54. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ MATHCAD ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА

С.В. Гузенко
Національний університет харчових технологій

Диференціальні рівняння з частинними похідними являють собою одну з найбільш складних і одночасно цікавих задач обчислювальної математики. Ці рівняння характеризуються тим, що для їх розв`язку не існує єдиного універсального алгоритму, і більшість задач потребує свого особливого підходу.

Якщо уважно розглянути рівняння дифузії тепла, то можна умовно розділити практичні випадки його використання на два типи: лінійне та нелінійне.

Лінійна задача — якщо коефіцієнт дифузії a не залежить від температури u і, крім того, якщо джерело тепла φ або також не залежить від u, або залежить від u лінійно. В цьому випадку невідома функція $u(x,t)$ і всі її похідні є в рівнянні тільки у першому степені. Нелінійна задача — якщо рівняння має нелінійну залежність від $u(x,t)$.

Запишемо саме рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varphi\left(x,t,u\right), \tag{1}$$

а також початкову умову

$$u(x,t) = u_0(x) \tag{2}$$

та граничні умови

$$u(0,t) = f_0(t)\,,\ u(l,t) = f_1(t)\,, \tag{3}$$

які необхідні для правильної з математичної точки зору постановки задачі [3].

Для реалізації явної схеми для лінійного рівняння теплопровідності складається відповідний алгоритм, за допомогою елементів програмування в Mathcad. Ми розглянемо модель без джерела тепла і з постійним коефіцієнтом дифузії $a = const$. У перших трьох рядках алгоритму задані кроки для часової та просторової змінних, а також коефіцієнт дифузії рівний 1. У наступних двох рядках задані початкова (нагрітий центр області) та граничні (постійна температура на кінцях) умови відповідно [2]. Потім наводиться програмний блок для розв'язання різницевої схеми. Використавши цей алгоритм можна отримати графічний розв'язок даної задачі, який показує, що з часом тепло із більш нагрітої області переходить у менш нагріту, зона початкової найбільшої температури охолоджується та розмивається.

Найбільш цікаві розв'язки можна отримати для нелінійного рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом тепла

$$\varphi\left(x,u\right) = 10^{-3}\left(u - u^3\right). \tag{4}$$

Отже, замінимо в алгоритмі явної схеми для лінійного рівняння теплопровідності значення $a(u)$ та $\varphi(x,u)$ з констант на нові функції, які описуватимуть інші моделі дифузії тепла. Почнемо з того, що замінимо тільки $\varphi(x,u)$.

Якщо виконати розрахунки з новим джерелом тепла, який має кубічну нелінійність, тоді отримуємо цікавий розв`язок рівняння теплопровідності: з перебігом часу межа розподілу високої та низької температури поширюється в обидві сторони від зони первинного нагріву, залишаючись чітко виділеною [2].

З фізичної точки зору, залежність коефіцієнта дифузії тепла і функції джерела тепла від температури означає, що ці параметри будуть змінюватись від точки до точки середовища, визначаючись локальними значеннями поточною температурою у цих точках. Введення ненульового джерела тепла означає, що середовище отримує відповідну кількість тепла, тим більше, чим більше локальна температура. Введення такої залежності може моделювати горіння середовища.

Ще більш несподівані розв'язки при нелінійності також і коефіцієнта дифузії. Наприклад, якщо взяти квадратний коефіцієнт дифузії $a(x,u)=u^2$, а також $\varphi(x,u)=10^{-3}u^{3,5}$, тоді зможемо спостерігати новий режим горіння середовища. На відміну від розглянутого ефекту розповсюдження теплових фронтів, горіння локалізується в області первинного нагріву середовища, причому температура в центрі нагріву з часом зростає до нескінченої величини.

Незважаючи на те, що Mathcad володіє досить обмеженими властивостями по відношенню до рівнянь з частинними похідними, в ньому міститься декілька вбудованих функцій [1]. Але для розв'язання лінійного рівняння теплопровідності використовують безпосереднє програмування, складаючи відповідні алгоритми, які корегуються відповідно до задач лінійного або нелінійного типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кирьянов Д.* «Вычислительная математика». — СПб.: CD-Rom издательство «Новый диск», 2005.

2. *Макаров Е.* «Инженерные расчёты в Mathcad 15». — СПб.:Питер, 2011. — 400 с.

3. *Мартиненко М.А., Легеза В.П.* Інженерні задачі математичної фізики: Навч. посіб. — К: НУХТ, 2008. — 389 с.