe–Kondoh–Nagano, та  $k$ - $\omega$  модель Wilcox [1.139].

Всі моделі відрізняються між собою значеннями так званих «модельних коефіцієнтів» та функцій в «транспортних рівняннях» турбулентності (транспорту кінетичної енергії турбулентності та дисипації турбулентності). В той же час, значення турбулентного аналога числа Прандтля приймалось традиційно для CFD-кодів постійним та рівним 0,9.

Завданням дослідження було оцінити моделі з огляду на їх здатність враховувати вплив на турбулентний теплообмін змінності властивостей рідини та ефекту плавучості. Було проведено порівняння між результатами експериментального дослідження та результатами, отриманими методом обчислювального моделювання для наведених моделей. Тенденції зниження та підвищення інтенсивності теплообміну внаслідок впливу плавучості, виявлені в експериментах, були певною мірою зафіксовані при моделюванні за допомогою кожної з моделей. Однак жодна не відтворювала процес теплообміну адекватно протягом усього діапазону впливу сил плавучості.

Вплив на теплообмін змінності властивостей рідини, передбачуваний моделюванням, для різних моделей значно відрізнявся. Модель передбачає ефект нерівномірності властивостей, що добре узгоджується з перебігом процесу теплообміну. Модель в значній мірі реагувала на такі ефекти. У випадку змішаної конвекції з підйомним потоком, моделлю, що найчастіше застосовується, було передбачено настання порушення теплообміну занадто рано. В основному, інші моделі повільно реагували на вплив плавучості на теплообмін. Подальше збільшення впливу плавучості, деякі з моделей змогли відтворити особливості спостережуваної поведінки, захоплюючи відновлення передачі тепла та подальше перевищення певною мірою. Однак існували явні розбіжності між моделюванням та експериментом, які значно відрізнялися від моделі до моделі. З цього дослідження видно, що для точного моделювання турбулентної змішаної конвекції, яке б врахувало ефект плавучості та змінності властивостей потрібно вдосконалювати моделі турбулентності.

Ранні дослідження показали, що для описання змішаної конвекції не підходять прості моделі турбулентності типу вихорової дифузії або ж довжини шляху змішування. Наприклад, Tanaka et al. намагалися імітувати турбулентну змішану конвекцію в трубі, використовуючи модифікацію моделі вихорової дифузії Reichard'a. Цей підхід не виявився успішним, оскільки турбулентна в'язкість була задана як функція положення без будь-якого посилення на місцеві особливості потоку. Модель одного транспортного рівняння, де було розв'язане транспортне рівняння для турбулентної кінетичної енергії, дозволила підтвердити тенденцію інтенсифікації теплообміну в потоці із змішаною конвекцією з протилежною плавучістю, хоча величина ефекту була непередбачуваною. За стандартною високорейнольдссовою моделлю з двома транспортними рівняннями, в якій рівняння транспорту для турбулентної кінетичної енергії  $k$  та швидкості дисипації  $\epsilon$  розв'язуються разом із функцією стінки, також не вдалося точно відтворити величину таких ефектів (а також величину погіршення теплообміну, виявленої при супутній змішаній конвекції). Це не дивно, оскільки було визнано набагато раніше, що зміна розподілу

напружень у пристінній області турбулентного зсувного шару та наслідки цього впливу на поля швидкості та турбулентність були важливими ознаками впливу плавучості в потоці у вертикальних трубах.

Walklate використовував моделі як типу довжини шляху змішування, так і типу  $k$ - $\epsilon$  для моделювання експериментів з повітрям Carr et al. . Моделі довжини шляху змішування були модифікаціями моделі Van Driest'a та  $k$ - $\epsilon$  моделі для високих чисел Рейнольдса та два варіанти низькорейнольдсової моделі, запропонованої Jones and Launder . Передбачувано Walklate виявив, що з низькорейнольдсові  $k$ - $\epsilon$  моделі працюють краще, ніж стандартна модель  $k$ - $\epsilon$ , або моделі довжини шляху змішування. Розуміння турбулентної змішаної конвекції у вертикальних трубах було помітно просунуте за допомогою обчислювального дослідження Cotton (див. Cotton and Jackson ). Cotton включив низькорейнольдсову  $k$ - $\epsilon$  модель турбулентності Launder and Sharma в параболічне формулювання закону стінки в наближенні Буссінеска. Код був використаний достатньо успішно для моделювання деяких ранніх експериментів із змішаною конвекцією у вертикальних трубах. Пізніші результати більш широкого спектру експериментальних досліджень були успішно змодельовані Yu, з використанням розширеної версії моделі Коттона, яка враховувала змінність властивостей рідини з температурою. Це наочно продемонструвало перевагу низькорейнольдсових моделей турбулентності над більш простими моделями з точки врахування ефекту плавучості та відповідного пригнічення чи підсилення вертикальних змішаних конвективних потоків.

Моделювання великих вихорів ((Large-Eddy Simulations – LES) все частіше визнається як важливий інструмент для вивчення деталей турбулентних інженерних течій. Оскільки LES містить залежну від часу інформацію, таку як еволюція великих вихорів, миттєві флуктуації, тимчасові сліди величин, спектри і двоточкові кореляції, вона може дати набагато більш реалістичну картину окремих аспектів турбулентності, ніж традиційні методи прогнозування турбулентності.

Jackson et Li представили результати LES-моделювання низхідного гарячого пристінного струменя, введеного проти холодного висхідного потоку у вертикальному каналі. Для зменшення невизначеності використовуються два незалежні коди для моделювання: комерційний код Star-CD та індустріальний, Code\_Saturne. Порівняння результатів моделювання з експериментальними даними He et al. свідчить, що обидва коди дають можливість отримати достатньо задовільні результати для ізотермічних поверхонь та випадків з незначним та помірним впливом ефекту плавучості. Для значного впливу плавучості порівняння засвідчило лише якісну відповідність.

Можна зробити висновок, що на сьогодні практично відсутні комплексні чисельні та експериментальні дослідження процесів теплообміну під час турбулентної природної та змішаної конвекції в умовах інверсії густини води.

Турбулентний аналог числа Прандтля (турбулентне число Прандтля). В CFD-моделях, що базуються на гіпотезі Буссінеска про так звану «вихорову в'язкість», в рівняння перенесення внутрішньої енергії як визначальний параметр входить турбулентне число Прандтля  $Pr_t$ .

Порівняння залежностей для  $Pr_t$  Табл. 1.1

Рівняння для $Pr_t$	Автор
$Pr_t = \frac{2 + 6Pr}{9Pr}$ низька інтенсивність турбулентності $Pr_t = \frac{2 + 9Pr}{3 + 9Pr}$ висока інтенсивність турбулентності	Tyldesley and Silver
$\frac{1}{Pr_t} = 0.91 + 0.13Pr^{0.545} \quad 0.7 < Pr < 100$	Graber
$Pr_t = Pr \frac{\exp\left(y^+ \sqrt{\frac{f}{2}}\right) - 1}{\exp\left(\sqrt{Pr}y^+ \sqrt{\frac{f}{2}}\right) - 1}$	Thomas and Rajagopal
$Pr_t = \frac{0.0014 \left\{ 1 - \exp\left(-Re^{1/2}/2\right) \right\}}{0.00124Pr - 0.112}$	Rosen and Tragrdh

$\text{Pr}_t^{-1} = 1,05 \text{Pr} \frac{1 - \exp(-\frac{5,25}{\text{Pr}\epsilon_\sigma/\nu})}{1 - \exp(-\frac{5}{\text{Pr}\epsilon_\sigma/\nu})}$	A. T. Wassel, I. Catton
Довільні Pr $\text{Pr}_t = 1,4 \exp(-15y^+/\delta^+) + 0,66$	I. Mudawwar, M. A. El-Marsi
$\text{Pr}_t^{-1} = 1 + 400^{-y^+/\delta^+} \quad \text{Pr} \geq 0,7$	A. Quarmby, R. Quirk

Турбулентне число Прандтля  $\text{Pr}_t$  вводиться в моделі турбулентного перенесення як відношенню вихорових дифузій імпульсу та внутрішньої енергії. При відомому розподілі швидкостей вихорова дифузія імпульсу є відомою величиною, так що припущення про  $\text{Pr}_t$  еквівалентно припущенню про складову турбулентного теплообміну. До сьогодні рівняння енергії розв'язувалось тільки шляхом спеціальних припущень щодо значення  $\text{Pr}_t$ . Зазвичай передбачається, що  $\text{Pr}_t = 1$  (аналогія Рейнольдса) або  $\text{Pr}_t$  є константою (в більшості CFD-кодів модельне значення  $\text{Pr}_t = 0,9$ ). Оскільки природа турбулентного перенесення недостатньо вивчена, щоб дозволити теоретичну оцінку  $\text{Pr}_t$ , багато дослідників відзначають, що такий підхід до формулювання моделі є помилковим і може бути причиною значних похибок моделювання. В таблиці 1.1 наведені рекомендації ряду досліджень по розрахунку  $\text{Pr}_t$ . Можна відзначити широкий розкид значень  $\text{Pr}_t$ , що свідчить про невизначеність завдання  $\text{Pr}_t$  під час моделювання.

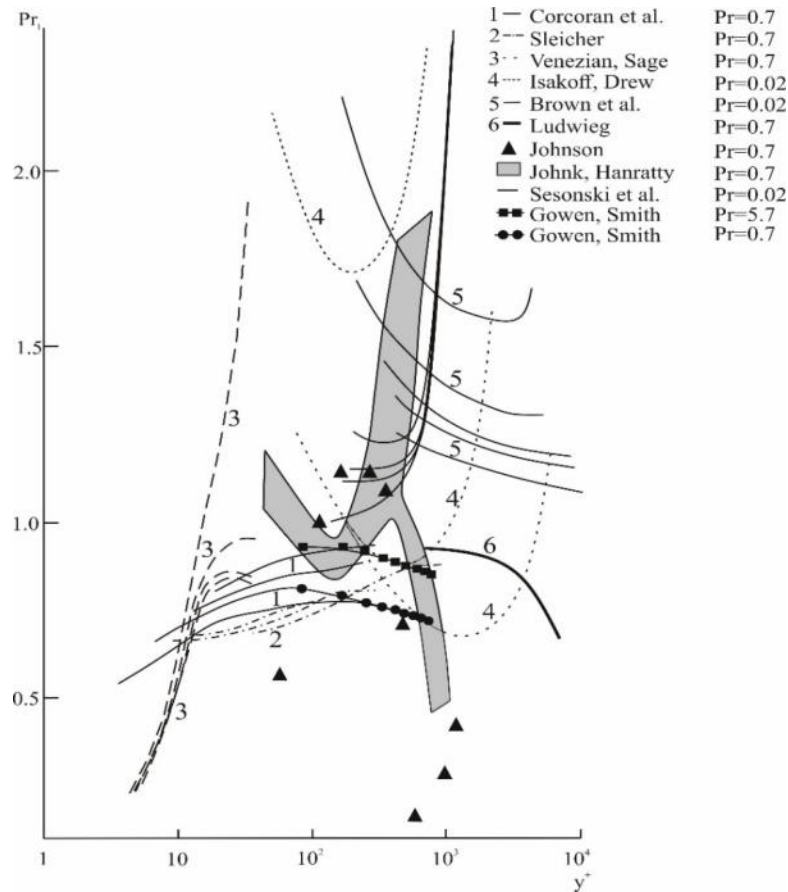


Рис. 1.6. Порівняння значень  $Pr_t$

На малюнку 1.6 наведені експериментальні значення  $Pr_t$  у приграничних шарах, отримані на основі даних, опублікованих різними авторами. Очевидно, що порівняння наочно демонструє широке розсіювання експериментальних результатів  $Pr_t$  навіть для одного й того ж значення  $Pr$ , що залишає питання вибору  $Pr_t$  невирішеною проблемою.

### 1.7 Висновки

- При турбулентному плинні газів і води доцільно штучно турбулізувати лише пристінний шар товщиною близько  $y^+ = 50-150$ .
- У трубах для штучної турбулізації цього пристінного шару слід використовувати періодично розташовані поперечні виступи-турбулізатори.
- У міжтрубному просторі при поздовжньому обтіканні тісних пучків труб ( $s/D_0 < 1,2$ ) в якості турбулізаторів доцільно використовувати поперечні канавки. За цією технологією при обкатці труб

гвинтовими роликами на зовнішній поверхні відразу утворюються періодично розташовані канавки з заданим кроком  $t/D_x$  і плавно окреслені виступи заданої висоти всередині труб.

- Оскільки в літературі наявна обмежена кількість робіт присвячена дослідженню теплообміну за рахунок інтенсифікаторів виявляється доцільним провести моделювання та валідацію адекватності тривимірних моделей гідродинаміки та теплообміну при течії в трубах.

## РОЗДІЛ 2

### ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ

#### 2.1 Метод скінченних елементів

Програма ANSYS, як і багато інших CAE-продуктів, для математичного моделювання різних фізичних процесів використовує метод кінцевих елементів. Цей метод поєднує в собі універсальність алгоритмів розв'язання різних крайових задач з ефективністю комп'ютерної реалізації обчислень.

МСЕ є ефективний метод вирішення інженерних завдань. Область застосування методу від аналізу напружень в конструкціях літаків, автомобілів до розрахунку радіоелектронної апаратури або таких складних систем, як атомна електростанція. З його допомогою розглядається рух рідини по трубах, вирішуються завдання електростатики і мастила, аналізуються коливання системи і багато інших завдань.

МСЕ є чисельним методом вирішення диференціальних рівнянь, що зустрічаються у фізиці і техніці. Виникнення методу пов'язано з вирішенням завдань космічних досліджень (1950 г.). Вперше він був опублікований в роботі Тернера, Мартіна і Топпа. Внаслідок області застосування МСЕ істотно розширилася, і він перетворився в загальний метод чисельного рішення диференціальних рівнянь.

Історичними попередниками МСЕ були різні методи будівельної механіки і механіки деформованого твердого тіла, що використовують дискретизацію, зокрема, метод сил і метод переміщень. Основні ідеї та процедури МСЕ вперше були використані Курантом [12] в 1943р. при вирішенні задачі про кручення стрижня. Але тільки з 50-х років почався активне практичне застосування МСЕ, спочатку в області авіації і космонавтики, а потім і в інших напрямках. Термін «кінцеві елементи» (КЕ) ввів в 1960 році Клаф [14]. Розвитку цього методу сприяло вдосконалення цифрових електронних обчислювальних машин.

Метод скінченних елементів, зазвичай на стадії дизайну та розробки продуктів, використовує багато дисциплін здебільшого з сім'ї механічної інженерії (таких як аеро-, морська, біометрична та автомобільна індустрії). Декілька сучасних МСЕ-пакетів включають спеціальні елементи, такі як термальні, електромагнітні, рідинні та структурні робочі середовища. В структурному моделюванні МСЕ дуже допомагає у генерації жорсткісних і силових візуалізацій у місцях зсувів та згинів, та відображення розповсюдження сил та зміщень.

МСЕ-програми забезпечують широкий спектр моделювальних можливостей контролю складності і моделювальної і аналітичної систем. За потреби в більшості інженерних програм можна змінювати бажаний рівень точності, час, потрібний для необхідних та асоційованих обчислень.

МСЕ дозволяє проектувати, налагоджувати та оптимізувати продукцію перед її випуском. Цей могутній засіб проектування відчутно покращив стандарти інженерних проектів та методологію цього процесу у багатьох сферах. Використання МСЕ зменшило час, за який продукт проходив від концепції до конвеєра. Його головною ідеєю було покращення початкових прототипів використовуючи МСЕ, що сприяло прискоренню їхнього тестування та розробки. В цілому, перевагами МСЕ є збільшення точності, покращення дизайну і краще бачення його критичних параметрів, створення віртуальних прототипів, зменшення кількості реальних прототипів, пришвидшення та здешевлення проектування, збільшення продуктивності та прибутковості.

Область застосування МСЕ значно розширилася, коли для його обґрунтування стали застосовуватися методи зважених неув'язок - Гальоркіна і найменших квадратів [15; 16]. МСЕ перетворився в універсальний спосіб вирішення диференціальних рівнянь.

Вихідним об'єктом для застосування МСЕ є матеріальне тіло (в загальному випадку - область, яку займає суцільне середовищем), яке розбивається на частини - кінцеві елементи (рис. 2.1). В результаті розбивки

створюється сітка з меж елементів. Точки перетину цих кордонів утворюють вузли. На кордонах і всередині елементів можуть бути створені додаткові вузлові точки. Ансамбль з усіх кінцевих елементів і вузлів є основною кінцева-елементною моделлю тіла, що деформується. Дискретна модель повинна максимально повно покривати область досліджуваного об'єкта.

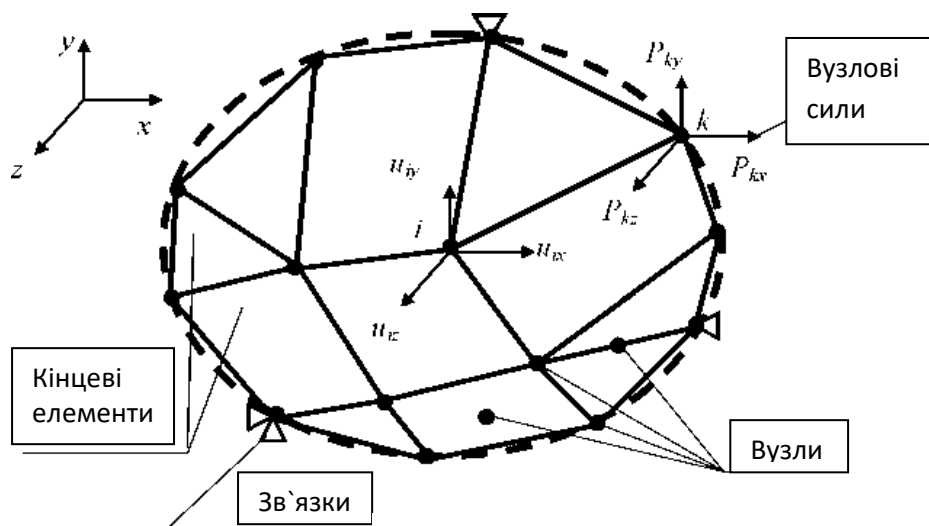


Рисунок 2.1

Вибір типу, форми і розміру кінцевого елемента залежить від форми тіла і виду напружено-деформованого стану. Стрижневі КЕ застосовується для моделювання одноосного напруженого стану при розтягуванні (стисканні), а також в задачах про кручення або вигині. Плоскі двовимірні КЕ у вигляді, наприклад, трикутної або чотирикутної пластини використовується для моделювання плоского напруженого або плоского деформованого стану.

Об'ємні тривимірні КЕ у вигляді, наприклад, тетраедра, шестикутника або призми служить для аналізу об'ємного напруженого стану. КЕ у формі кільця застосовується в разі асиметричного напруженого стану

Всі елементи і вузли нумеруються. Нумерація вузлів буває загальною (глобальною) для всієї кінцева-елементної моделі і місцевою (локальною) всередині елементів. Нумерацію елементів і загальну нумерацію вузлів бажано проводити так, щоб трудомісткість розрахунків була найменшою. Існують алгоритми оптимізації цієї нумерації. Повинні бути визначені масиви зв'язків між номерами елементів і загальними номерами вузлів, а також між місцевими і загальними номерами вузлів.

Стан тіла характеризується кінцевим числом незалежних параметрів, визначених в вузлах звичайно-елементної сітки. Такі параметри називаються ступенями свободи[17].

Розрізняють чотири основних види методу скінченних елементів: прямий, варіаційний, зважених неув'язок і енергетичного балансу.

Прямий метод аналогічний матричному методу переміщень для стрижневих систем, в основі його лежать положення, які використовувалися на ранній стадії розвитку МСЕ. Цей метод зручний своєю простотою і очевидним геометрично-фізичним значенням окремих кроків апроксимації. Співвідношення для КЕ тут будуються безпосередньо на основі трьох груп рівнянь (трьох сторін завдання): статичної, геометричної та фізичної. Однак область застосування прямого методу вельми обмежена: його можна використовувати лише для кінцевих елементів простий геометрії з малим числом ступенів свободи у вузлів.

Варіаційний метод заснований на принципах стаціонарності деякої змінної, що залежить від однієї або декількох функцій (така змінна носить назву функціоналу). Стосовно до механіки деформованого твердого тіла ця змінна є потенційною (функціонал Лагранжа) або додатковою (функціонал Кастиліано) енергією системи або формується на основі цих двох енергій (функціонали Хеллінгера-Рейсснера) [18-19]. На відміну від прямого варіаційний метод може однаково успішно застосовуватися як до простих, так і складних завдань.

Метод неув'язок є найбільш загальним підходом до побудови основних співвідношень МСЕ. Цей метод доцільно застосовувати при вирішенні завдань, у яких важко або неможливо сформулювати варіаційне рівняння, тобто функціонал. Щоб отримати "найкраще" рішення, необхідно мінімізувати деякий інтеграл від неув'язок по розрахунковій області. Для підвищення ефективності в підінтегральний вираз поряд із самою нев'язкою зазвичай вводиться так звана вагова функція, в цьому випадку метод називається

методом зважених неув'язок. Вибір схеми мінімізації та вагових функцій визначає різні варіанти методу неув'язок. Найбільш часто застосовується з них метод Гальоркіна, який призводить до тих же рівнянь, що і варіаційний підхід, а також метод найменших квадратів.

Метод енергетичного балансу (метод Одена) заснований на балансі різних видів енергії, записаний в інтегральній формі. Цей метод успішно застосовується при вирішенні нелінійних і динамічних задач. [20-22]

Програмний комплекс ANSYS вирішує методом кінцевих елементів стаціонарні і нестаціонарні, лінійні і нелінійні задачі з таких областей фізики, як механіка твердого деформуючого тіла, механіка рідини і газу, теплопередача, електродинаміка. Можливо рішення пов'язаних задач.

Розрахунки можуть проводитися в пакетному (Batch) або інтерактивному (Interactive) режимах. Для пакетного режиму попередньо повинна бути написана програма користувача за допомогою вбудованої мови APDL (ANSYS Parametric Design Language) і команд ANSYS. Текстовий командний файл, який містить цю програму, зчитується засобами пакета ANSYS і виконується. Пакетний режим зручний при вирішенні складних завдань, алгоритм яких містить цикли, переходи, структури «якщо - то» та ін.

Інтерактивний режим роботи реалізується або за допомогою графічного інтерфейсу користувача (GUI), класичного ANSYS, або на платформі Workbench. Ці оболонки складаються з командних меню і вікон. Кожна вводиться через меню команда при інтерактивному моделюванні і відразу ж виконується, а результат або повідомлення про нього виводяться в відповідні вікна. Інтерактивний режим - основний режим моделювання, навіть командні файли для пакетного режиму створюються зазвичай з використанням інструментів інтерактивного режиму.

Рішення MCE поставленої крайової задачі здійснюється програмою ANSYS в три етапи відповідно логіці методу. На першому етапі (препроцесінг) створюється основа кінцева-елементної моделі досліджуваного об'єкта. Цей етап включає в себе нижче перелічені процедури:

1. Встановлюється фізичний тип завдання (механіка деформованого тіла, теплопередача, гідродинаміка і т.д.), виконуються відповідні налаштування програми.

2. Вибирається тип кінцевого елемента в залежності від розмірності об'єкта та інших його властивостей. Можуть бути задані деякі характеристики елемента.

3. Вибирається матеріал об'єкта і вказуються всі його необхідні властивості. Властивості можуть бути задані з клавіатури або імпортовані з бібліотеки матеріалів ANSYS. Завдання властивості визначає модель матеріалу (лінійно-пружний, пружно-пластичний, білінійну і т.д.), що впливає на вибір визначальних рівнянь МСЕ.

4. Будується геометрична твердотільна модель об'єкта. У класичному ANSYS для цього використовується програмний модуль PREP7. У Workbench використовується модуль Design Modeler. Геометрична модель може бути експортована з будь-якого CAD- пакета.

5. Геометрична модель розбивається на кінцеві елементи. При розбивці можуть бути задані різні параметри сітки.

6. У разі контактної задачі встановлюються контактні пари, визначається модель контакту і її характеристики.

Другий етап - накладення на модель необхідних фізичних умов і рішення задачі - складається з трьох основних етапів:

1. Задаються граничні умови - сили, переміщення (зв'язки) та ін.

2. Вибирається тип аналізу (статичний, динамічний, модальний і т.д.). Можливий вибір методу розв'язання системи рівнянь МСЕ і завдання параметрів обчислювальних процедур (числа кроків навантаження, числа ітерацій і ін.).

3. Здійснюється рішення системи рівнянь, отриманої методом МСЕ. В результаті рішення формується файл результатів, який містить вектор знайдених ступенів свободи (вузлових переміщень, вузлових температур і т.д.).

Третій етап (постпроцесінг) - аналіз результатів розрахунку. Розрахункові МСЕ фізичні величини (переміщення, деформації, напруження, температури і ін.) Представляються в графічному вікні ANSYS у вигляді картинок, таблиць, графіків, анімацій. Всі ці результати можна записати у відповідні файли.

При виконанні розглянутих вище етапів розв'язання задачі програма ANSYS створює в пам'яті комп'ютера базу даних, що містить повну інформацію про модель. Цю базу даних можна зберегти в бінарному файлі і використовувати для продовження аналізу

Найважливішими перевагами методу скінченних елементів є:

- Властивості матеріалів суміжних елементів можуть бути різними. Це дозволяє застосовувати метод до тіл, складених з декількох матеріалів.
- Скінченними елементами є прості області (прямі лінії, трикутники, прямокутники, піраміди, призми). Таким чином, даним методом можна апроксимувати тіла із складною формою країв.
- Розміри елементів можуть бути змінними. Це дозволяє збільшувати чи зменшувати елементи сітки.
- За допомогою МСЕ легко розглянути граничні умови з розривним поверхневим навантаженням, а також змішані граничні умови.
- Алгоритм методу скінченних елементів дозволяє створити загальні програми для розв'язку завдань різного класу.
- Завдання зводиться до розв'язку системи рівнянь алгебри великої розмірності. Проте хороша обумовленість системи розв'язних рівнянь алгебри дозволяє отримувати досить точні розв'язки для систем рівнянь розмірністю 5-10 мільйонів і більше.

Головний недолік цього методу полягає у потребах великого обсягу пам'яті ЕОМ і високої швидкості розрахунку. В наш час розвиток ЕОМ практично усунув цей недолік.

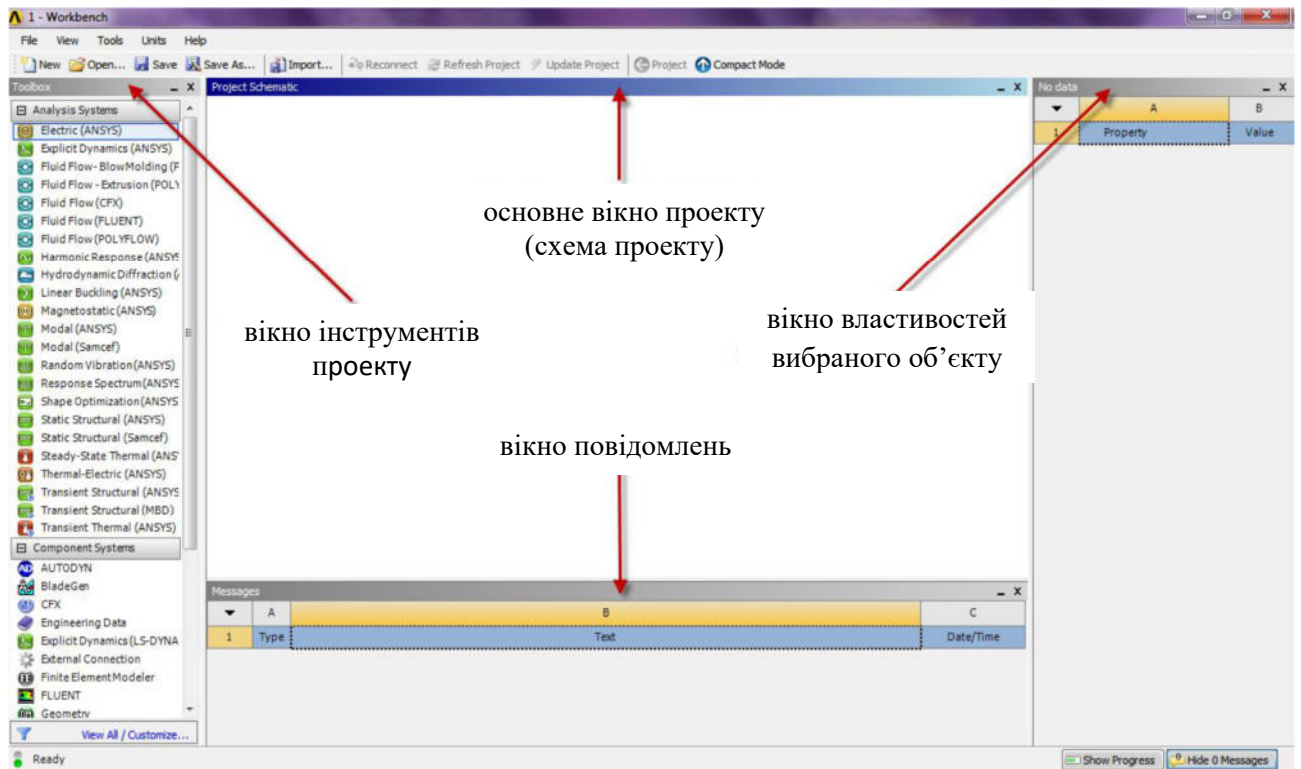
## 2.2 Робоче середовище Workbench

В останні роки компанія ANSYS Inc. впроваджує нову модульну систему Workbench, яка виводить процес моделювання на новий сучасний рівень. Застосування Workbench робить моделювання більш наочними, а деякі маніпуляції, зокрема, налаштування контактних пар, управління сіткою кінцевих елементів, більш простими, що важливо для користувачів початківців. Workbench більш адаптований до різних пакетів CAD і CAE, має вбудований генератор звітів [24].

Центральним об'єктом при роботі в ANSYS Workbench є проект, під яким розуміється сукупність геометричних, фізичних і кінцева-елементних моделей тіл завдання, а також результатів чисельного рішення. Проект може складатися з одного або декількох блоків, що реалізують окремі види інженерного аналізу. У свою чергу, блок складається з елементів - структурних частин блоку, що відповідають за визначений етап аналізу.

Процедура інженерного аналізу рідко буває лінійною. При вирішенні практичного завдання, як правило, доводиться часто звертатися до попередніх етапів, вносити зміни в моделі, перебудовувати KE-сітку, коригувати налаштування розв'язку. Наявність зручних інструментів для цього грає дуже важливу роль, так як дозволяє суттєво прискорити процес отримання чисельного рішення. Платформа Workbench забезпечує інженера великою кількістю інструментів, необхідних на всіх етапах аналізу, дозволяє швидко отримувати чисельні результати різними розв'язками, ефективно організовує взаємозв'язок між окремими видами інженерних розрахунків.

Запуск ANSYS Workbench виконується з основного меню Пуск/Програми / ANSYS 12 / Workbench. Після завантаження буде виведено основне вікно програми, що складається в свою чергу з декількох вікон. Імена вікон відображаються в заголовках (рис. 2.2)



основне вікно проекту  
(схема проекту)

вікно інструментів проекту

вікно властивостей вибраного об'єкту

вікно повідомлень

Запускаємо програмну платформу ANSYS Workbench. Fluid Flow (CFX). У робочій області «Project Schematic» з'явиться модуль у вигляді структурної схеми, в якій кожному етапу відповідає розділ, що містить об'єкти розрахункової моделі (рис. 2.3).

A	
1	Fluid Flow (CFX)
2	Geometry
3	Mesh
4	Setup
5	Solution
6	Results

- назва системи
- створення геометрії в ANSYS DesignModeler
- створення сіткової моделі в ANSYS Meshing
- передобробка в CFX-Pre
- решатель ANSYS CFX-Solver Manager
- постобробка в ANSYS CFD-Post

Fluid Flow (CFX)

В системі ANSYS існують три різні способи побудови геометричної моделі: імпорт моделі, попередньо побудованої іншою програмою; твердотільне моделювання з використанням геометричних примітивів і операцій булевої алгебри і безпосереднє створення моделі в інтерактивному режимі роботи з системою.

Після закінчення роботи над проектом вікно середовища ANSYS Workbench має вигляд як на рисунку 2.4. Для кожного об'єкта можливе введення і редагування параметрів.

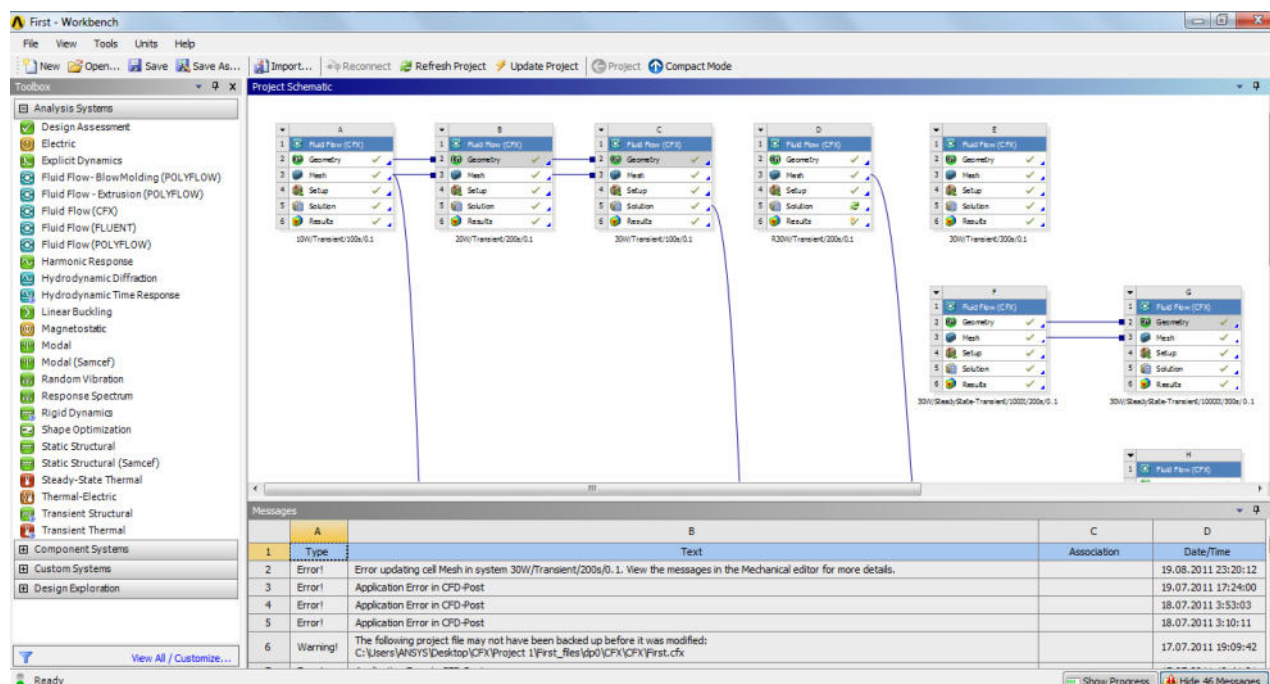


Рис. 2.4. Схематичний вид готового проекту в середовищі ANSYS Workbench

### 2.3 Алгоритм геометричного моделювання тривимірної моделі

Для створення нової геометричної моделі потрібно натиснути правою кнопкою миші «Geometry» в структурній схемі модуля Fluid Flow (CFX) [24]. З'явиться контекстне меню, яке дозволяє створити нову геометрію «New Geometry», імпортувати дані геометрії, передати існуючу геометрію в інші системи аналізу для роботи в вихідному проекті, стерти дані, переглянути властивості геометричної моделі. Вибравши «New Geometry» в контекстному меню відкриється програма для роботи з геометрією ANSYS DesignModeler (рис. 2.5).

Графічний інтерфейс програми складається з вікон з графіком моделі 3D «Graphics», зі схемою моделі «Tree Outline», з детальним оглядом функцій «Details View», і з різноманітними панелями інструментів. Аналогічна організація графічного інтерфейсу інших програм, яких ми будемо використовувати надалі.

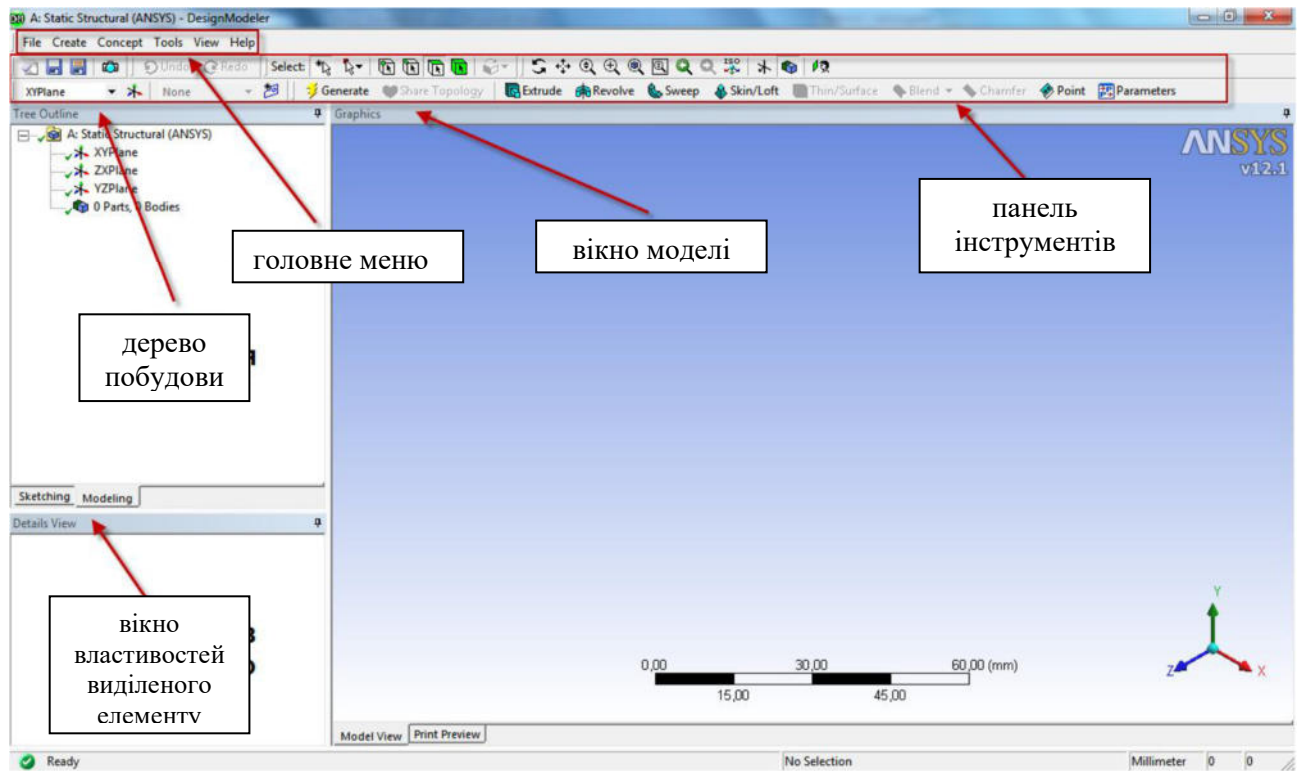


Рис. 2.5. Схематичний вид початкового проекту в ANSYS DesignModeler

Головне меню містить наступні пункти:

- File - дозволяє виконувати основні операції з файлами геометрії;
- Create - дозволяє створювати і модифікувати тривимірні об'єкти;
- Concept - містить інструменти для створення ліній і поверхонь;
- Tools - містить набір інструментів для постобробки тривимірних моделей, а також дозволяє задавати налаштування модуля і керувати параметризацією моделі;
- View - дозволяє задавати налаштування відображення геометричної моделі;
- Help - дає доступ до довідкової системи по модулю Design Modeler.

Дерево побудови (Tree Outline) є найважливішим інструментом моделювання і дозволяє показувати в зручному вигляді послідовність створення геометричної моделі (рис. 2.6). У дереві побудови відображені всі операції в тому порядку, в якому вони застосовувалися для створення геометрії.

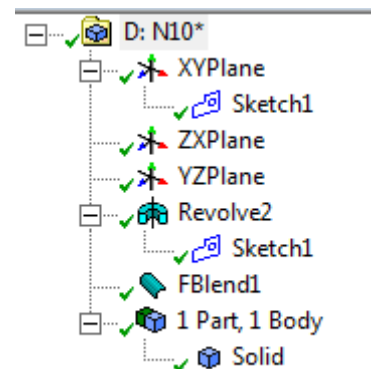
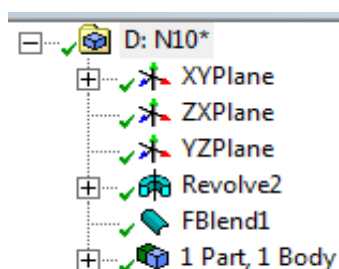
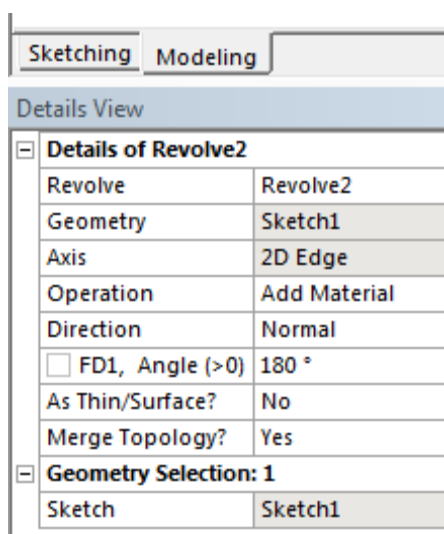


Рис. 2.6

Вікно властивостей виділеного елемента (Details View) відображає властивості поточного об'єкта, обраного в дереві побудови (рис. 2.7). Це можуть бути параметри команд побудови геометричних об'єктів, значення розмірів, перелік структурних елементів об'єкту та інші параметри. В даному



вікні можна змінювати властивості об'єктів, вибираючи необхідні пункти з меню, що випадає або просто задаючи чисельні значення параметрів.

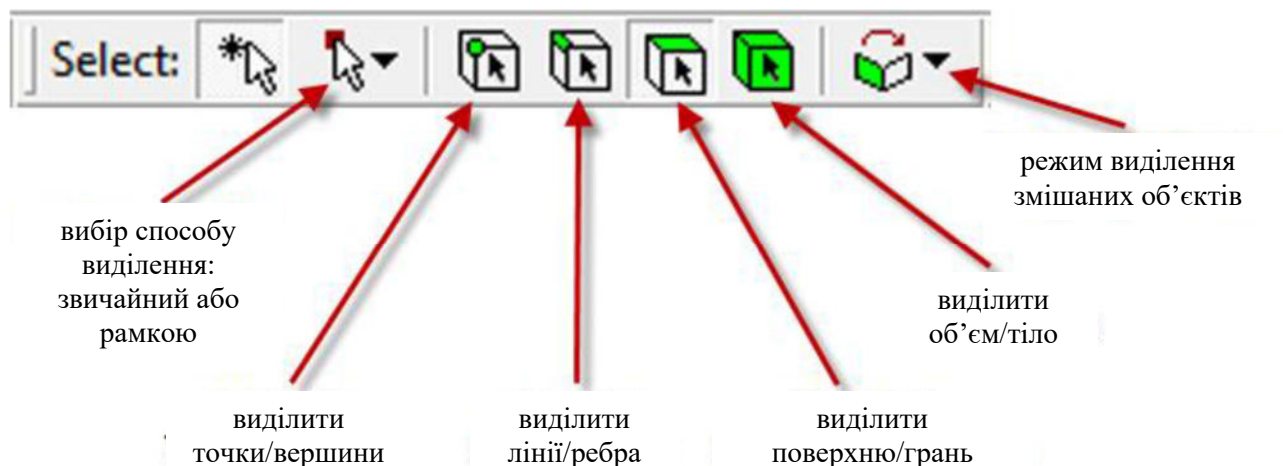


Вікно моделі (Graphics) відображає поточний результат моделювання, дозволяє змінювати вид, повертати і масштабувати модель. Керувати видом можна кнопками на панелі управління видом або за допомогою клавіатури і миші.

Геометрична модель, як правило, складається з об'єктів різних типів: точки, лінії, поверхні і об'ємів. Design Modeler надає можливість вибору типу об'єктів, які будуть виділятися за допомогою лівої кнопки миші. Доступні два режими виділення: звичайний і з допомогою рамки. При виділенні рамкою за

Рис. 2.7

допомогою миші задаються кордони рамки і всі об'єкти обраного типу, що потрапляють всередину заданої рамки, вважаються виділеними. Для вибору типу об'єктів, що виділяються на панелі виділення передбачені відповідні кнопки (рис. 2.8).



Створення будь-якої геометричної моделі починається з вибору координатної площини для первинної побудови. Після цього на обраній площині створюється ескіз, що складається з точок і ліній, що представляють собою прообраз моделі.

В Design Modeler використовується звичайна прямокутна система декартових координат  $Oxyz$ , при цьому кожна вісь має власний колір: вісь  $x$  - червоний, вісь  $y$  - зелений, вісь  $z$  - синій. Створюючи нову площину для моделювання, можна змінювати початкову орієнтацію пов'язаних з нею координатних осей, але їх колір залишиться при цьому незмінним. Вибрати площину можна, натиснувши лівою кнопкою миші на її значок в дереві побудови. Будувати ескіз можна в будь-якій з координатних площин:  $Oxy$

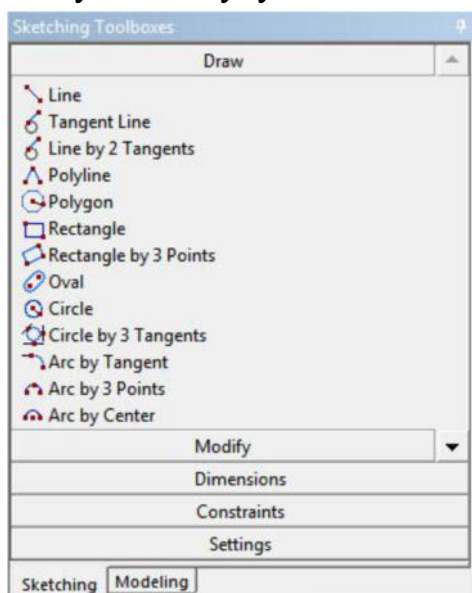


Рис. 2.9

( $XY$ Plane),  $Oxz$  ( $ZX$ Plane),  $Oyz$  ( $YZ$ Plane).

У режимі ескізування вікно дерева побудови (Tree Outline) змінюється на вікно інструментів ескізування (Sketching Toolboxes), яке містить наступні групи (рис. 2.9):

- Draw - інструменти малювання ескізу;
- Modify - інструменти редагування ескізу;
- Dimensions - інструменти для задавання розмірів ескізу;
- Constraints - інструменти для задавання обмежень і геометричних умов між елементами ескізу;
- Settings - параметри сітки вікна побудови ескізу.

Рекомендується наступний загальний порядок побудови ескізу: за допомогою інструментів малювання зобразити ескіз, не враховуючи розміри його окремих елементів. При цьому можуть знадобитися інструменти з групи Modify для редагування геометричних об'єктів або Constraints - для задавання обмежень. Після того як загальний контур ескізу створений, потрібно задати

йому необхідні розміри і завершити побудову ескізу натисканням кнопки Generate.

Перш ніж малювати ескіз, можна задати сітку із заданими параметрами, що відображається у вікні побудови. З її допомогою легко створювати геометричні об'єкти необхідних розмірів, орієнтуватись по осередках сітки. При побудові геометричних об'єктів буде активна прив'язка курсора до вузлів сітки, також можна налаштувати додаткові позиції прив'язки всередині осередку.

Всі необхідні параметри сітки задаються в групі Settings вікна Sketching Toolboxes. Характеристика параметрів сітки:

- відображення сітки (Grid). Параметр містить дві опції: Show in 2D - відображати сітку в вікні побудови і Snap - активувати прив'язку покажчика до вузлів сітки;

- розмір основного осередку сітки (Major Grid Spacing). Параметр визначає відстань між вузлами основних осередків сітки. Основні осередки сітки зображуються суцільними лініями;

- число розбиття основного осередку (Minor-Steps per Major). Параметр визначає кількість поділів всередині основних осередків. Додаткові осередки, отримані внутрішнім розбиттям, зображуються штриховими лініями; значення рівне одиниці, означає відсутність внутрішнього розбиття;

- прив'язка всередині додаткових осередків (Snaps per Minor). Параметр задає число рівновіддалених точок прив'язки всередині додаткових осередків, отриманих розбиттям основних осередків. Точки прив'язки на екрані не відображаються, їх наявність призводить до того, що при переміщенні покажчика всередині додаткових осередків він буде прив'язуватися до точок, рівновіддалених одна від одної і від граничних точок осередку. Значення, рівне одиниці, означає прив'язку тільки до граничних точок додаткових осередків.

Для створення ескізу використовуються різні інструменти з груп Draw, Modify, Dimensions, Constraints.

Завершальним етапом у створенні ескізу є задавання розмірних параметрів для геометричних розмірів, таких як довжини відрізків, величини кутів, радіуси або діаметри кіл, відстань до координатних осей і ін.

Створений геометричний об'єкт, наприклад відрізок, звичайно, має деяку довжину, але Design Modeler вважає що він не має розмірних параметрів. Даний етап не є обов'язковим, але, тим не менш, він необхідний для подальшого управління геометричною моделлю.

Задавання розмірних параметрів виконується за допомогою команд групи Dimensions.

Після завершення роботи в DesignModeler досліджувана труба має вигляд зображений на рисунку 2.10.

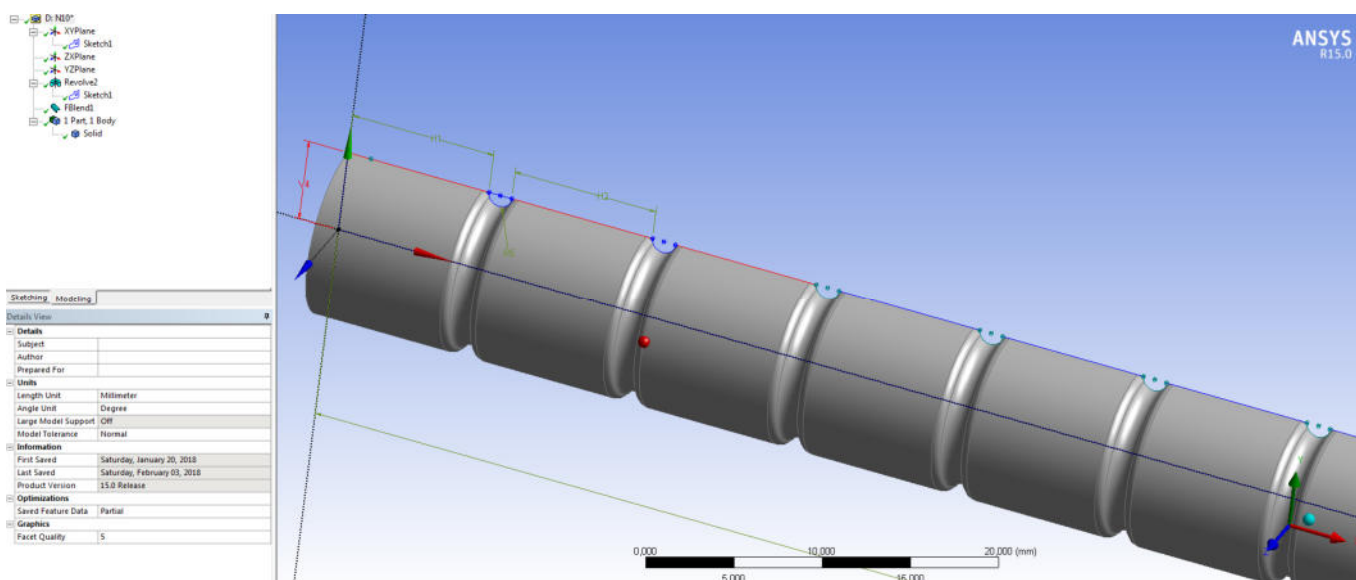


Рис. 2.10. Геометрична модель досліджуваного об'єкту

Закриваємо DesignModeler, всі дані по геометрії автоматично зберігаються в проєкті Workbench. Можна переходити до наступного етапу - створення сіткової моделі.

## 2.4 Створення розрахункової сітки в ANSYS Meshing

Для отримання чисельного рішення необхідно виконати розбиття геометричних моделей розрахунковою сіткою. Дана процедура виконується в модулі симуляції Mechanical.

Сітка генерується на геометричній моделі і є основою для складання і рішення системи рівнянь в матричному виді. Існує два способи генерації сітки:

- автоматична генерація сітки з установками по замовчуванню при запуску на рішення. При цьому є можливість попередньо переглянути сітку (команда Preview) до запуску на розрахунок, щоб оцінити її відповідність поставленому завданню;

- генерація сітки з установками які задає користувач. У цьому випадку користувач самостійно визначає особливості створеної сітки і задає значення необхідних параметрів.

При створенні кінцево-елементної сітки слід дотримуватися такого порядку дій:

1. Визначити тип аналізу (міцнісний, тепловий тощо) (рис.2.11). Тип аналізу буде встановлено автоматично, якщо сітка генерується в будь-якій фізичній системі, наприклад FLUENT, CFX і т.д.

2. Встановити метод створення сітки і задати установки кінцево-елементної сітки (щільність, форму елементів, розміри і т.д.). Для зручності можна створити іменовану групу об'єктів.

3. Попередньо переглянути сітку і, при необхідності, скорегувати установки. Попередній перегляд ініціює генерацію сітки. Подальший запуск на рішення не вимагає повторення цієї процедури.

4. Згенерувати сітку. При запуску на рішення цей пункт може виконуватися автоматично.

5. Перевірити якість сітки і при необхідності повторити дії в пунктах 2 і 3.

Сітка на об'ємних тілах створюється за допомогою тетраїдних або гексаїдричних твердотільних елементів з лінійною або квадратичною функцією форми. Сітка на двовимірних об'єктах створюється за допомогою трикутних

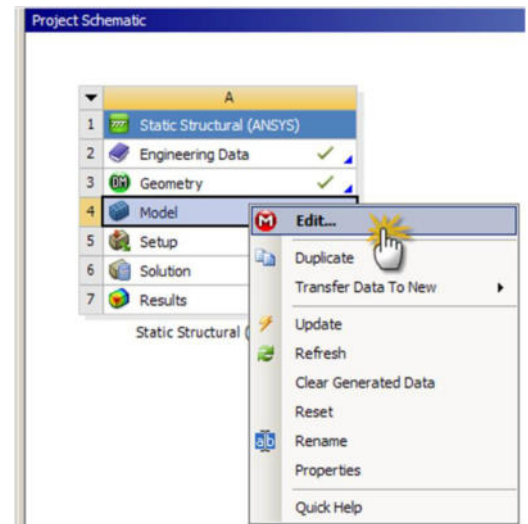


Рис. 2.11

або прямокутних твердотільних елементів з лінійною або квадратичною функцією форми. Сітка в тонких шарах або оболонках (Surface bodies) створюється за допомогою лінійних оболонкових елементів. Сітка на одновимірних об'єктах (Line bodies) створюється за допомогою лінійних балкових елементів (Beam). Лінійні елементи використовуються для розрахунку стрижневих конструкцій.

Модуль геометричного моделювання DesignModeler дозволяє з'єднати в одній деталі кілька різнорідних геометричних об'єктів - твердотільних і оболонкових, і отримати складову деталь (Multibody Part). Для складової деталі генерується єдина сітка. Це дозволяє моделювати, наприклад, оболонки разом з жорсткими стержнями. Створення складеної деталі в модулі DesignModeler передбачає, що на кордоні різних геометричних об'єктів при генерації сітки вузли об'єднуються. При об'єднанні граничних вузлів не потрібно визначати контактні умови на кордоні. Властивості матеріалів для тіл можуть відрізнитися.

В ANSYS Workbench можливо моделювання контактної взаємодії без завдання точного збігу на кордоні вузлів сітки контактуючих деталей. Спеціальні контактні елементи утворюють особливий поверхневий шар в області контакту і дозволяють задавати параметри взаємодії деталей. Сітки на контактуючих поверхнях різних деталей можуть бути неідентичними. Допускається контакт сіток, утворених довільно гексаїдричними і тетраїдними елементами. Такий підхід до моделювання контакту допускає задавання різної щільності сітки в контактуючих деталях.

На рис. 2.12 представлена робоча область модуля симуляції. Розділ сітки елементів (Mesh) розташовується в дереві проекту і дозволяє керувати налаштуваннями сітки. При натисненні лівої кнопки миші на розділі Mesh змінюється вид панелі інструментів, в яку виводяться основні команди роботи з сіткою. Всі доступні команди також можна викликати через контекстне меню, яке викликається натисканням правої кнопки миші на розділ Mesh.

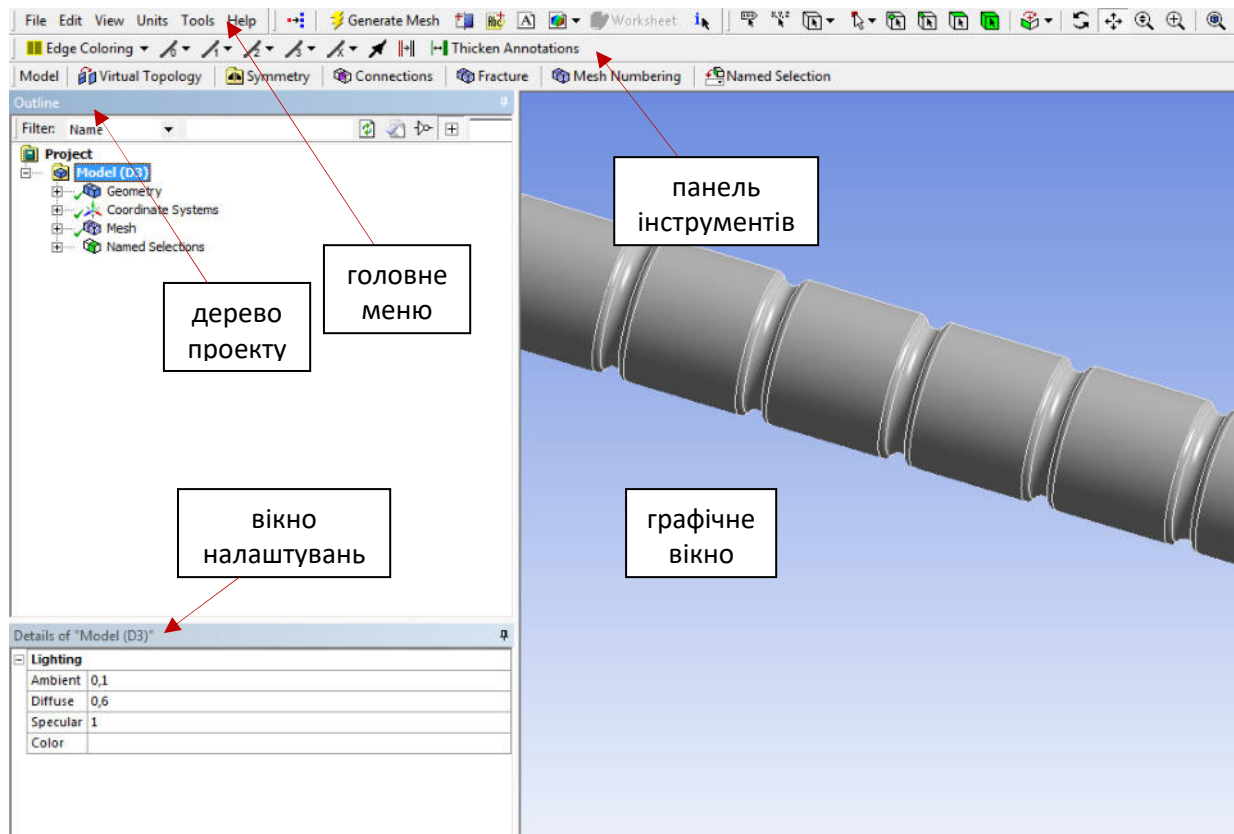


Рис. 2.12

Для попереднього перегляду поверхневої сітки перед запуском на розрахунок потрібно виконати команду Preview 'Surface Mesh з контекстного меню групи Mesh (рис. 2.13). Ця команда також доступна на панелі інструментів у випадаюсому меню Mesh (рис. 2.14).

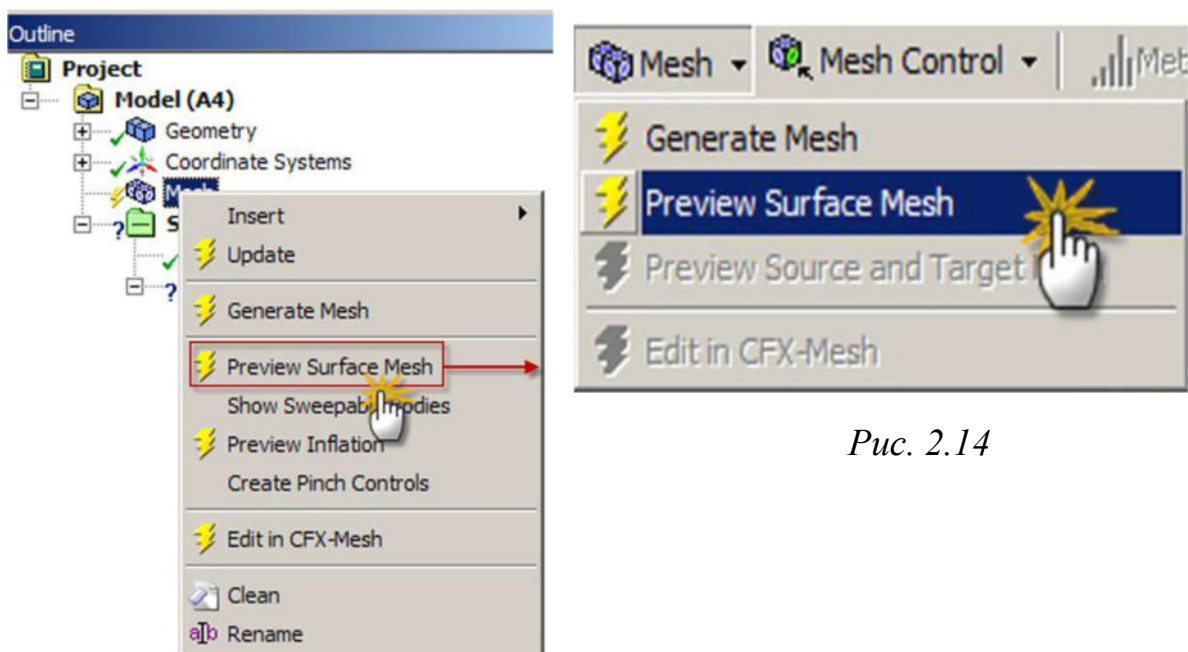


Рис. 2.14

Рис. 2.13

Розділ Defaults вікна налаштувань (Details of Mesh) містить два види установок (рис. 2.15):

- установки, рекомендовані для даного виду фізичної задачі, яка розглядається {Physics Preference);
- фактор щільності сітки (Relevance).

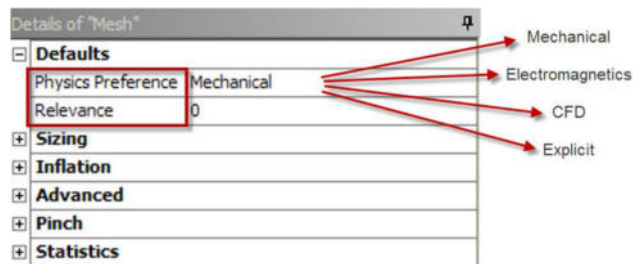


Рис. 2.15

Для кожного виду фізичного завдання існують певні правила. Зокрема,

Details of "Mesh"	
[-] Defaults	
Physics Preference	CFD
Solver Preference	CFX
<input type="checkbox"/> Relevance	30
[+] Sizing	
[+] Inflation	
[-] Patch Conforming Options	
Triangle Surface Mesher	Program Controlled
[-] Patch Independent Options	
Topology Checking	Yes
[+] Advanced	
[+] Defeaturing	
[-] Statistics	
<input type="checkbox"/> Nodes	1038720
<input type="checkbox"/> Elements	3190178
Mesh Metric	None

Рис. 2.16

для міцності завдань {Structural) - чим вище порядок елемента, тим грубіше допускається сітка.

Щільність сітки, створеної за замовчуванням, можна змінювати. Для цього слід вибрати фактор щільності сітки (Relevance), який можна задавати в межах від -100 до +100. За замовчуванням задається значення, рівне нулю. Для перегляду зміненої сітки можна

використовувати команду Preview> Surface Mesh. У вікні налаштувань в розділі Statistics знаходиться інформація про кількість вузлів елементів, які генеруються. На рисунку 2.16 цей розділ виділено червоною лінією.

В ANSYS Workbench кінцево-елементну сітку можна змінювати двома способами:

1. Задавати розширені опції зміни щільності сітки (Use Advanced Size Function) у вікні налаштувань.
2. Змінювати сітку глобально по всьому об'єму через зміну наступних опцій:

2.1. Розмір елементів (Element Size) задає середню довжину ребра елемента. Використовується фільтр вибору сторін елементів і вибирається репрезентативне ребро елемента (наприклад, по жорсткості). Для зміни розміру

елемента за замовчуванням потрібно в рядок Element Size ввести бажане значення розміру елемента (рис. 2.17).

2.2. Подоба і кривизна (Proximity and Curvature) задає подрібнення сітки в області сильного викривлення ребер для подібних ребер (рис. 2.18). Бігунком встановлюється значення в межах від -100 до +100. Якщо опція розміру елемента (Element Size) задана за замовчуванням (Default), опція Proximity and Curvature виконує ту ж функцію, що Relevance (фактор щільності сітки) в основних опціях зміни сітки. Подібність (Proximity) ліній враховується для видовжених тіл або якщо ввімкнено подібність деталей.

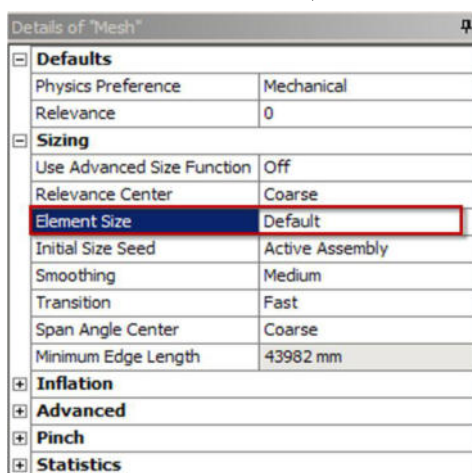


Рис. 2.17

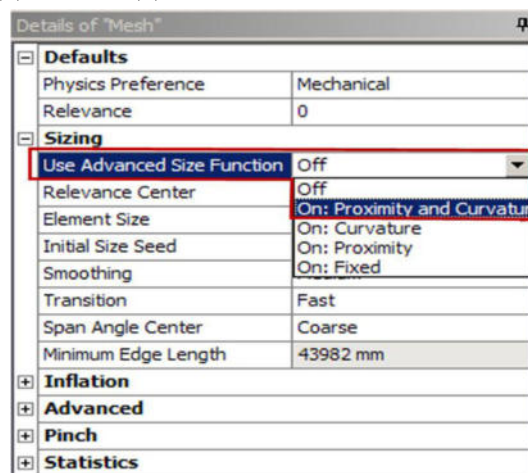


Рис. 2.18

2.3. Перевірка форми (Shape Checking) задає перевірку форми елементів (рис. 2.19). Для лінійного аналізу використовується стандартний спосіб (Standard Mechanical), для нелінійного і гідродинамічного аналізу задаються більш жорсткі вимоги до форми елементів (Aggressive Mechanical).

2.4. Джерело вихідного розміру (Initial Size Seed) вказує компонент геометрії, для якого визначається початковий розмір елементів всієї збірки чи її частини (рис. 2.20).

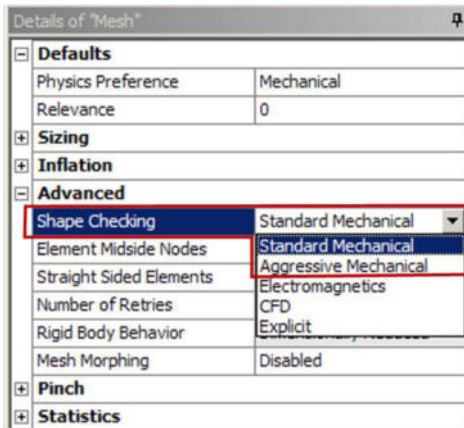


Рис. 2.19

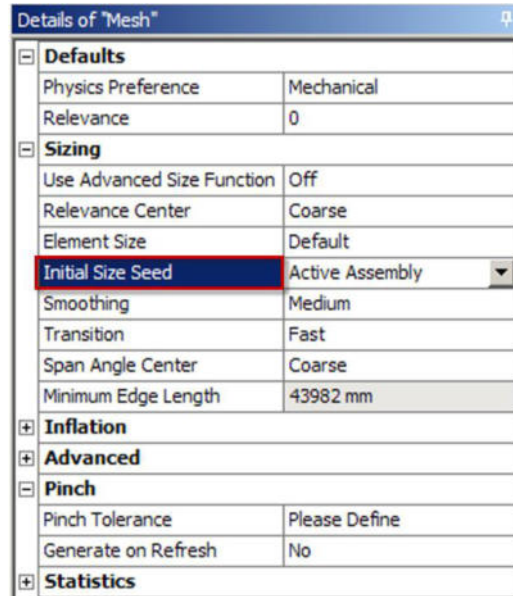


Рис. 2.20

Меню Mesh Control дозволяє вибрати геометричну форму елементів, містить команди для керування розмірами елементів створюваної сітки і інструменти її локального подрібнення.

Вибір опції Method, випадаючого меню Mesh Control панелі інструментів дозволяє контролювати форму елементів при автоматичній генерації сітки, при цьому в розділі Scope (область визначення) в рядку Geometry необхідно підтвердити обраний об'єкт натисканням клавіші Apply. Після цього у вікні налаштувань стають доступними наступні умови створення елементів (рис. 2.21):

- Automatic (автоматично) - заповнити об'єм генерацією паралелепіпедів, а де це неможливо, використовувати тригранні призми;

- Tetrahedrons (тетраедри) - створювати елементи тетраїдної форми;

- Hex Dominant (переважно гексаїдри) - створювати, по можливості, паралелепіпеди, а де це неможливо, використовувати піраміди і тетраїдри;

- Sweep (протягування) - створювати елементи протягуванням.

В даній роботі використовувався «Method Automatic».

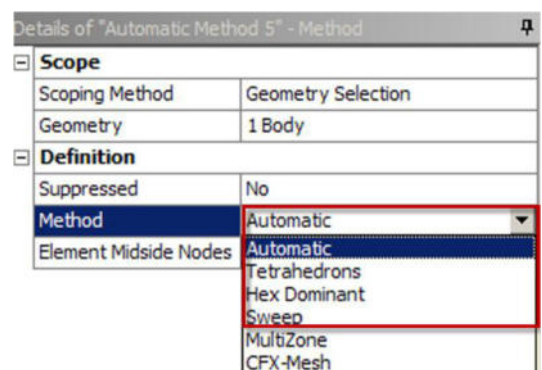


Рис. 2.21

Автоматична генерація сітки трансляцією елементів можлива, коли об'ємна геометрична модель має однакову топологію хоча б в одному напрямку, тобто подібний переріз уздовж деякого напрямку в просторі. У цьому випадку модель буде розбиватися на елементи у формі гексаїдрів. При розбитті можуть з'являтися елементи в формі тригранних призм, що є допустимим.

У Workbench є можливість локальної зміни сітки. Вибравши позицію Sizing (розмір елементів) меню, що випадає Mesh Control панелі інструментів, можна змінити щільність сітки локально. У вікні налаштувань в рядку Type доступні наступні опції:

- Element Size (розмір елементів) задає середню довжину сторін елементів для обраних геометричних об'єктів;
- Number of Divisions (число розбиття) задає кількість елементів на ребрі для обраних геометричних об'єктів;
- Sphere of Influence (зона змін в формі сфери) задає радіус сфери, всередині якої елементи генеруються з заданим розміром.

Параметри Sizing дозволяють змінити щільність сітки окремих деталей, збільшити або зменшити розмір елементів відносно параметрів, заданих глобально. Перераховані вище опції застосовуються до геометричних об'єктів, зазначених у таблиці 2.1. Для ліній, поверхонь і об'ємів центр сфери за замовчуванням задається щодо глобальної системи координат.

Таблиця 2.1

<i>Тип геометрії</i>	<i>Розмір елемента</i>	<i>Число розбиття</i>	<i>Зона змін (sphere of influence)</i>
Bodies	✓		✓
Faces	✓		✓
Edges	✓	✓	✓
Vertices			✓

Після створення сітки для її візуалізації за обсягом моделі можна задавати площину перетину, за допомогою якої користувач розсікає модель в цікавій для його області. Площина перерізу для перегляду внутрішньої сітки створюється

за допомогою кнопки New Section Plane (нова площина перетину), розташованої на панелі інструментів. Площина перерізу (Section Plane) може показувати на екрані внутрішню сітку. Є можливість використання декількох перетинів. Можна відобразити на екрані наступне:

- елементи з будь-якого боку обраного перетину;
- розсічені або цілі елементи;
- елементи в перерізі.

Помилки при генерації сітки.

Якщо генератор не може створити елементи правильної форми, з'являється повідомлення про помилку. Проблемні геометричні об'єкти будуть виділені, буде створена група обраних об'єктів Problematic Geometry (проблемна геометрія), що дозволить виправити модель.

Помилка при генерації сітки може відбутися з ряду причин:

- для поверхонь задані несумісні розмірні параметри, що може привести до створення кінцевих елементів некоректної форми;
- складна для автоматичного генератора сітки геометрична модель CAD, в якій присутні вузькі смуги або гвинтові поверхні;
- встановлений жорсткий контроль за формою елементів (опція Aggressive).

Є кілька способів уникнути відмов при генерації сітки:

- задати обґрунтовані розмірні параметри кінцевих елементів (опція Sizing);
- задати менші значення розмірних параметрів, що дозволить створити елементи коректної форми;
- в CAD-системі слід використовувати функції перегляду прихованих ліній, щоб виявити і видалити тонкі смуги і інші проблемні для генератора сітки геометричні об'єкти;
- слід використовувати віртуальні осередки, щоб об'єднати вузькі смуги і маленькі поверхні [24].

## 2.5 Передобробка в CFX-Pre

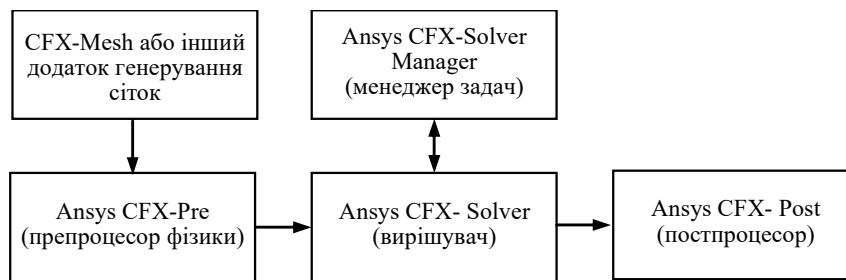



Рис. 2.22 - Схема поставлення і розв'язання задачі з використанням пакета ANSYS CFX

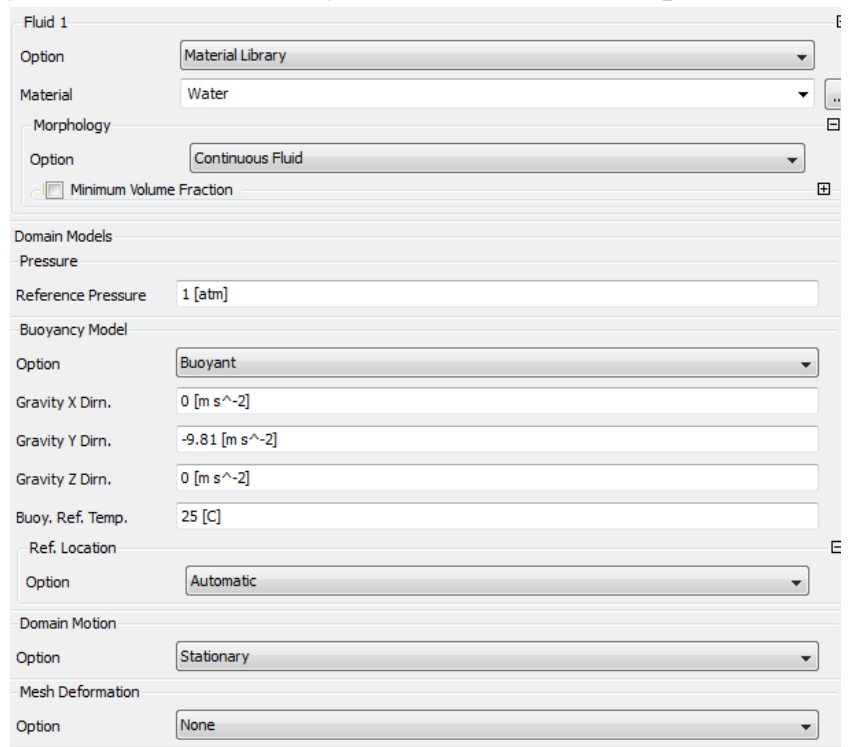
ANSYS CFX-Pre реалізує процес визначення фізики завдання. Фізичний препроцесор імпортує сітку, створену на попередньому кроці. Це наступний крок постановки завдання, на якому визначаються фізичні моделі, на основі яких буде відбуватися симуляція процесу, а також їх основні параметри і характеристики. CFX-Pre дозволяє визначити початкові і граничні умови процесу (вхідні, вихідні параметри), моделі теплообміну.

Щоб відкрити програму, слід вибрати «Setup» в структурній схемі модуля Fluid Flow (CFX).

Головним моментом у визначенні фізики роботи є вибір типу аналізу «Analysis Type»  Analysis Type у вікні «Outline». Тут задається повна тривалість фізичного процесу «Total time», крок часу «Timesteps» і потрібний проміжок часу «Initial Time».

Параметри розрахункової області.

Щоб визначити установки для всієї розрахункової області



потрібно створити домен, вибравши Insert > Domain в панелі головного меню. Відкриється вікно з деталями.

У вкладці «Basic Settings» вибираємо нашу розрахункову область в поле «Location» (рис. 2.23). Задаємо тип розрахункової області - рідина «Fluid Domain». Речовина - вода («Material» - «Water»). Тиск всій області «Preference Pressure» - 1 atm. Зазначаємо, що конвекція є «Buoyancy Model» - «Buoyant», тобто задаємо прискорення вільного падіння проти осі Y (Gravity Y Dirn. = - 9.8). Buoy.Ref. Temp = 25 [C].

Якщо потрібно задати обертання моделі в поле «Domain Motion» слід вибрати «Rotating», ввести кутову швидкість обертання і вісь, щодо якої обертається модель.

Переходимо у вкладку «Fluid Models». У вкладці «Heat Transfer» вибираємо «Total energy». Для визначення початкових умов переходимо у вкладку «Initializa-tion».

*Рисунком 2.23*

Визначаємо початкові значення для компонентів вектора швидкості, відносний тиск «Relative Pressure» вибираємо рівним нулю, початкову температуру рідини - 25 [C]. Натискаємо кнопку ОК.

Для використання іншої речовини (наприклад, масла) в якості рідини потрібно вибрати Insert -> Material в панелі головного меню.

## 2.6 ANSYS CFX Solver

ANSYS CFX-Solver – це програма, що реалізує процес розв’язання задачі обчислювальної гідродинаміки. Імпортується задача, поставлена за допомогою ANSYS CFX – Pre, і виконується пошук розв’язку всіх необхідних змінних:

1) рівняння у частинних похідних інтегруються по всьому об’єму задачі у області дослідження і повинні відповідати виконанню закону збереження (мас або кількості руху) для кожної досліджуваної області;

2) інтегральні рівняння, які були одержані, перетворюються в систему алгебраїчних рівнянь шляхом апроксимації членів в інтегральних рівняннях;

3) алгебраїчні рівняння розв’язуються чисельним методом.

ANSYS CFX-Solver Manager – це надбудова над CFX-Solver. Вона дозволяє контролювати хід розв’язання задачі:

- 1) визначати вхідні файли вирішувача;
- 2) запускати або припиняти CFX - Solver;
- 3) контролювати процес розв’язання задачі;
- 4) встановлювати CFX - Solver для проведення паралельних обчислень[27].

## **2.7 ANSYS CFX-Post**

ANSYS CFX-Post – це програма, призначена для аналізу, візуалізації і подання результатів, які одержані у ході розв’язання задачі за допомогою ANSYS CFX-Solver. Для цього використовуються такі засоби:

- 1) візуалізація геометрії та областей, які досліджуються;
- 2) векторні графіки для візуалізації напрямів і величин течій;
- 3) візуалізація зміни скалярних величин (таких, як температура, тиск) усередині досліджуваної області.

Графіки, зображення і відео, які одержані у результаті аналізу розв’язання задачі можна зберегти у вигляді окремих файлів.

## РОЗДІЛ 3

### СТВОРЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

Створення геометричної моделі проводилось за наступним алгоритмом. Геометрію потоку середовища креслимо в підпрограмі графічного моделювання «Geometry» в міліметрах. Для цього необхідно перетягнути ярлик «Geometry», який знаходиться в «Toolbox», в робоче поле проекту (рис. 3.1).

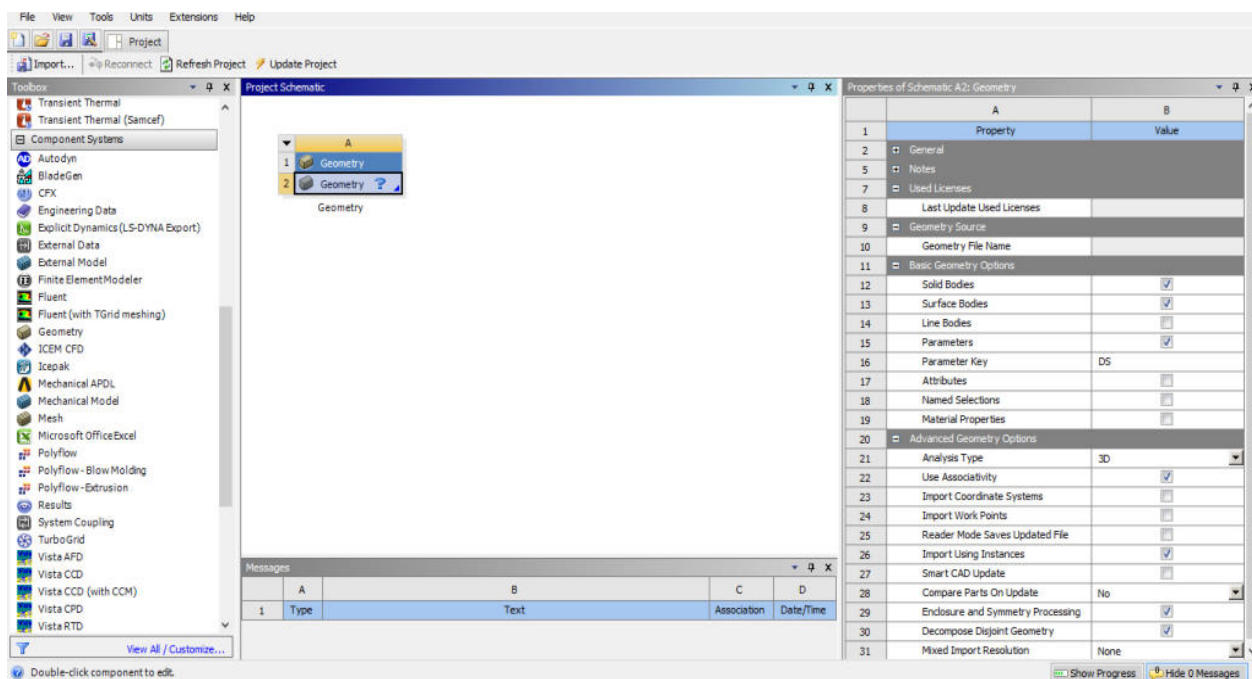


Рисунок 3.1

Використовуючи команди Draw, Dimensions малюємо ескіз майбутньої фігури і проставляємо розміри (рис. 3.2).

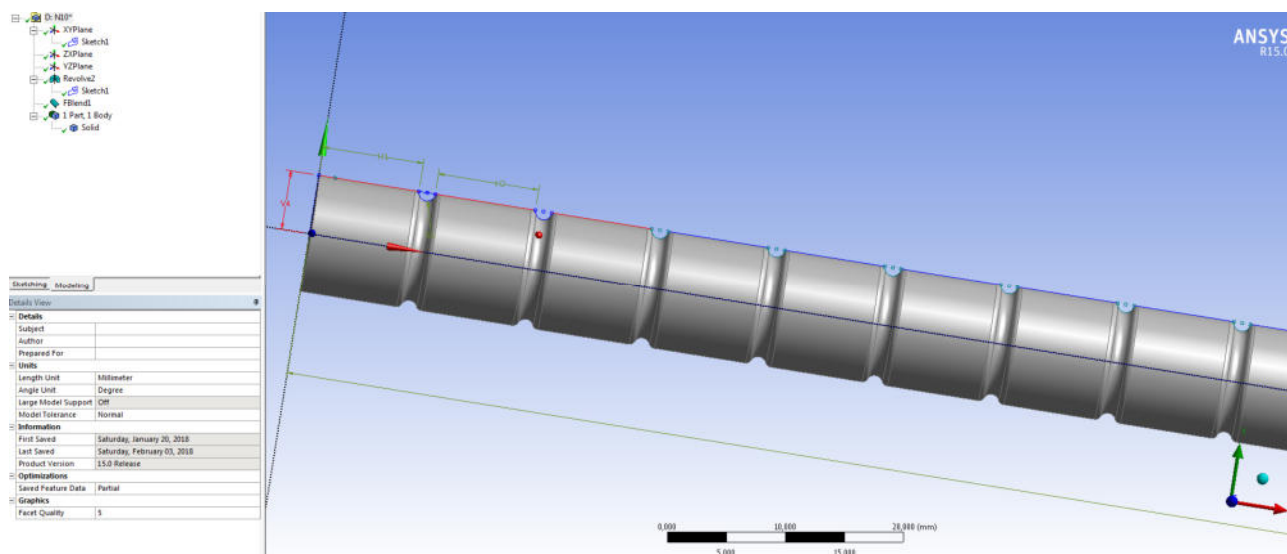


Рисунок 3.2

Функцією «Revolve» створюємо об'ємну фігуру. В «Geometry» задаємо контур нашої фігури(Sketch1), вісь Axis та будуємо трубу на 180° (рис. 3.3).

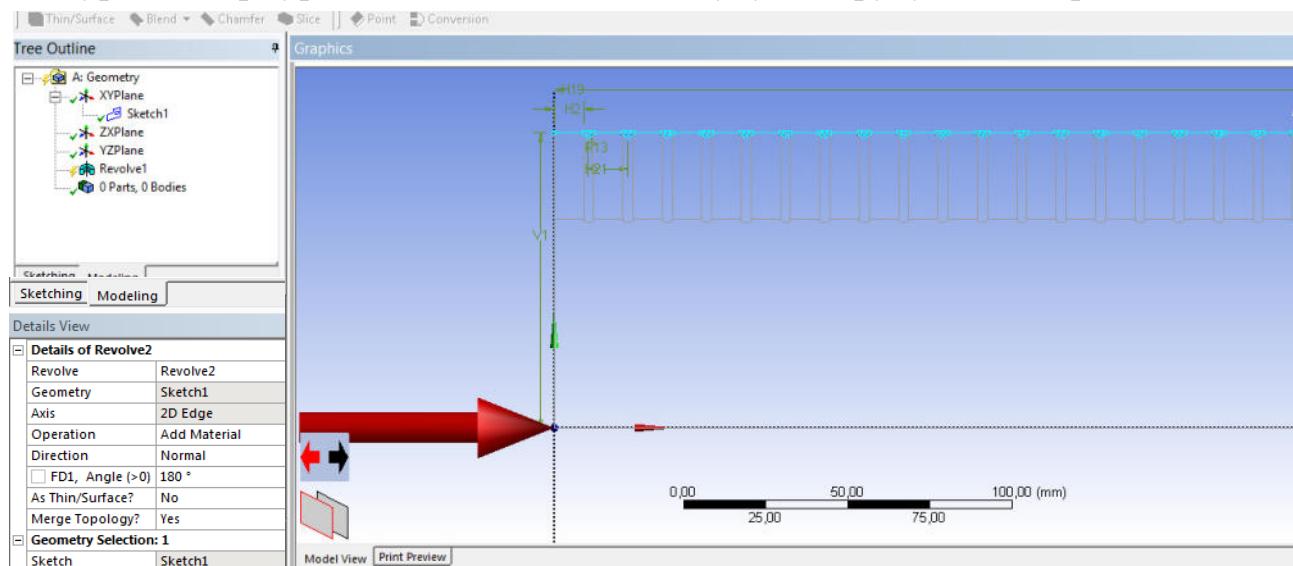


Рисунок 3.3

Натискаємо Generate та отримуємо потрібну фігуру (рис. 3.4).

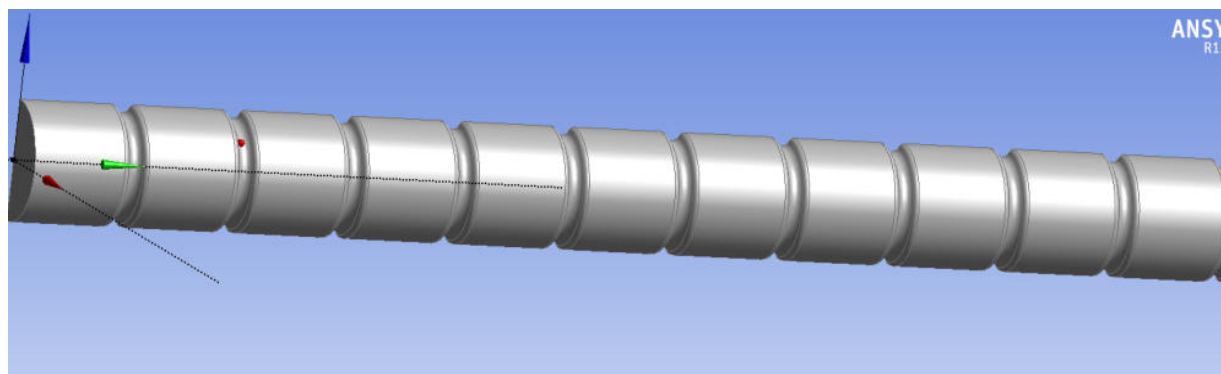


Рисунок 3.4

Створюємо закруглення постійного радіуса (0,5мм) використовуючи команду *Blend / VariableRadius*. Для цього виділяємо всі ребра і натискаємо *Generate* (рис. 5.1-5.2).

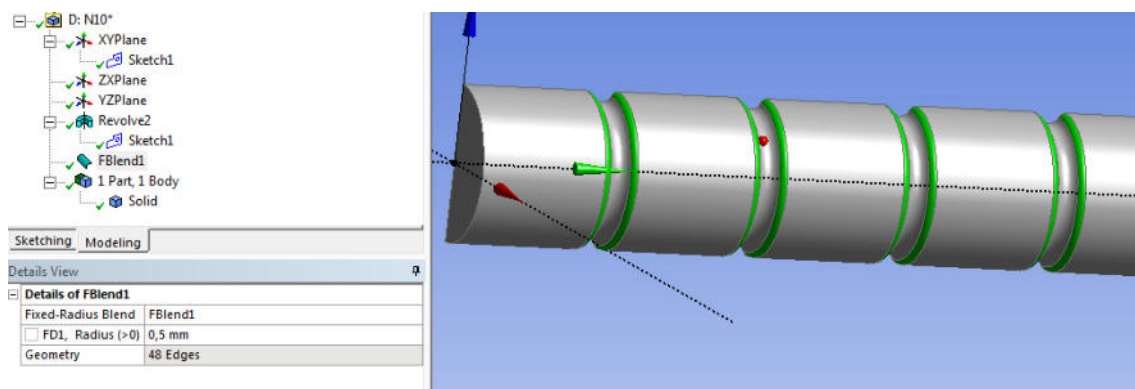


Рисунок 3.5

Накладаємо сітку. Для цього необхідно перейти на вкладку *Mesh/Insert/Method* (рис. 3.6) і в вікні що з'явиться обрати необхідний метод побудови сітки. Для нашої моделі оптимальний Automatic Method.

Виділяємо за допомогою опції *BoxSelect/Edge* всі ребра та задаємо для них необхідну кількість точок для адекватних прив'язок майбутньої розрахункової сітки.

Задаємо параметри інфляції *Mash/Insert/Inflation* для цього виділяємо стінку та задаємо необхідні параметри, як це зображено на рис. 3.7. Після цього натискаємо клавішу *Generate* для генерування сітки. (рис. 3.8-3.9).

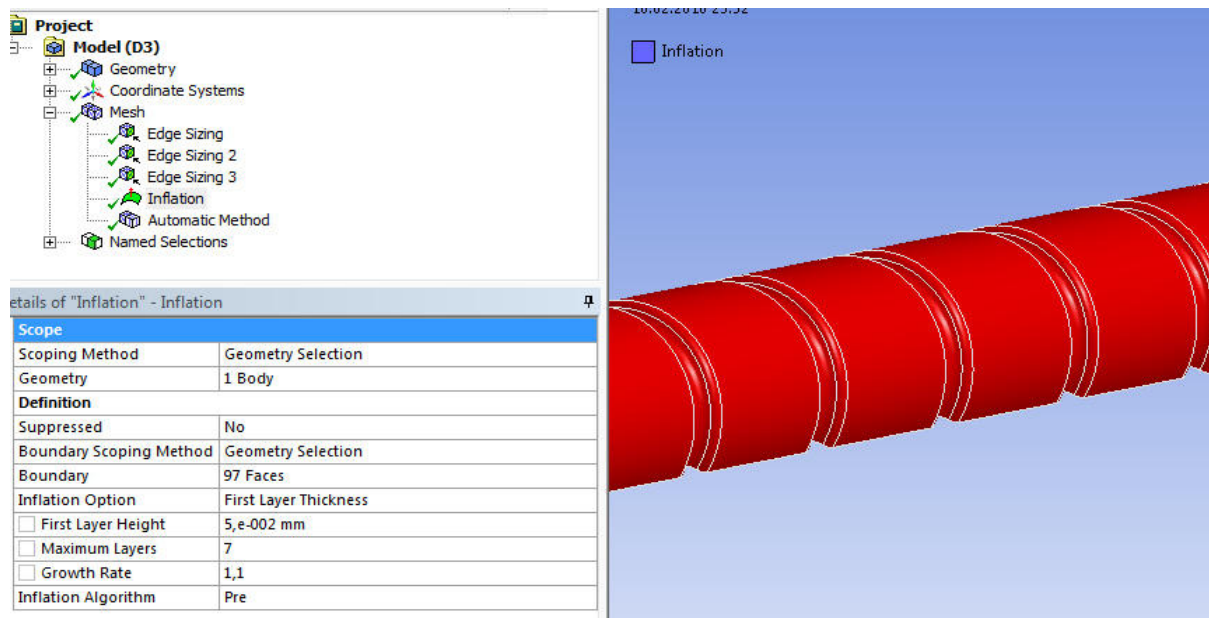
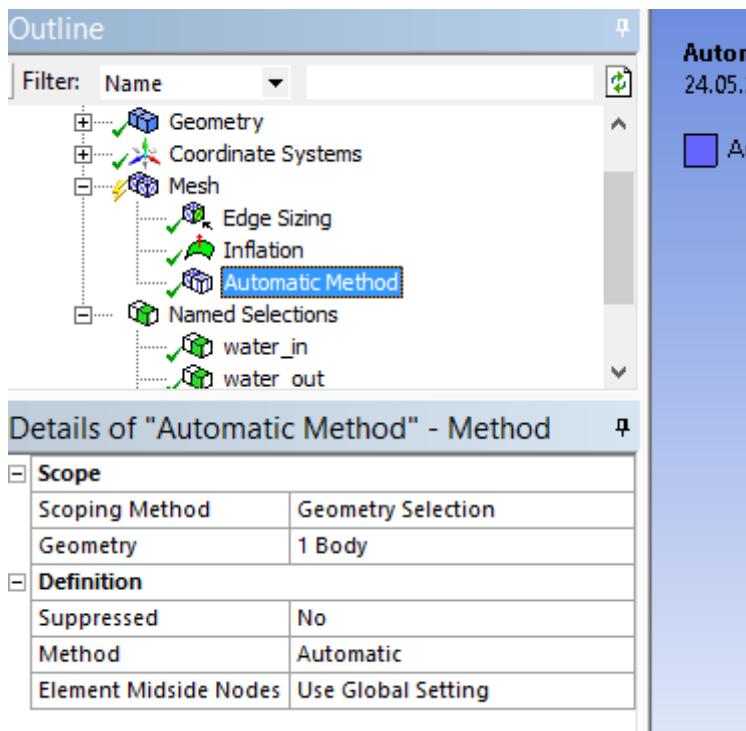


Рисунок 3.7

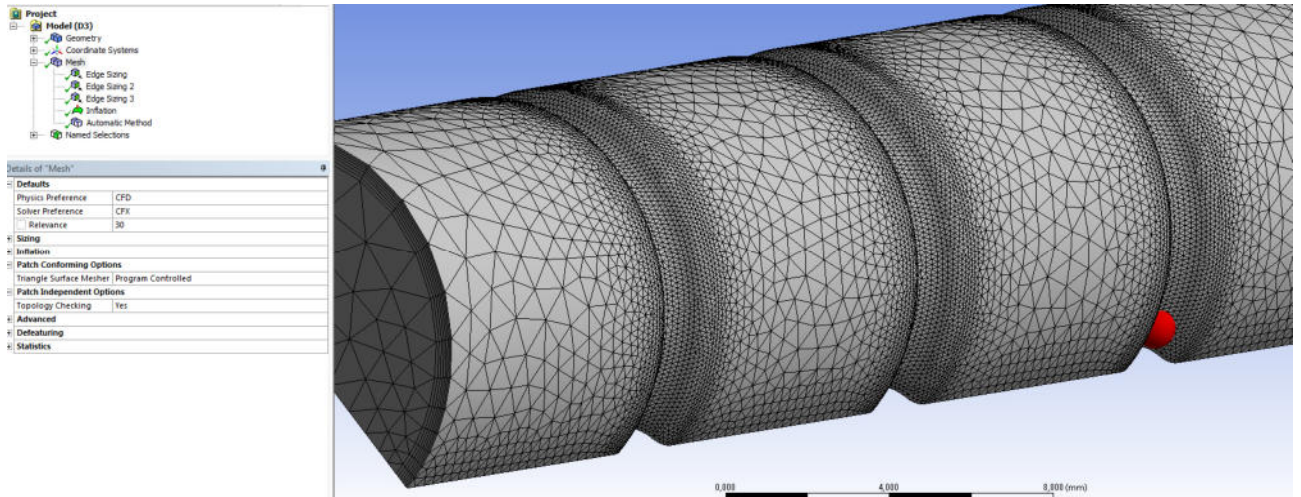


Рисунок 3.8

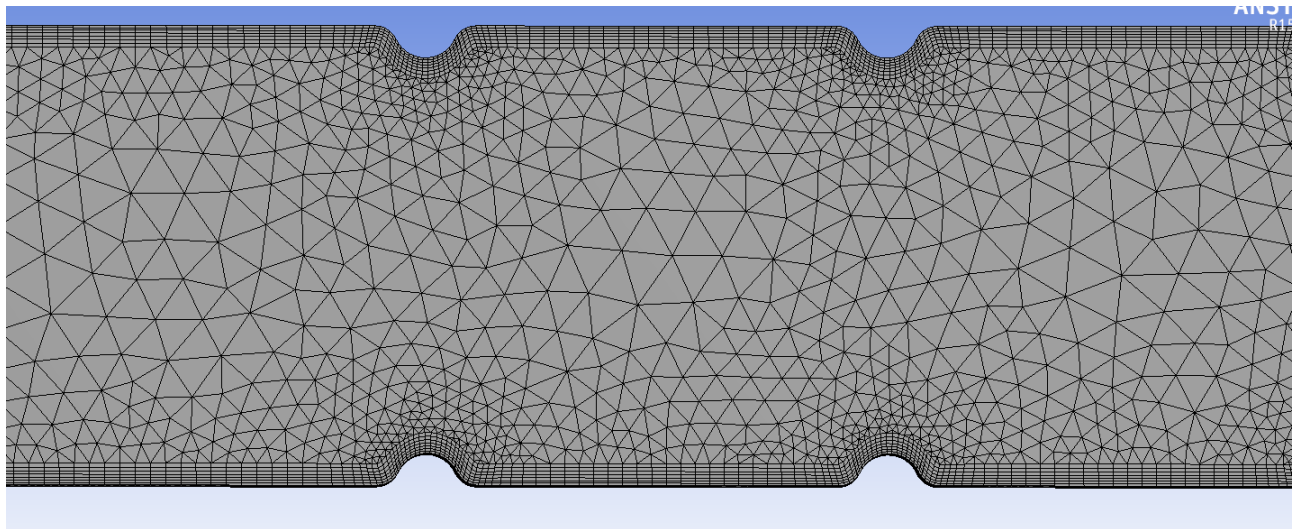


Рисунок 3.9

Вказуємо вхід і вихід води, стінку трубопроводу та внутрішню частину труби. Це необхідно для полегшення подальшої роботи в програмі. Для цього необхідно вибрати певну площину, наприклад торець труби (вхід води), натиснути ПКМ і обрати позицію *Create Named Selection* та пишемо назву (наприклад «wall») (рис.3.10 ).

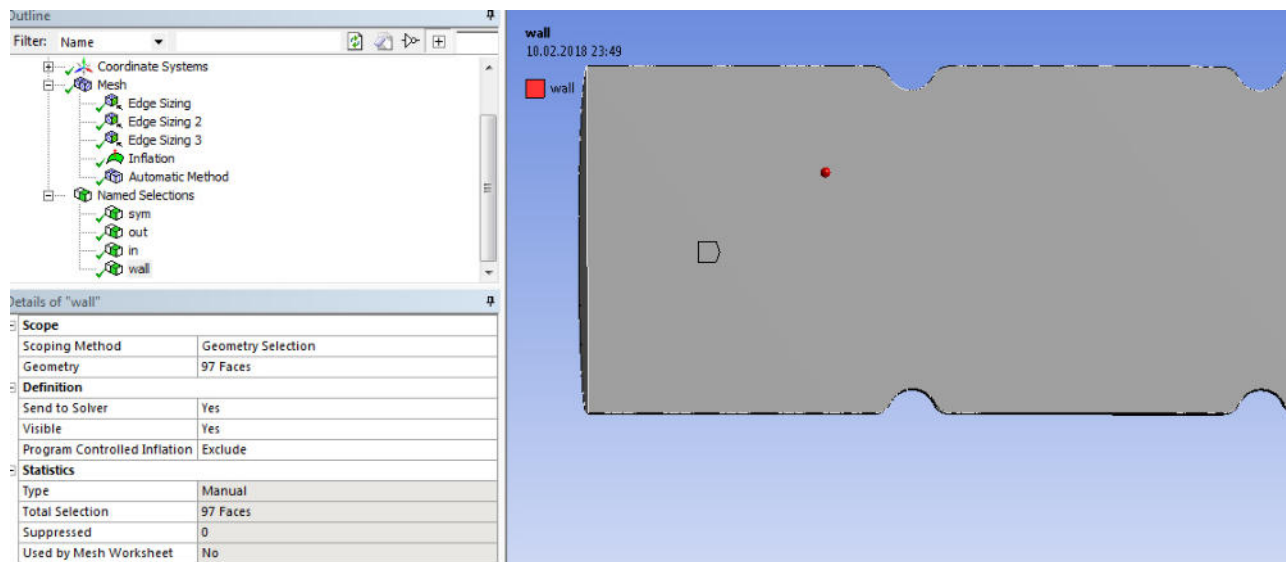


Рисунок 3.10

Збергаємо файл сітки ( *File/Export* ) у форматі *.msh*.

Запускаємо *CFX* створюємо новий файл. У робочому вікні, яке відкрилось, натискаємо *Mesh/Import* і відкриваємо збережений файл сітки (рис. 3.11).

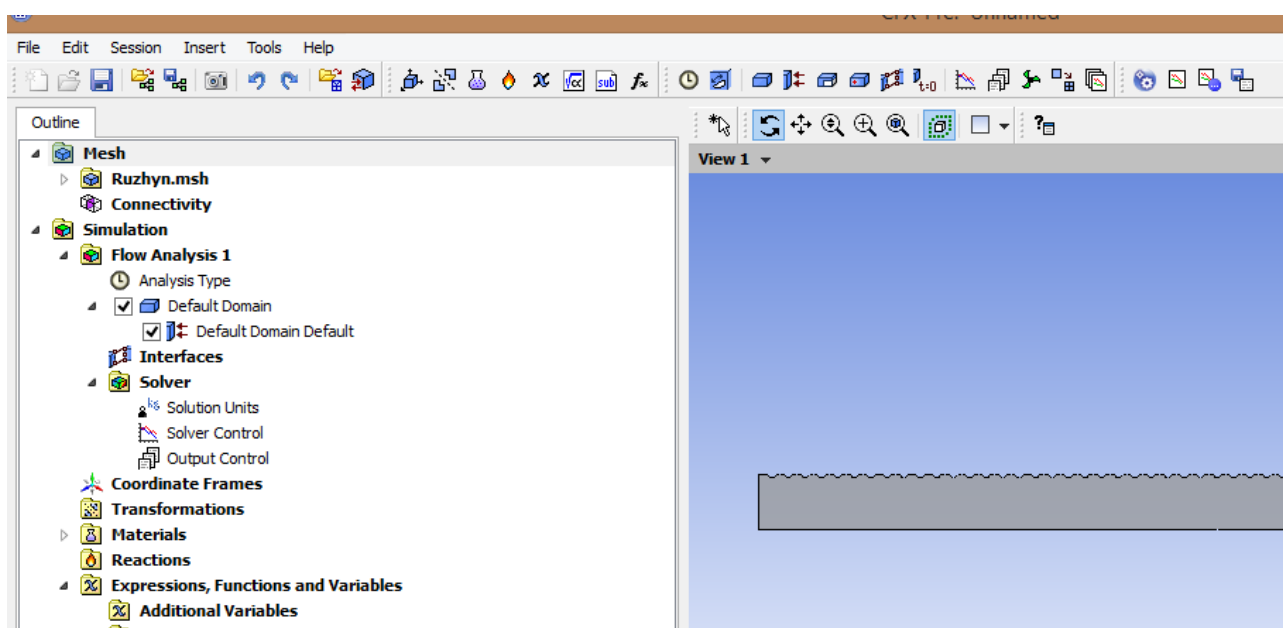


Рисунок 3.11

Двічі натискаєм ЛКМ на *Default Domain*, відкриється вікно де потрібно задати матеріал (Material(Waret)), тиск, постійну гравітаційну сталу (-9,81 по осі Y) та температуру, як показано на рис. 3.12.

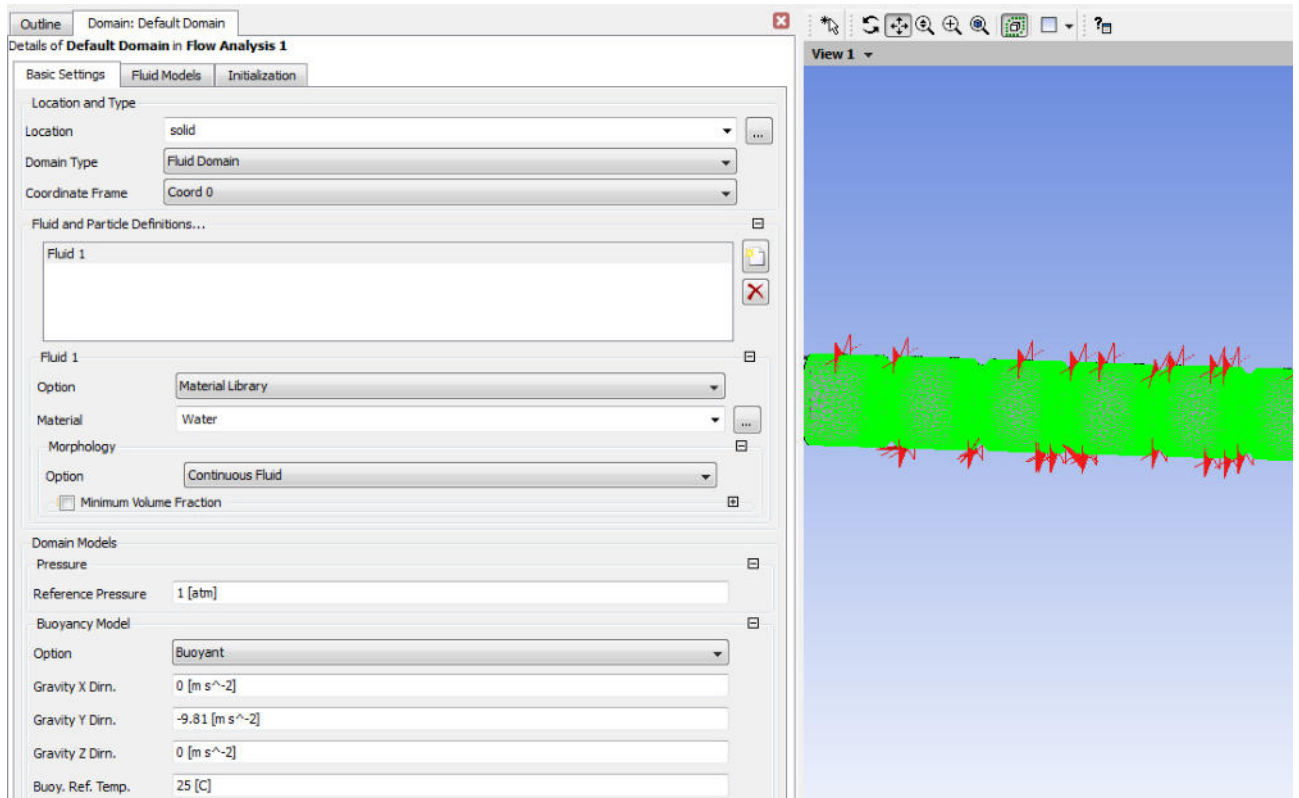


Рисунок 3.12

У вкладці Fluid Models обираємо необхідний режим руху рідини (SST) (рис. 3.13).

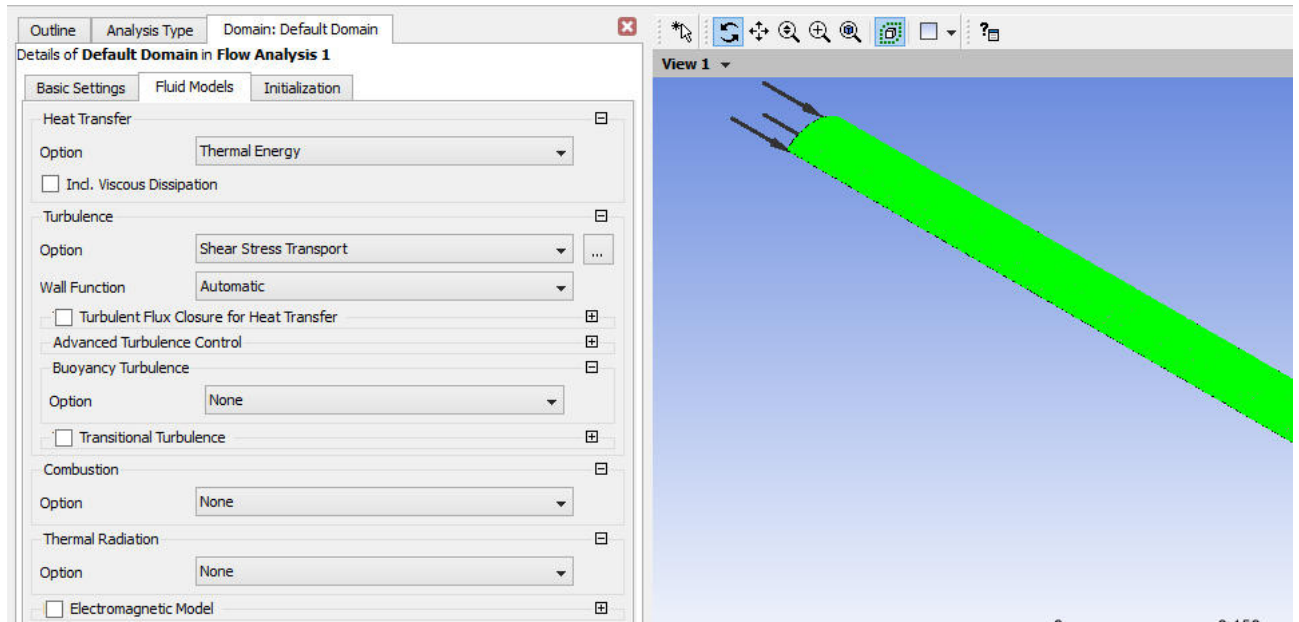


Рисунок 3.13

Задаємо вихідні параметри. ПКМ натискаємо на *Named Default/Insert/Boundary/(вводимо, наприклад, вхід води) water\_in*. У вікні яке з'являється потрібно задати необхідні дані. Для входу: Inle, витрату води, температуру води (25 °C) (рис. 3.14);

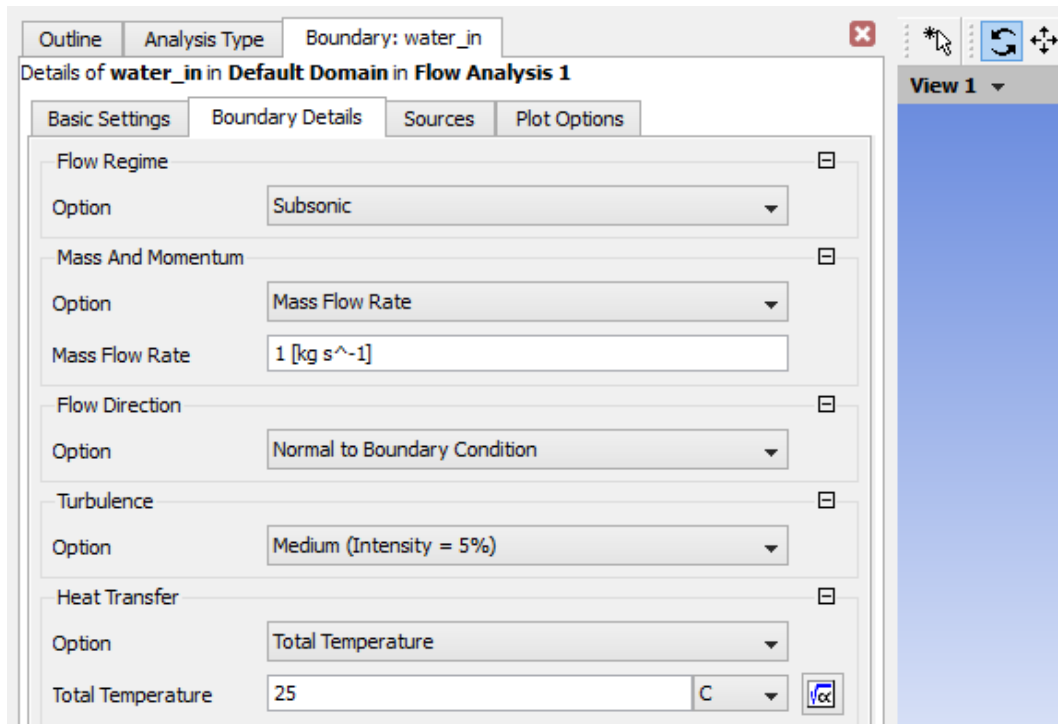


Рисунок 3.14

для стінки: температуру стінки 55 °C і не забуваємо про симетрію *Anamed Default/Insert/Boundary/symmetry*(рис.3.15).

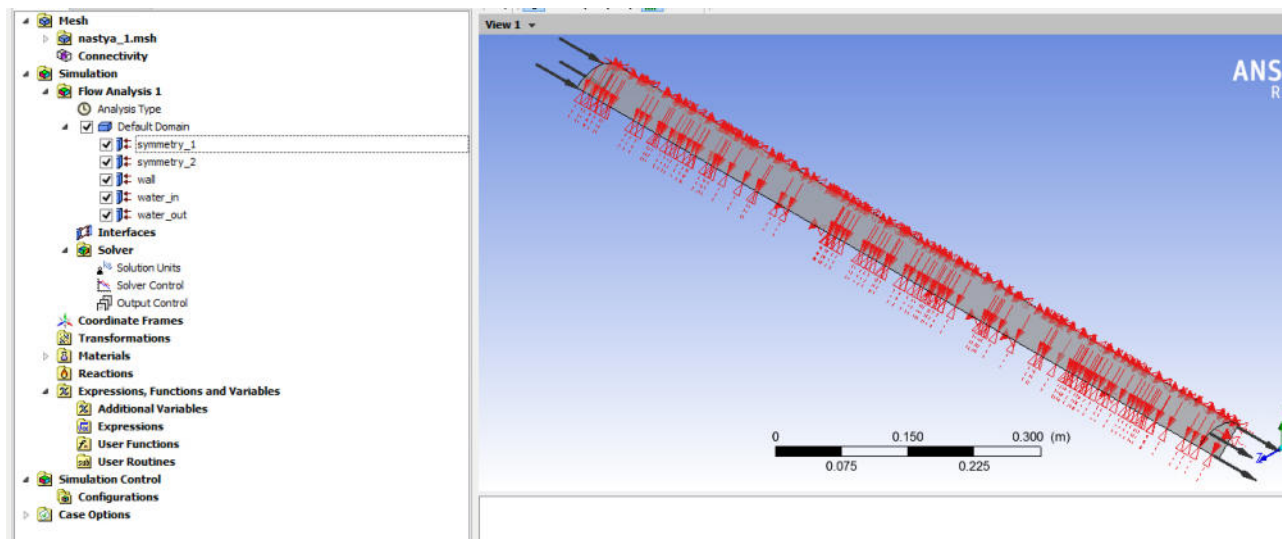


Рисунок 3.15

У вкладці Solver Control задаємо мінімальну і максимальну кількість ітерацій (1 і 10000 відповідно) (рис. 3.16).

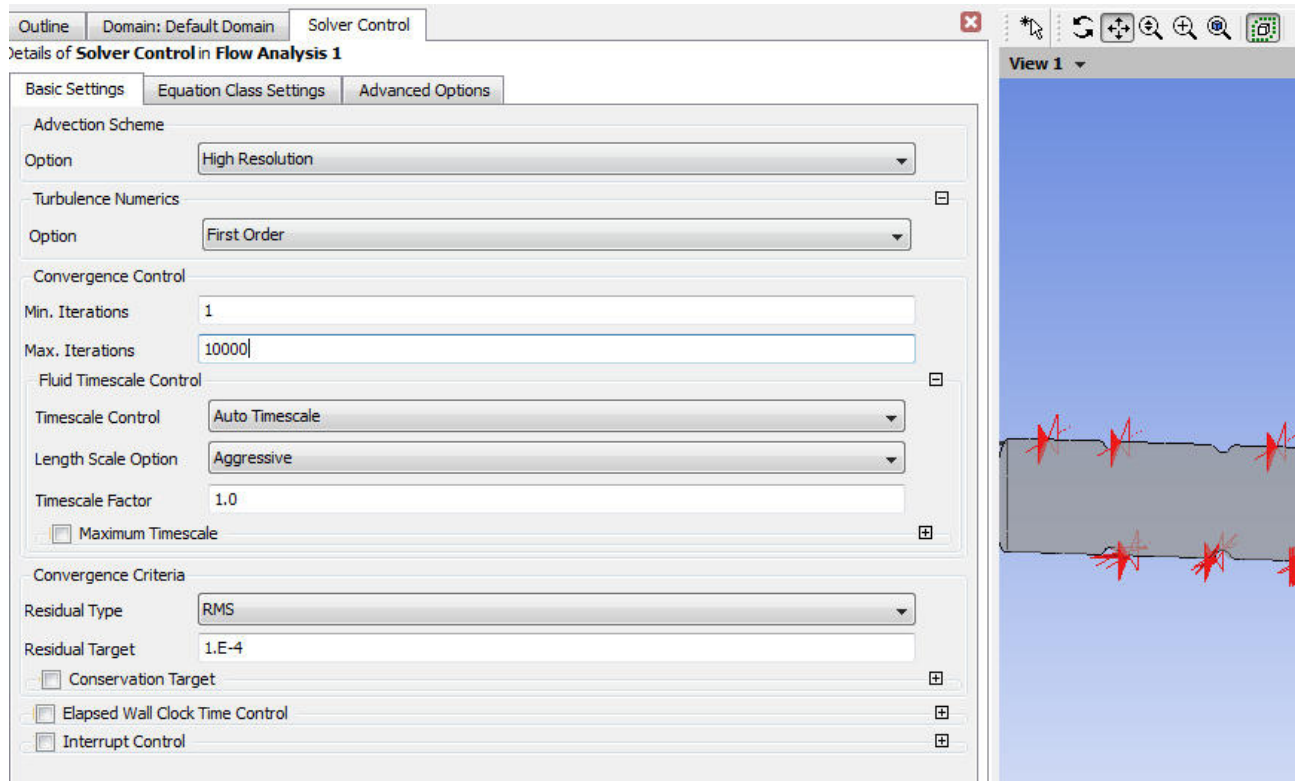


Рисунок 3.16

Потрібно зберегти для подальшого розрахунку solver файл. Для цього натискаємо Define Run/Save і після цього запускається solver менеджер і натискаємо Start Run. Програма розпочне розрахунок, його можна зупинити коли кожна лінія на графіку перетне відмітку квадратичної нев'язкості  $1e-03$  (рис. 3.17).

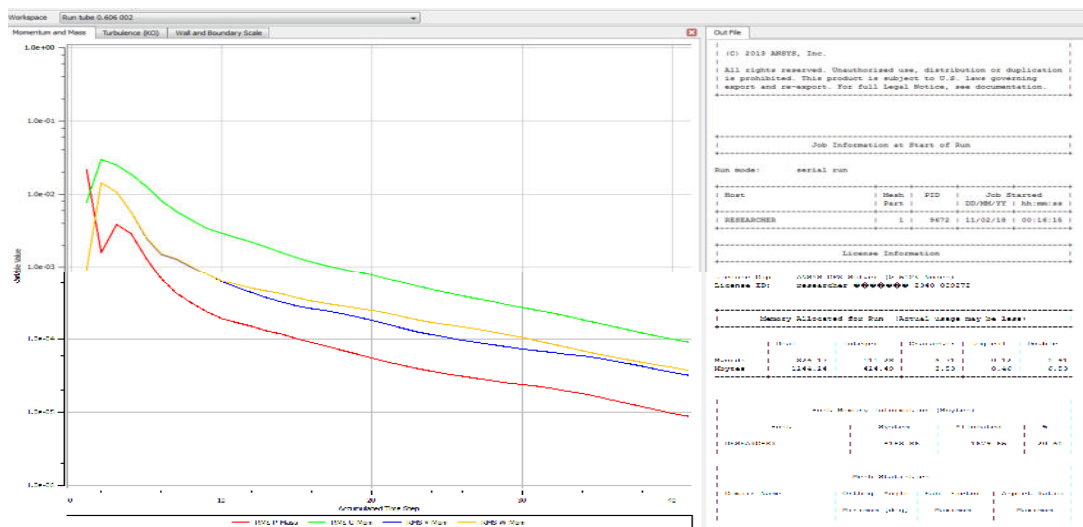


Рисунок 3.17

Зберігаємо розрахунок у форматі .res для подальшого виведення результатів.

## РОЗДІЛ 4

### ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

#### 4.1 Вивід результатів в програмний модуль CFD-Post.

Розрахунки тривимірних моделей проводились в модулі програми CFX – Solver. Точність отриманих результатів демонструється сходженням розрахованої системи рівнянь та середньоквадратичних не в'язок і складає понад 1500 ітерацій.

Отримані результати імпортовано до програмного модуля CFD-Post, звідки і проводився аналіз результатів розрахунків.

Так для заданих геометричних моделей побудовано профілі швидкостей і температур, розраховані коефіцієнти гідравлічного опору та побудовані відповідні графіки.

*Таблиця 4.1 Геометричні характеристики теплообмінних труб*

№	h, мм	D, мм	L, мм	t, мм	d/D	t/D	t/h
1	1	7,6	250	4	0,74	1	67
2	0,7	10	250	10	0,86	1	14,3
3	1	7,6	250	7,5	0,74	1	7,5

Відповідно до таблиці 4.1., розглянемо результати моделювання теплообмінної труби під №1.

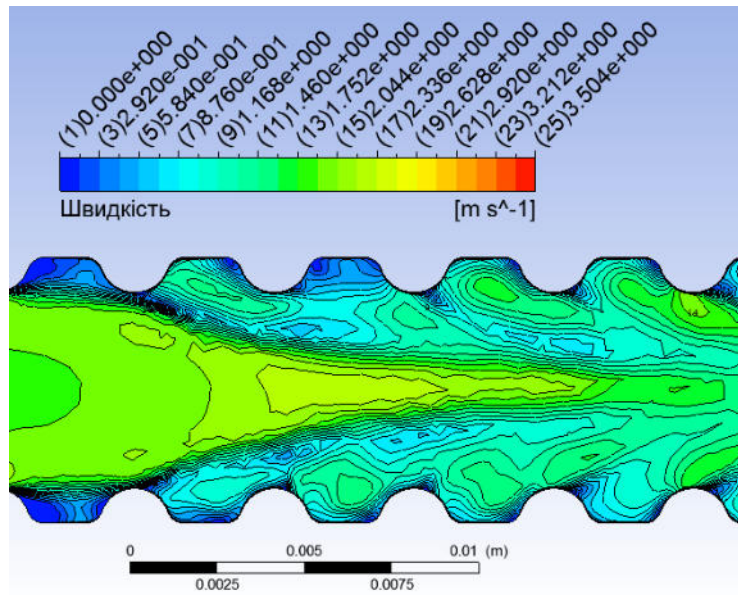
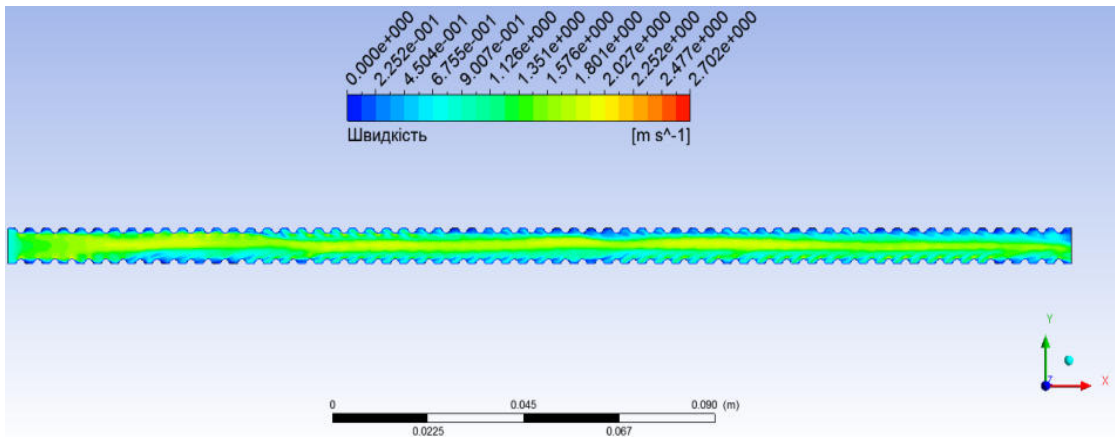


Рис. 4.1. Профіль швидкості теплообмінної труби №1 при  $Re=6000$

З профілів швидкості видно, що в даній геометрії досліджуваної труби спостерігаємо «застійні» зони, які утворюються в каналах двовимірної шороховатості, що в свою чергу впливає на структуру потоку. Для більш детального аналізу розглянемо профіль швидкості представлений вектором.

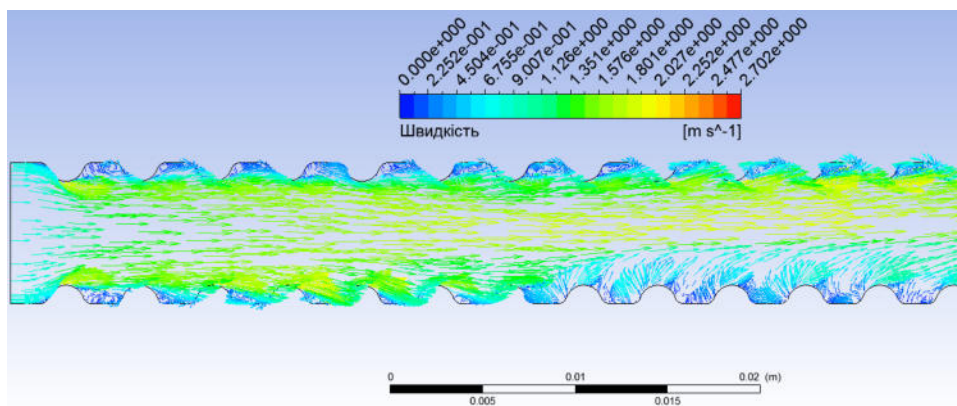
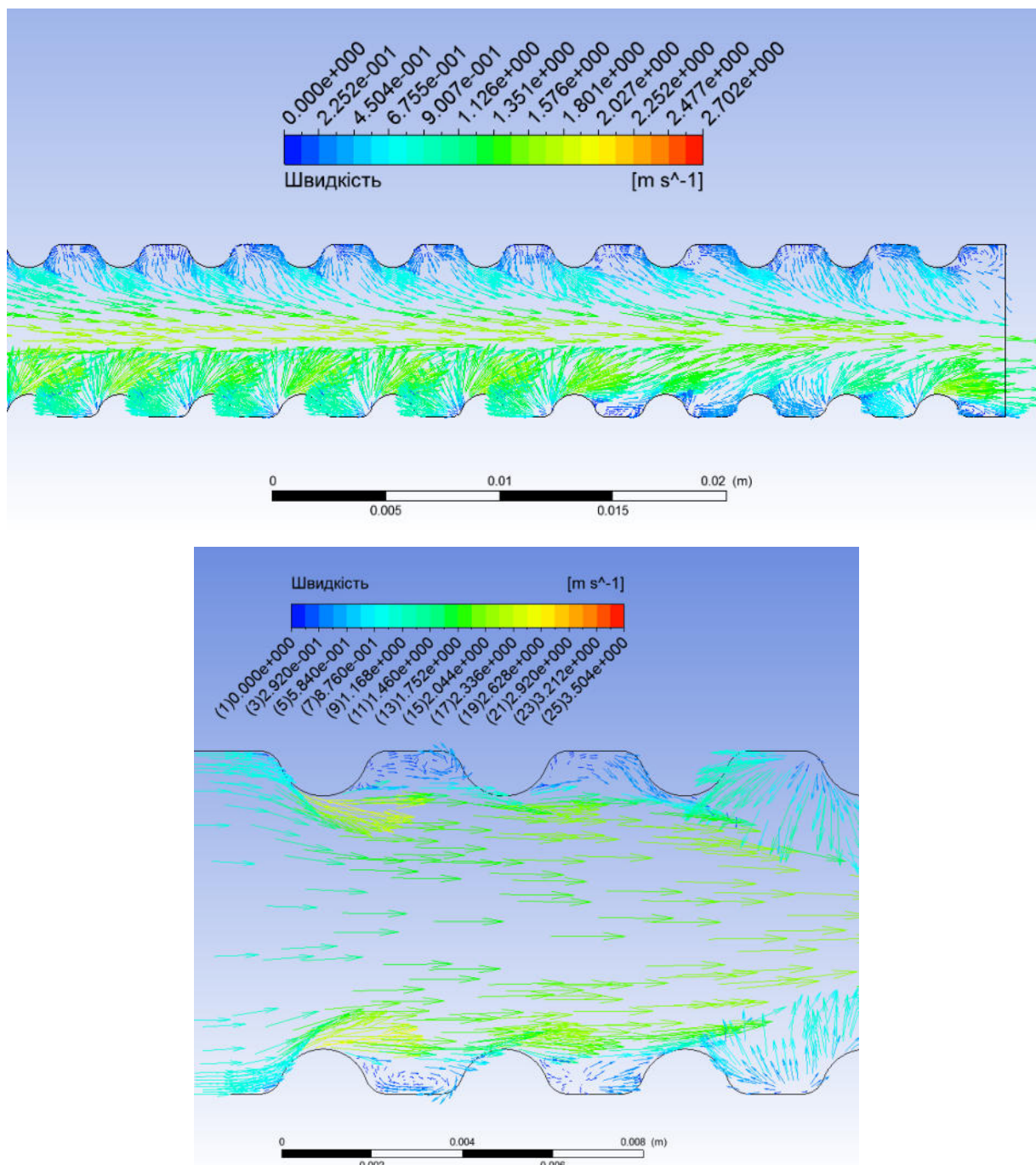


Рис. 4.2. Вектор швидкості теплообмінної труби №1 при  $Re=6000$

З рис. 4.2 яскраво видно, що після довжини труби 40мм, відбувається інтенсивне перемішування потоку води за рахунок нижніх інтенсифікаторів. А на довжині труби за 150 мм, на інтенсивне перемішування впливають, як нижні так і верхні інтенсифікатори, за рахунок завихрення потоку води в каналах, що представлено на рис. 4.3.



*Рис. 4.3. Зони завихрення потоку води за рахунок турбулізаторів, дослідна секція №1*

Для кожного виду труби проводились розрахунки коефіцієнту гідравлічного опору за даною формулою:

$$\Delta p = \xi \frac{w^2 L}{2D} \rho,$$

де  $\Delta p$  - перепад тисків на вході та виході з досліджуваної труби,  $\xi$  - коефіцієнт гідравлічного опору,  $w$  - середня швидкість,  $L$  – довжина досліджуваної секції,

$D$ - діаметр труби,  $\rho$ - густина. Звідки  $\xi = \frac{\Delta p 2D}{w^2 L \rho}$ , розрахунки проводились в

системі CI, з використанням «Function Calculator», вбудований в модуль програми CFD-Post. На рис. 4.3. представлено робоче вікно «Function Calculator».

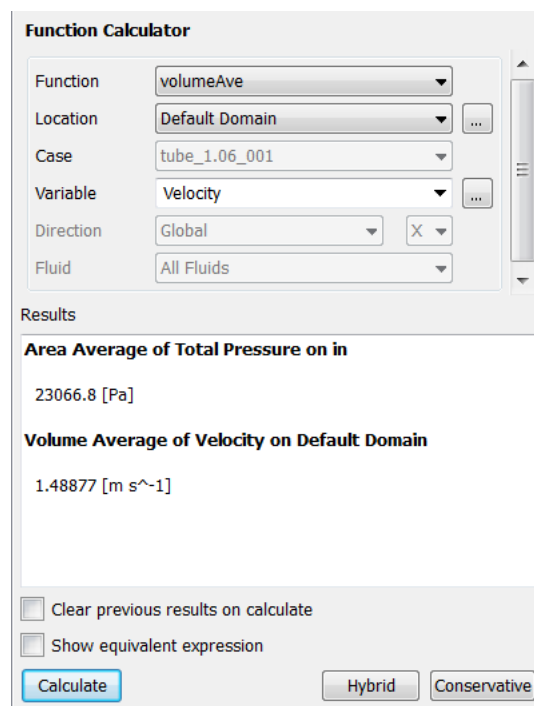


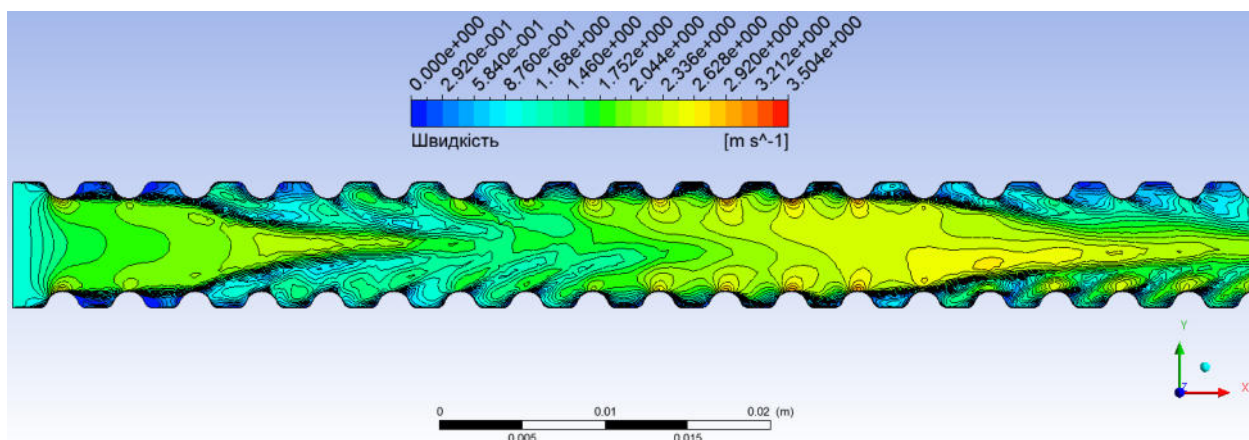
Рис. 4.3. Робоче вікно Function Calculator

Так для труби під номером 1, коефіцієнт гідравлічного опору за встановленими режимними параметрами ( $Re=6000$ ,  $t_{in} = 25^{\circ}C$   $t_{wall}=55^{\circ}C$ )

становить:  $\xi = \frac{11338 \cdot 2 \cdot 7,6}{1,1^2 \cdot 997 \cdot 250} = 0,5$ , що відповідає значенням отриманих

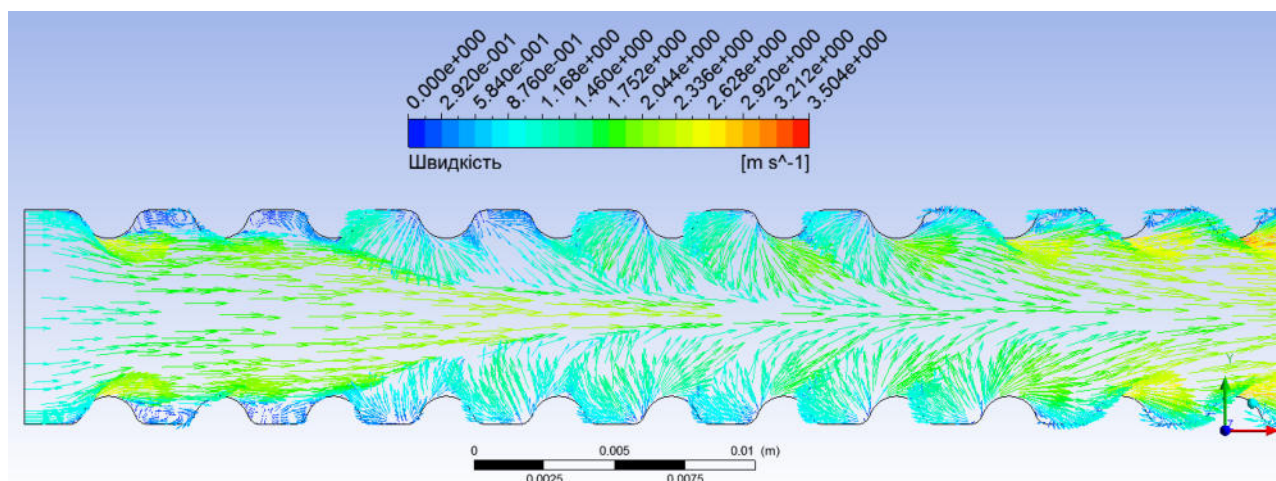
експериментальним шляхом, в роботах закордонних науковців.

Для всіх інших варіантів труб, проводились аналогічні розрахунки, з виводом результатів в програмний модуль CFD-Post.



*Рис. 4.4. Профіль швидкості теплообмінної труби №1 при  $Re=8000$*

Як видно з рис. 4.4, при зростанні числа Рейнольдса, відбувається інтенсивне збурення потоку, що в свою чергу впливає на розподіл профілю швидкості води.



*Рис. 4.5. Зони завихрення потоку води за рахунок турбулізаторів, дослідна секція №1,  $Re=8000$*

З рис. 4.5. спостерігаємо інтенсивне збурення основного ядра потоку води на відстані 90мм.

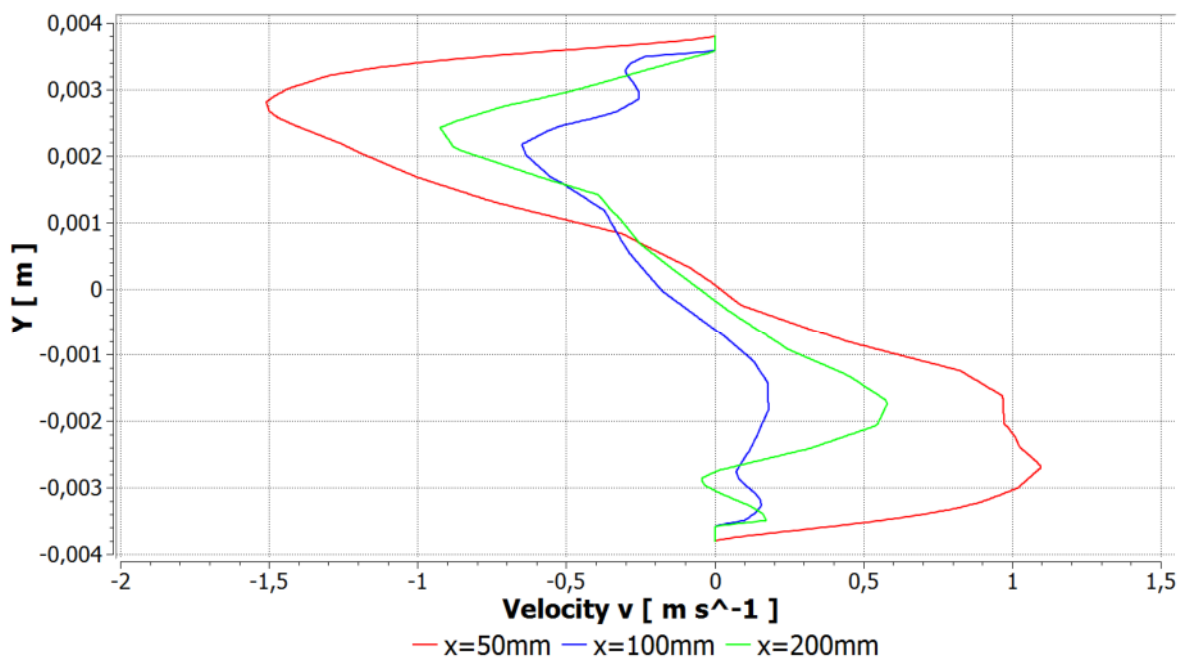


Рис. 4.6. Розподіл швидкості води по висоті дослідної секції.

Аналогічні розрахунки виконано і для інших двох варіантів розрахункових труб. Результати деяких з них представлено нижче.

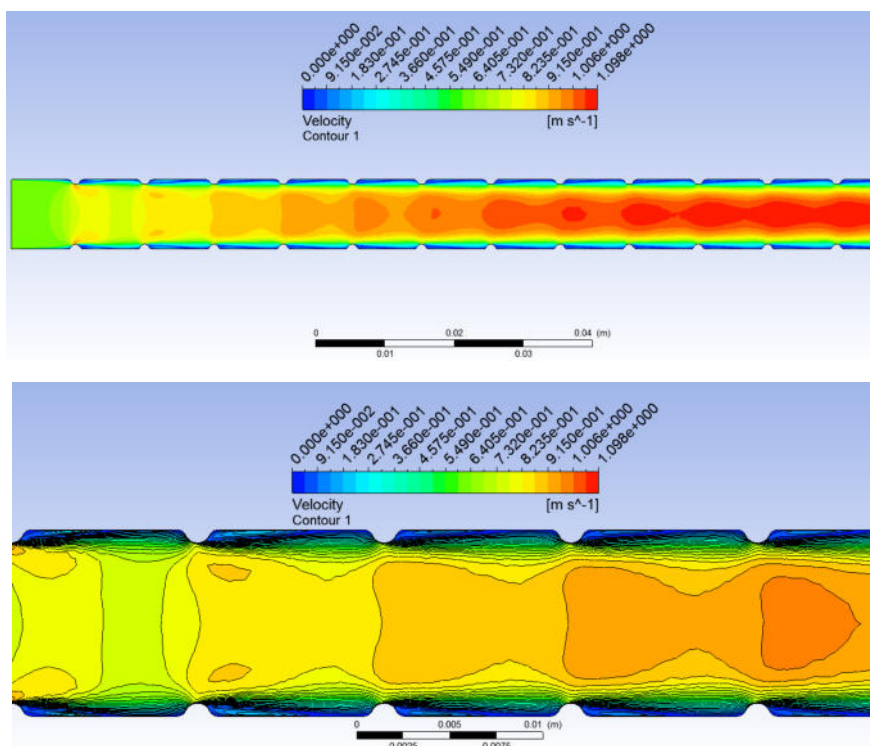


Рис. 4.5. Зони завихрення потоку води за рахунок турбулізаторів, дослідна секція №2,  $Re=6000$

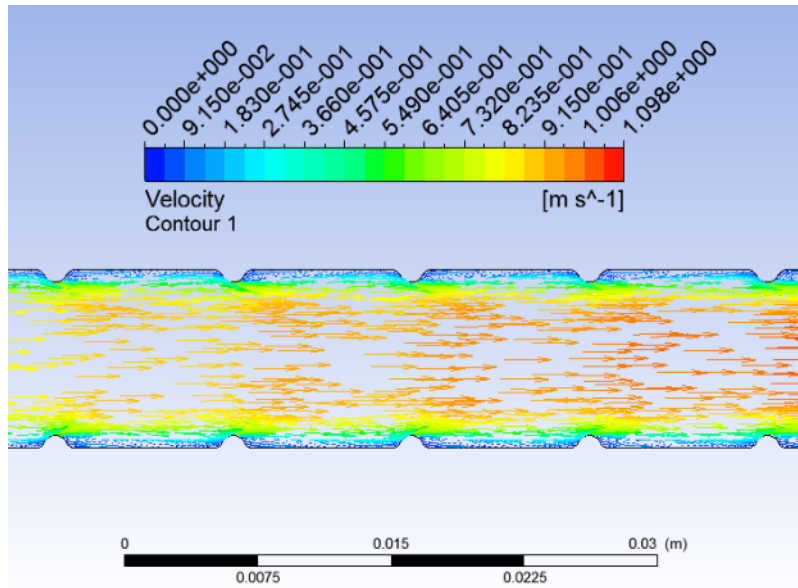


Рис. 4.6. Зони завихрення потоку води за рахунок турбулізаторів, дослідна секція №2,  $Re=6000$

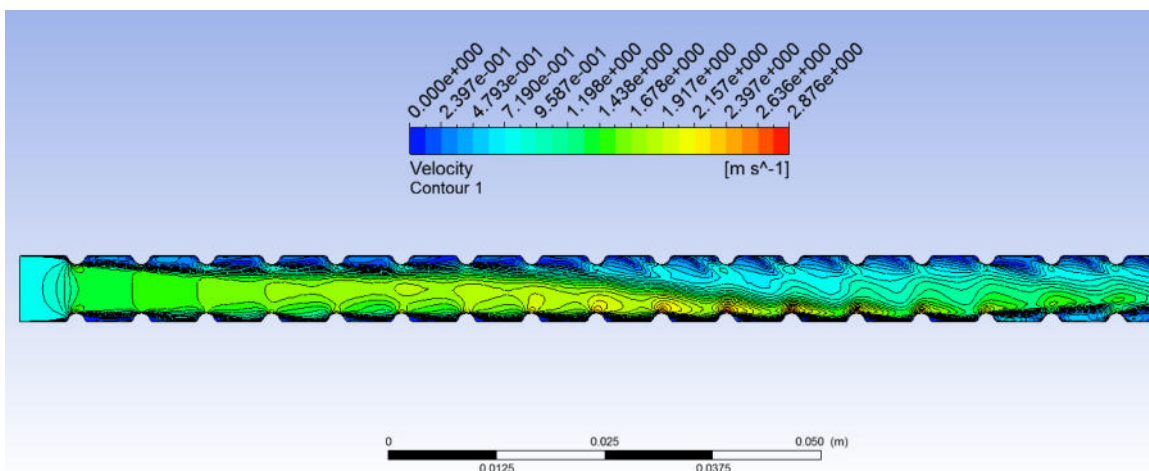


Рис. 4.7. Профіль швидкості, дослідна секція №3,  $Re=6000$

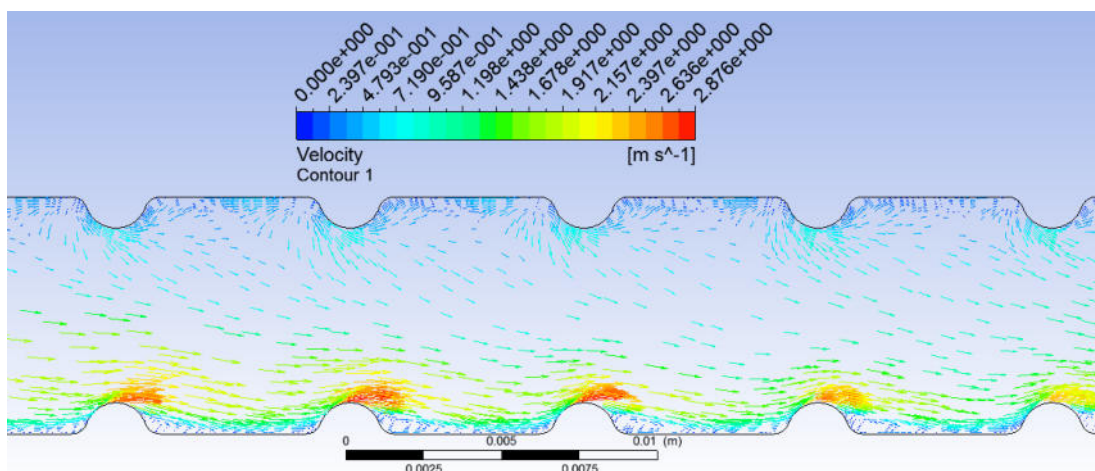
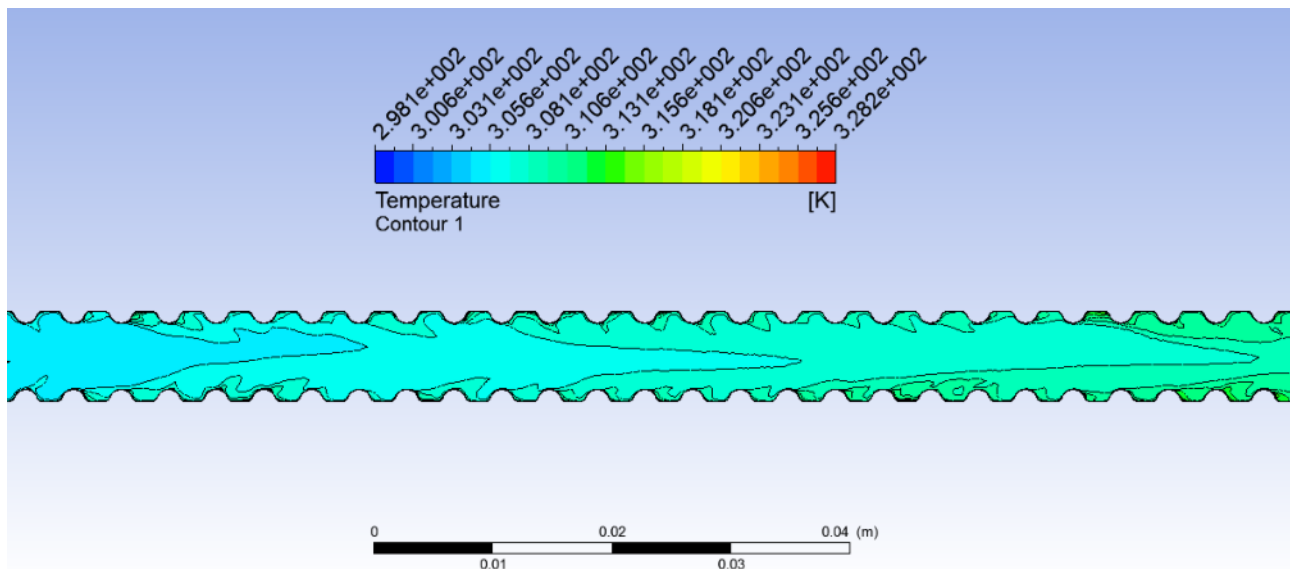
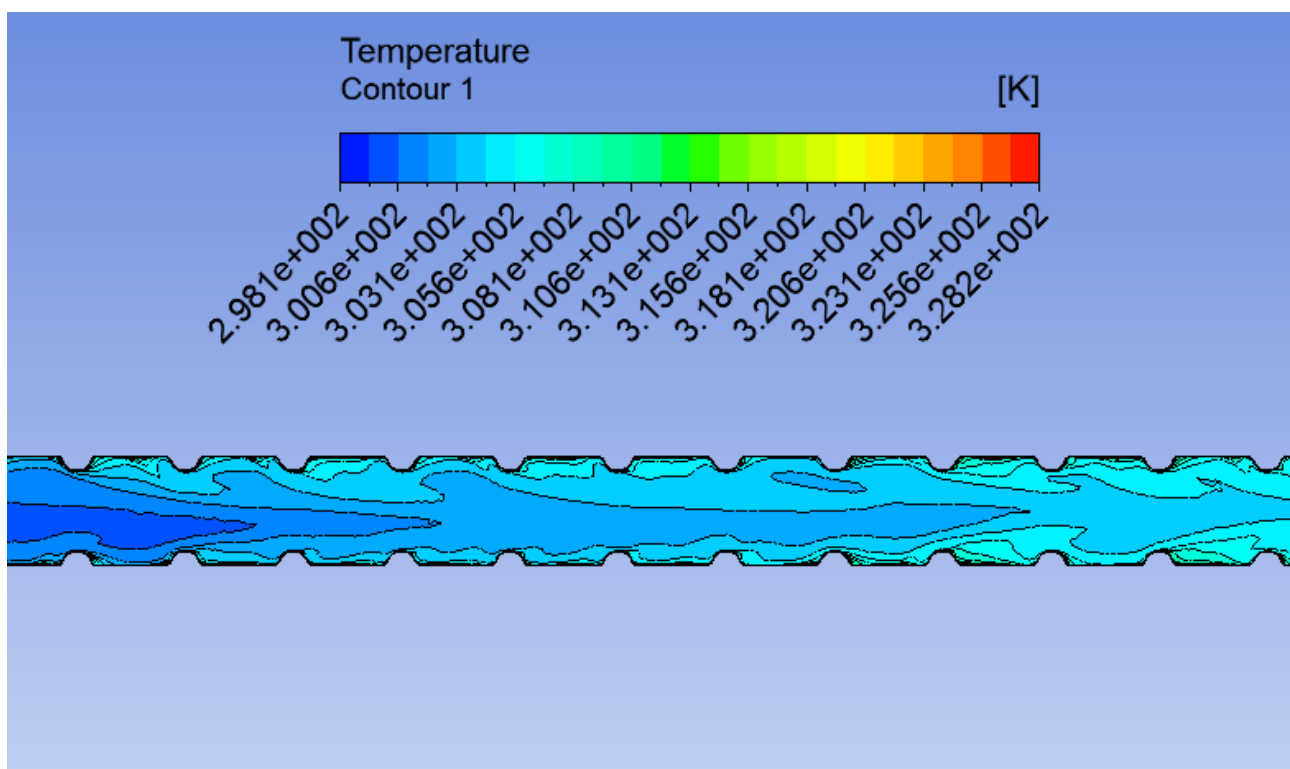


Рис. 4.8. Зони завихрення потоку води за рахунок турбулізаторів, дослідна секція №3,  $Re=6000$



*Рис. 4.9. Профіль температури по довжині труби, дослідна секція №1,  
 $Re=7000$*



*Рис. 4.10. Профіль температури по довжині труби, дослідна секція №3,  
 $Re=8000$*

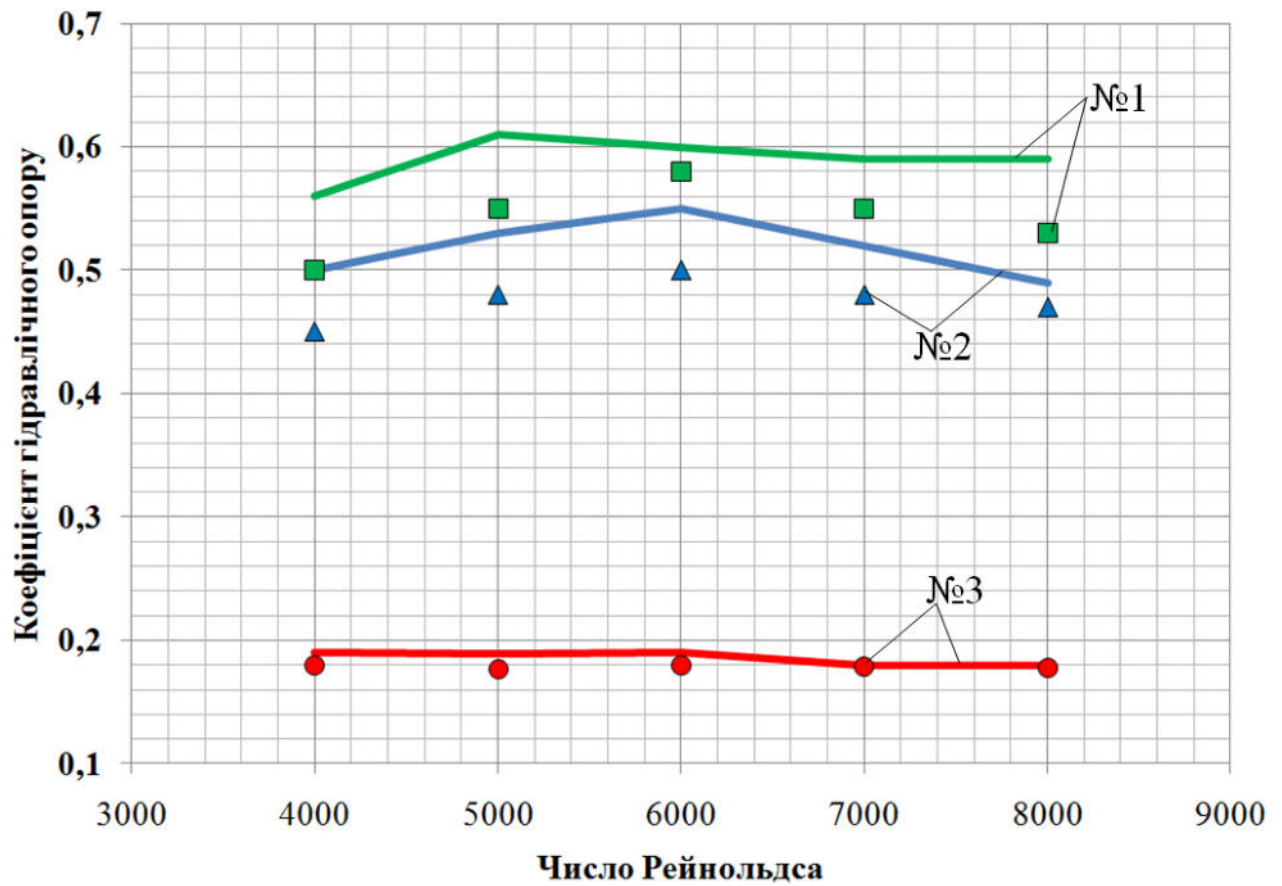


Рис. 4.11. Графік залежності коефіцієнта  $\xi$  від числа Рейнольдса, в дослідних трубах: №1, №2, №3- лініями представлено дані експериментальних досліджень, а точками результати моделювання в пакеті програм MCE аналізу ANSYS.

## **РОЗДІЛ 5**

### **ОХОРОНА ПРАЦІ**

#### **ВСТУП**

Сучасний розвиток технічного та технологічного стану виробництва передбачає постійну автоматизацію та оптимізацію виробничих процесів. Сьогодні, напевно, важко уявити компанію, господарська діяльність в якій здійснювалась би без використання комп'ютерної техніки. Через масовий характер робіт, що виконуються працівниками за допомогою комп'ютера, законодавством України чітко врегульовано норми та вимоги до використання комп'ютерної техніки на підприємстві, безпосередньо й охорона праці при роботі з комп'ютером.

#### **5.1. Вимоги до приміщення**

Приміщення, в яких планується установка та подальша робота з комп'ютером, повинні відповідати проектній документації будинку, погодженій з уповноваженими державними органами. Крім того, роботодавець повинен враховувати санітарні нормативи освітлення, вимоги до параметрів мікроклімату (температура, відносна вологість), ступеня і сили вібрації, звукового шуму і вогнестійкості приміщення, а також характеристики електромагнітного, ультрафіолетового та інфрачервоного полів. Конкретні показники зазначених санітарних норм див. в Державних санітарних правилах і нормах роботи з візуальними дисплейними терміналами електронно-обчислювальних машин ДСанПН 3.3.2.007-98, затверджених Постановою Головного державного санітарного лікаря України №7 від 10 грудня 1998 року. Правила поширюються на умови й організацію праці при роботі з візуальними дисплейними терміналами (ВДТ) усіх типів вітчизняного та зарубіжного виробництва на основі електронно-променевих трубок (ЕПТ), що використовуються в електронно-обчислювальних машинах (ЕОМ) колективного використання та персональних ЕОМ (ПЕОМ). Так, наприклад,

роботодавцю заборонено установлювати комп'ютери в приміщеннях, розташованих у підвалах будинків. Для уникнення можливих аварій та замикань, поряд з приміщеннями, де вестиметься робота з комп'ютером (над чи під ними), також не дозволяється проведення робіт, що потребують здійснення надмірно вологих технологічних процесів. Відповідне приміщення повинно бути укомплектоване системами центрального або індивідуального опалення, кондиціонування чи вентиляції повітря. Але при установці зазначених систем, необхідно переконатись, що батареї опалення, водопровідні труби, вентиляційні кабелі тощо, надійно сховані під захисними щитками, які перешкоджатимуть можливому потраплянню робітника під напругу.

У кожній кімнаті, де обладнуватимуться робочі місця співробітників, що працюватимуть на комп'ютері, повинні бути наявні елементи природного та штучного освітлення. При цьому, на вікнах слід встановити легко регульовані жалюзі чи штори, які дозволять працівникам коригувати рівень освітлення в приміщенні. Бажано розмістити комп'ютери в кімнаті таким чином, щоб світло потрапляло на екрани моніторів з півдня чи північного сходу. З метою досягнення максимального рівня безпеки і охорони праці при роботі з комп'ютером, виробничі приміщення необхідно обладнати аптечками першої медичної допомоги, системами автоматичної пожежної сигналізації і вогнегасниками. В приміщенні, в якому разом працюють 5 або більше комп'ютерів, на видимому місці установлюється службовий вимикач, який у разі потреби дозволить повністю відключити електричне живлення кімнати.

## **5.2. Вимоги до особистого робочого місця працівника**

Роботодавець, який використовує найману працю робітників, повинен забезпечити відповідність їхніх робочих місць комфортним та безпечним умовам. Розмір одного робочого місця має становити не менше 6 квадратних метрів. При необхідності, суміжні робочі місця співробітників, що працюють з комп'ютером, слід розділити перегородками висотою до 2 метрів. При визначенні достатнього розміру приміщення і робочого місця на одну особу

необхідно додатково враховувати шафи, сейфи, тумби або інші предмети меблів чи обладнання, які знаходяться в кімнаті. На столі працівника можливо розмістити допоміжні для роботи пристрої (принтери, колонки, сканери), а також місця для зберігання документів, за умови, що це не обмежуватиме видимість екрану і не заважатиме працівнику. У разі надмірного шуму чи вібрації технічного обладнання, роботодавець повинен забезпечити працівників антивібраційними килимками. Робочий стілець співробітника має бути підйомно-поворотним, легко регульованим за висотою та забезпечувати належну підтримку та зручне положення спини і хребта особи. Щодня необхідно проводити вологе прибирання приміщення, та очищати робоче місце та безпосередньо монітор комп'ютера від запиленості. На підприємстві забороняється: проводити ремонт та технічне обслуговування комп'ютера за робочим місцем працівника; самочинно ремонтувати або намагатись здійснити технічне налагодження комп'ютера без залучення компетентних спеціалістів; складувати на робочому місці зайві документи, деталі та предмети, що не потрібні для роботи; використовувати монітори з нечітким зображенням та монітори, у яких наявні поламки екрану; працювати з матричним принтером без антивібраційного покриття та зі знятою кришкою. Допускати до роботи осіб, які не пройшли затверджений на підприємстві курс охорони праці для роботи з комп'ютером, не дозволяється.

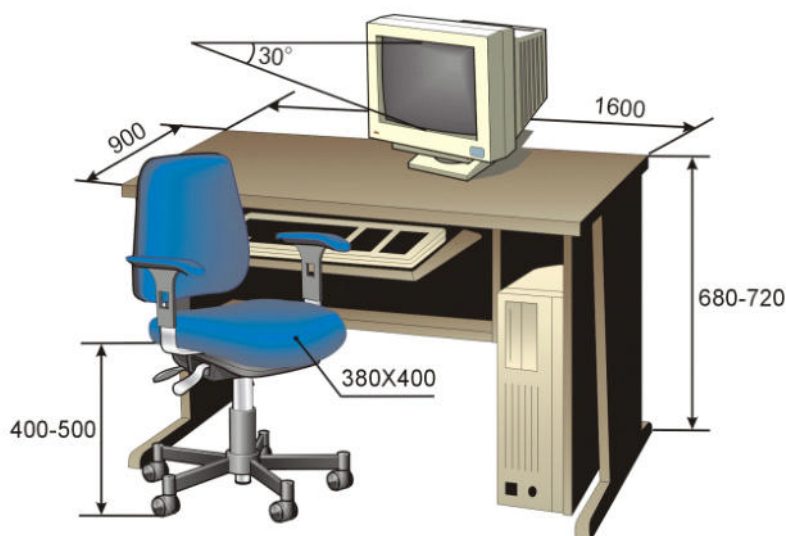


Рис. 5.1. Організація робочого місця

### **5.3. Соціальні та профілактичні засоби захисту робітників, які працюють з комп'ютером**

При прийнятті на роботу кожна особа має пройти лікарський огляд. Окрім того, при подальшій трудовій діяльності в компанії, така особа підлягає регулярному лікарському огляду не рідше ніж раз на 2 роки. Обов'язковим є проходження таких лікарів як терапевта, невропатолога та офтальмолога. В компанії мають бути чітко встановлені перерви для відпочинку працівників (окрім обідньої), як правило, тривалістю 10-15 хвилин раз на годину або дві, в залежності від складності роботи. В будь-якому випадку, роботодавець повинен передбачити такий розпорядок роботи на підприємстві, щоб час неперервної роботи з комп'ютером був не більше ніж 4 години. Додатково, для збереження належного рівня здоров'я та професійної придатності робітників, рекомендується виділити на підприємстві окреме побутове приміщення для перепочинку працівників і зняття ними нервово-емоційного напруження, що виникає при роботі з комп'ютером.

### **5.4. Безпечне налаштування робочої станції**

Згідно з положеннями щодо обладнання для дисплеїв (DSE), роботодавці повинні мінімізувати ризики роботи з комп'ютерами, переконавшись, що робочі місця добре спроектовані та що працівники знають, як зменшити ризики.

Роботодавці повинні:

провести оцінку ризиків АРМ;

забезпечити належним чином налаштовані комп'ютерні робочі місця;

організувати свою роботу так, щоб ризики для здоров'я та безпеки були мінімізовані;

забезпечувати навчання, інформацію та керівництво для користувачів комп'ютерів;

надати безкоштовну перевірку очей і зору та оплатити окуляри, якщо вони потрібні для роботи DSE.

Ви можете зменшити ризик отримання травм:

правильно використовувати робочу станцію;  
регулярні перерви від екрану;  
регулювання висоти крісла відповідно до робочого місця;  
повідомлення про будь-які травми, такі як напруга очей або біль у руках,  
руках або шиї.

### *Комп'ютерні екрани (візуальні дисплеї/монітори)*

Проблеми, спричинені екранами комп'ютерів, які також називають блоками візуального відображення (VDU), моніторами або обладнанням для екранів (DSE), зазвичай є наслідком неправильного використання, а не самого екрана.

Немає доказів того, що екрани шкодять очам, але тривала робота за екраном комп'ютера може викликати дискомфорт. Ви повинні переконатися, що розмір тексту та зображень на екрані є правильним для вас, і робити регулярні перерви.

### *Травми, які можуть бути спричинені роботою з комп'ютером:*

Якщо ваша робоча станція налаштована неправильно, ви можете страждати від головного болю, спричиненого відблисками екрана або неправильною поставою.

Розлади верхніх кінцівок, пов'язані з роботою (WRULDs) – також звані травмою повторного напруження (RSI) – виникають, коли користувачі комп'ютера відчувають біль, біль і розлади після тривалих періодів роботи з комп'ютером. збільшення використання КПК може призвести до неправильної постави та позиціонування, що, у свою чергу, призведе до болю.

### *Ноутбуки*

Деякі роботи вимагають від співробітників використання комп'ютерів поза офісом, тому може бути наданий ноутбук. Через їхній невеликий розмір може бути важко встановити гарну посадку між робочим і ноутбуком. Це ускладнює збереження правильної постави.

Носіння ноутбука також збільшує травми спини та ризик нападу та крадіжки, тому краще використовувати настільний комп'ютер або ноутбук у док-станції, коли це можливо.

## ВИСНОВКИ

Автори більшості досліджень, присвячених ефективності поверхонь теплообміну як правило, взагалі не розглядали технологію виготовлення та затрати пропонувані ними поверхонь теплообміну. Разом з тим з практичної точки зору це питання є вирішальним при виборі способу інтенсифікації процесу теплообміну зовні труб, а також способу штучної турбулізації потоку всередині труб.

Сучасні CAE-системи інженерного аналізу такі як, ANSYS дозволяють не тільки виконати якісне моделювання систем різної фізичної природи, а й досліджувати відгук цих систем на зовнішні впливи у вигляді розподілу напружень, температур, швидкостей, і т.д. Використання таких програм допомагає проектним організаціям скоротити цикл розробки, знизити вартість виробів і підвищити якість продукції.

Багатоцільова спрямованість програми, незалежність від апаратних засобів (від персональних комп'ютерів до робочих станцій і суперкомп'ютерів), засоби геометричного моделювання на базі B-сплайнів, повна сумісність з CAD/CAM/CAE системами провідних виробників і «дружній» інтерфейс привели до того, що саме ANSYS в даний час використовується в багатьох університетах для навчання студентів і виконання науково-дослідних робіт.

Результати моделювання в ANSYS дозволили переконатися, що використання чисельних методів підтверджує валідацію адекватності тривимірних моделей, гідродинаміки та теплообміну при течії в трубах з інтенсифікаторами теплообміну, а також зроблені раніше висновки:

- При турбулентному плинні газів і води доцільно штучно турбулізувати лише пристінний шар товщиною близько  $y^+ = 50-150$ .
- У трубах для штучної турбулізації цього пристінного шару слід використовувати періодично розташовані поперечні виступи-турбулізатори.

Такий підхід зменшує кількість створюваних прототипів і натурних експериментів, які необхідно провести, а також скорочує час, необхідний для розробки систем.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gough M. J., 2012, Process heat transfer enhancement to upgrade performance, throughput and reduced energy use, *Chemical Engineering Transactions*, 29, 1-6.
2. Klemeš J., Friedler F., Bulatov I., Varbanov, P., 2010, *Sustainability in the Process Industry. Integration and Optimization*, McGraw Hill, New York, USA.
3. Kukulka D.J., Smith R., 2013, Thermal-hydraulic performance of Vipertex 1EHT enhanced heat transfer tubes, *Applied Thermal Engineering*, 61(1), 60-66.
4. Reay D., 2008, The role of process intensification in cutting greenhouse gas emissions, *Applied Thermal Engineering*, 28, 2011–2019.
5. Wang L, Sunden B, Manglik R.M., 2007, *PHEs. Design, applications and performance*. Southhampton, UK: WIT Press.
6. Sabharwall P., Clark D., Glazoff M., Zheng G., Sridharan K., Anderson M., 2014, Advanced heat exchanger development for molten salts, *Nuclear Engineering and Design*, 280, 42-56.
7. Heatric (2015) Homepage. , accessed 14.02.2015.
8. Kandlikar S., Garimella S., Li D., Colin S., King M.R, 2014. *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*. Elsevier, Oxford, UK.
9. Arsenyeva O., Tovazhnyansky L., Kapustenko P., Demirskiy O., 2012, Heat Transfer and Friction Factor in Criss-Cross Flow Channels of Plate-and-Frame Heat Exchangers, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering* 46 (6), 634–641.
10. Arsenyeva O., Kapustenko P., Tovazhnyansky L., Khavin G., 2013, The influence of plate corrugations geometry on plate heat exchanger performance in specified process conditions, *Energy*, 57, 201-207.
11. Crittenden B.D., Yang M., Dong L., Hanson R., Jones J., Kundu K. Harris J., Klochok O., Arsenyeva O., Kapustenko P., 2015, *Crystallization*

12. Мигай В. К. Повышение эффективности современных теплообменников. - Л.: Энергия, 1980. - 144 с.
13. Берглес А. Интенсификация теплообмена // Теплообмен. Достижения. Проблемы. Перспективы: Избранные труды 6-й Межд. кэнф. по теплообмену. - М., 1981.-С. 145-192.
14. Жукаускас А. А. Интенсификация теплоотдачи применением прерывистых поверхностей // Проблемы тепло- и массообмена: современное состояние и перспективы,- Минск, 1985. — С. 17-26.
15. Жукаускас А. А. Проблемы интенсификации конвективного теплообмена // Тепломассообмен-VII: Проблемные докл. VII Всесоюзн. кэнф. по тепломассообмену. - Минск, 1985. - Ч. 1. - С. 16-41.
16. Dalle Donne M., Meyer L. Turbulent convective heat transfer from rough surfaces with two-dimensional rectangular ribs // Ibid. — 1977. — V. 20, N 6. — P. 583—620.
17. Shan R. K. Advances in compact heat exchanger technology and design theory // Heat Transfer 982: Proc. 7th Intern. Heat Transfer Conf. Munchen. — New York, 1982.— V. 1. —P. 123—142.
18. Sellars J.R., Tribus M., Klein J.S., Heat transfer to laminar flow in round tube or flat conduit – the Gaetz problem extended, Trans. ASME, 78, 441, 1956.
19. Garcia A, Vicente P.G., Viedma A. Experimental study of heat transfer enhancement with wire coil inserts in laminar-transition-turbulent regimes at different Prandtl numbers. Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 2005. — V. 48. — P. 4640—4651.
20. Clough R.W. The finite element method in plane stress analysis. J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Sept. 1960, p. 345-378.
21. Courant R. Variational Method for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1943, p. 1-43.
22. G. Strbac, Demand side management: benefits and challenges, Energy Policy. 2008. 36. p.p.4419–4426.

23. R. Pundineh, T. Jamasb, Distributed generation, storage, demand response and energy efficiency as alternatives to grid capacity enhancement, *Energy Policy*. 2014. 67. p.p.222–231.
24. A. Arteconi, N. Hewitt, F. Polonara, State of the art of thermal storage for demand-side management, *Appl. Energy*. 2012. 93. p.p.371–389.
25. Handbook of research on advances and applications in refrigeration systems and technologies / Pedro Dinis Gaspar and Pedro Dinho da Silva, editors. IGI Global book series Advances in Mechatronics and Mechanical Engineering (AMME). 2015.
26. Yao, L. S. and Prusa, J. Melting and Freezing. *Advances in Heat Transfer*. 1989. №19. 1-95.
27. Bankoff, S. G. Heat conduction or diffusion with change of phase. *Advances in Chemical Engineering*. 1964. №5. 75-150.
28. Muehlbauer J. C. and Sunderland J. E. Heat conduction with a freezing or melting. *Applied Mechanics Review*. 1965. v.18. 951-959.
29. Crank, J. *Free and Moving Boundary Problems*. London and New York: Oxford University Press (Clarendon). 1987. 436.
30. Cheung, F. B. and Epstein, M. Solidification and melting in fluid flow. *Advances in Transport Processes*. 1984. №3. 35-117.
31. Yau-Chia Liu and Long-Sun Chao. Modified Effective Specific Heat Method of Solidification Problems. *Materials Transactions*. 2006. Vol. 47, No. 11. 2737 - 2744.
32. Goodman T.R. The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase. *Trans. AMSE*. 1958. v.80, 335–42
33. Basu B and Date A W 1988 Numerical modelling of melting and solidification problems: a review *Sadhana* 13 169–213
34. Voller V R, Swaminathan C R and Thomas B G 1990 Fixed grid techniques for phase change problems: a review *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 30 875–98.
35. Basu B., Date A.W. Numerical modelling of melting and solidification problems: a review *Sadhana*. 1988. 13. 169–213.

36. Zerroukat M., Chatwin C.R. Computational Moving Boundary Problems. Applied and Engineering Mathematics Series: Research Studies Press. 1994. 199.
37. Hashemi H.T., Sliepcevich C.M. A numerical method for solving two-dimensional problems of heat conduction with change of phase. Chem. Eng. Prog. Symp. Series. 1967. 63. 34–41.
38. Dusenberre G.M. Numerical methods for transient heat flow Trans ASME. 1945. 67. 703–12.
39. Rolph W.D., Bathe K.J. An efficient algorithm for analysis of nonlinear heat transfer with phase changes Int. J. Numer. Meth. Eng. 1982. 18. 119–34.
40. Henry Hu, Stavros A. Argyropoulos. Mathematical modelling of solidification and melting: a review. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 1996. 4. 371–396.
41. Voller V.R. Swaminathan C.R. General source-based method for solidification phase change Numer. Heat Transfer. 1991. 19. 175–89.
42. Voller V.R., Swaminathan C.R. and Thomas B.G. Fixed grid techniques for phase change problems: a review. Int. J. Numer. Meth. Eng. 1990. 30. 875–98.
43. Bell G.E., Wood A.S. On the performance of the enthalpy method in the region of a singularity. Int. J. Numer. Meth. Eng. 1983. 19. 1583–92.
44. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solid. Oxford: Clarendon. 1959. 505.
45. Swaminathan C.R., Voller V.R. A general enthalpy method for modeling solidification processes. Metall. Trans. 1992. B 23. 651–64.
46. B. Metais and E. R. G. Eckert, "Forced, Mixed, and Free Convections Regimes," Journal of Heat Transfer, pp.295-296 (May 1964).
47. INL, "RELAP5-3D© Code Manual Volume IV: Models and Correlations," Revision, ID , Idaho National Engineering and Environment Laboratory, Idaho, ID, USA. 2012.
48. A. F. Wibisonoa, Y. Ahna, W.C. Williamsb, Y. Addadc, J. Leea. Challenging issues in iPWR with single phase water naturally circulating system.

Proceedings of ICAPP 2013. Jeju Island, Korea. April 14-18, 2013. Paper No. KD041.

49. M. J. Watts and C. T. Chou, Mixed convection heat transfer to supercritical pressure water. Proc. 7th Int. Heat Transfer Conference. Vol. 3., München. 1982. pp. 495-500.
50. J. D. Jackson and W. B. Hall, Influences of buoyancy on heat transfer to fluids flowing in vertical tubes under turbulent conditions. Turbulent Forced Convection in Channels and Bundles (Edited by S. Kakag and D. B. Spalding), Vol. 2. Hemisphere, Washington, DC. 1979. pp. 613-640.
51. W. B. Hall and J. D. Jackson, Laminarization of a turbulent pipe flow by buoyancy forces, ASME paper No. 69-HT-55/1969.
52. H. Tanaka, A. Tsuge, M. Hirata and N. Nishiwaki, Effects of buoyancy and of acceleration owing to thermal expansion on forced turbulent convection in vertical circular tubes, Int. J. Heat Mass Transfer. V.16. 1973. 1267-1288.
53. H. Tanaka and T. Noto, Effect of natural convection on turbulent forced convection heat transfer in a vertical tube, Proc. 10th National Heat Transfer Symposium, Japan. 1973. pp. 225-228.
54. J. D. Jackson and J. Fewster, Enhancement of turbulent heat transfer due to buoyancy for downward flow of water in vertical tubes. Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection (Edited by D. B. Spalding and N. Afgan), Vol. 2, Hemisphere, Washington, DC. 1977. pp. 759-775.
55. B. P. Axcell and W. B. Hall, Mixed convection to air in a vertical pipe, Proc. 6th Int. Heat Transfer Conference, Vol. 1, Toronto. 1978. pp. 37-42,
56. H. Tanaka, S. Maruyama, S. Hatano. Combined forced and natural convection heat transfer for upward flow in a uniformly heated, vertical pipe. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 30. No. 1. 1987. pp. 165-174.
57. A. Arid, T. Kousksou, S. Jegadheeswaran, A. Jamil, Y. Zeraouli. Numerical Simulation of Ice Melting Near the Density Inversion Point under Periodic Thermal Boundary Conditions. Copyright Tech Science Press FDMP,

Copyright © 2012 Tech Science Press FDMP, vol.8, no.3, pp.257-275, 2012.  
vol.8, no.3, pp.257-275.

- 58.V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheuerer, Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review, AIAA J. 1985. 23. p.p.1308-1319.
- 59.Справочник по теплообменникам: (в 2 т.)/ Пер. с англ.: Под ред.Б.С.Петухова, В.К.Шикова. М.: Энергоатомиздат. 1987. 1 т. 560 с.
60. C. F. Kettleborough, Transient laminar free convection between heated vertical plates including entrance effects. Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. 15, 883–896.
- 61.Н. М. Joshi, “Transient Effects in Natural Convection Cooling of Vertical Parallel Plates,” International Communication Heat and Mass Transfer, Vol. 15, No. 2, 1988, pp. 227-238.
- 62.A. K. Singh. Natural Convection in Unsteady Couette Motion. Defence Science Journal. 1988. V.38, p.35.
63. Paul, T., Jha, B. K., and Singh, A. K., Transient free convection flow in a vertical channel with constant temperature and constant heat flux on walls, Heat and Mass Transfer, 1996. Vol. 32, pp. 61-63.