

36

УДК 517.53

ПРО ПОВОДЖЕННЯ НУЛІВ ЧАСТКОВИХ СУМ
СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ
В ТЕРМІНАХ КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Київський національний університет харчових технологій,
01004, Київ, вул. Володимирівська, 68
e-mail: info@nuft.edu.ua

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для цілої функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ з нулем a кратності m нехай (z_n)
– послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$, яка прямує до a . У
термінах класів збіжності описано швидкість прямування $|z_n - a|$ до 0.

Ключові слова: ціла функція, часткова сума, нулі, клас збіжності.

1. Вступ. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

– ціла трансцендентна функція, $a \neq 0$ – її нуль кратності m , а (z_n) – збіжна до
 a послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$, тобто $S_n(z_n) = 0$ і $z_n \rightarrow a$
($n \rightarrow \infty$).

Є. Нечюшкіте і Ш. Стреліц [1] показали, що якщо f – ціла функція скінченного
порядку $\rho[f]$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |z_n - a|} = m\rho[f]$.

У термінах узагальнених порядків поведження $|z_n - a|$ вивчено Л.Я. Микитюк
та М.М. Шереметою [2]. Щоб сформулювати їх результат, через L позначимо клас
додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α (вважатимемо, що
 $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ на $(-\infty, x_0]$) і говоритимемо, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) =$
 $= (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{p_2}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при

$x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{pz} \subset L^0 \subset L$. Нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$. Узагальненим порядком цілої функції f називається [3] величина $\rho_{\alpha\beta}[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$. В [2] доведено таку теорему.

Теорема 0. Нехай $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ – неперервно диференційовні функції, $B(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $0 < c < +\infty$. Припустимо, що виконується одна з умов

$$a) \alpha \in L^0, \beta(\ln x) \in L^0 \text{ і } xB'(x; c) \rightarrow \frac{1}{\rho} \text{ (} x \rightarrow +\infty \text{) для кожного } c \in (0, +\infty),$$

$$б) \alpha \in L_{pz}, \beta(\ln x) \in L_{pz} \text{ і } xB'(x; c) = O(1) \text{ (} x \rightarrow +\infty \text{) для кожного } c \in (0, +\infty).$$

Тоді

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta\left(\frac{1}{\rho} + \ln |a| + \frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|}\right)}.$$

Якщо $\alpha(x) \equiv \ln x$ і $\beta(x) \equiv x$ для $x \geq e$, то з теореми 0 отримаємо формулу, доведену в [1], а якщо виберемо $\alpha(x) \equiv x$ ($x > 0$), $\beta(x) = e^{e^x}$, то для величини типу $\sigma[f]$ функції f , з цієї ж теореми одержимо рівність $\sigma[f] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{\rho|a|^\rho}} |z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n}$. Нарешті, в [4] поведження $|z_n - a|$ вивчено у термінах логарифмічних порядку $\rho_l[f]$ і типу $\tau_l[f]$, які означаються формулами $\rho_l[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln \ln r}$ і $\tau_l[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{\rho_l}}$.

За умови $1 < \rho_l[f] < +\infty$ доведено, що $\rho_l[f] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|z_n - a|}\right)} + 1$ і

$$\tau_l[f] = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1} \rho_l^{\rho_l} m^{1 - \rho_l} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\rho_l} (\ln(1/|z_n - a|))^{1 - \rho_l}.$$

Метою нашої замітки є дослідження поведження $|z_n - a|$ у термінах того чи іншого класу збіжності.

2. Валіронів клас збіжності. За Ж. Валіроном [5] ціла функція порядку $\rho[f] = \rho \in (0, \infty)$ належить до класу збіжності, якщо $\int_1^\infty \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. Правильна наступна теорема.

Теорема 1. Якщо ціла функція f належить до валіронового класу збіжності, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n} < +\infty. \quad (2)$$

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі дві леми.

Лема 1. [5] Якщо ціла функція (1) належить до валіронового класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k|^{\rho/k} < +\infty$.

Лема 2. Нехай ціла функція f задана рядом (1), $(c_k^{(j)})_{k=1}^\infty$ – обмежені послідовності комплексних чисел, $1 \leq j \leq m$, а

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \quad (g_k = f_k + c_k^{(1)} f_{k+1} + \dots + c_k^{(m)} f_{k+m}).$$

Тоді g – ціла функція і належить до валіронового класу збіжності, якщо і тільки якщо f належить до цього класу.

Справді, нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k \geq 0\}$ – максимальний член степеневого ряду (1). Тоді з огляду на нерівність Коші для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $r > 0$

$$\mu_f(r) \leq M_f(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|r^k = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|((1+\varepsilon)r)^k(1+\varepsilon)^{-k} \leq \mu_f((1+\varepsilon)r) \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Звідси випливає, що f належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int_1^{\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. З іншого боку, оскільки $|c_k^{(j)}| \leq K < +\infty$ для всіх $k \geq 1$ і $1 \leq j \leq m$, то (див. [2], [4]) для всіх $r > 1$

$$\mu_f(r) \left(1 - \frac{K}{r-1}\right) \leq \mu_g(r) \leq \mu_f(r) \left(1 + \frac{K}{r-1}\right), \quad (4)$$

тобто $\ln \mu_g(r) = \ln \mu_f(r) + o(1)$, $r \rightarrow \infty$, і отже, функції g і f належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Доведення теореми 1. Оскільки f має нуль a кратності m , то $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, де $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$ – ціла трансцендентна функція і $\varphi(a) \neq 0$. Легко побачити, що $\ln M_f(r) = \ln M_{\varphi}(r) + O(\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$. Тому функції f і φ належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Як і в [2] та [4], неважко перевірити, що

$$\begin{aligned} S_n(z) &= (z-a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z^k - \varphi_n z^{n+m} - \varphi_{n-1} z^{n+m-1} - \dots - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \varphi_n C_m^1 a z^{n+m-1} + \varphi_{n-1} C_m^1 a z^{n+m-2} + \dots + \varphi_{n-m+2} C_m^1 a z^{n+1} + \dots + \\ &+ (-1)^m C_m^{m-1} \varphi_n z^{n+1} a^{m-1} = (z-a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z^k - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \varphi_{n-m+2} (C_m^1 a z^{n+1} - z^{n+2}) + \dots + \varphi_n ((-1)^m C_m^{m-1} z^{n+1} a^{m-1} + \dots + C_m^1 a z^{n+m-1} - z^{n+m}) \end{aligned}$$

і, оскільки $S_n(z_n) = 0$, то

$$\begin{aligned} (z_n - a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z_n^k &= z_n^{n+1} (\varphi_{n-m+1} + (-C_m^1 a + z_n) \varphi_{n-m+2} + \\ &+ ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \dots + (-1) C_m^1 a z_n^{m-2} + z_n^{m-1}) \varphi_n), \end{aligned}$$

тобто

$$(z_{n+m-1} - a)^m \sum_{k=0}^{n+m-1} \varphi_k z_{n+m-1}^k = z_{n+m-1}^{n+m} g_n, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} g_n &= \varphi_n + (-C_m^1 a + z_{n+m-1}) \varphi_{n+1} + \dots + \\ &+ ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \dots + (-1) C_m^1 a z_{n+m-1}^{m-2} + z_{n+m-1}^{m-1}) \varphi_{n+m-1}. \end{aligned}$$

За лемою 2 з φ_n замість f_n ціла функція з коефіцієнтами g_n належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли до цього класу належить функція φ і, отже, функція f . Тому за лемою 1 $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^{\rho/n} < +\infty$.

Але, оскільки $z_n \rightarrow a$ і $\sum_{k=0}^n \varphi_k z_n^k \rightarrow \varphi(a) \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то з (5) маємо

$$|g_n| = |z_{n+m-1}|^{-(n+m)} |z_{n+m-1} - a|^m \left| \sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k z_{n+m-1}^k \right| = \frac{1+o(1)}{|a|^{n+m}} |z_{n+m-1} - a|^m,$$

$n \rightarrow \infty$, тобто $|g_n|^{1/n} = \frac{1+o(1)}{|a|} |z_{n+m-1} - a|^{m/n}$, $n \rightarrow \infty$, і отже, правильне співвідношення (2). Теорему 1 доведено. \square

3. Узагальнений клас збіжності. Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ будемо говорити, що ціла функція f належить до (узагальненого) $\alpha\beta$ -класу збіжності, якщо $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty$. З теореми 2 зі статті [6] випливає наступна лема.

Лема 3. Нехай α – звігнута на $[x_0, +\infty)$ функція і $\alpha(e^x) \in L^0$, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $\frac{x\beta'(x)}{\beta(x)} \geq h > 0$ ($x \geq x_0$) і $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty$. Тоді, якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1)) B\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|f_n|}\right) < +\infty$.

Використовуючи цю лему і наведені вище міркування, неважко довести наступну теорему.

Теорема 2. Нехай функції α і β такі, як у лемі 3. Тоді, якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1)) B\left(\frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|}\right) < +\infty$.

Доведення. З (3) за умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ легко випливає, що f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu_f(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty$, і тому з (4) отримуємо, що

f і функція g з лемі 2 належать чи не належать до $\alpha\beta$ -класу збіжності одночасно. Оскільки $\ln r = o(\ln M_f(r))$ і $\ln M_f(r) = \ln M_\varphi(r) + O(\ln r)$ при $r \rightarrow +\infty$, то функції φ і f належать чи не належать до $\alpha\beta$ -класу збіжності одночасно. Звідси, як у доведенні теореми 1, випливає, що функція g з коефіцієнтами g_n , які визначаються рівністю (5) належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності і, отже, за лемою 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1)) B\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right) < +\infty. \quad (6)$$

Але з (5), як у доведенні теореми 1, випливає, що

$$\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|g_n|} = \frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|} + \ln |a| + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Неважко показати, що з умови $\beta \in L^0$ випливає, що $B((1+o(1))x) = (1+o(1))B(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тому з (6) і (7) отримуємо потрібне співвідношення. Теорему 2 доведено. \square

Для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку $\rho[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$ логарифмічний клас збіжності вводиться [6] за допомогою умови $\int_e^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r \ln^{p+1} r} dr < +\infty$, $p > 1$. Функції $\alpha(x) \equiv x$ і $\beta(x) \equiv x^{p+1}$ не задовольняють умови теореми 2, тобто застосувати цю теорему не можна. Проте правильний наступний результат.

Теорема 3. Якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|z_n - a|} \right)^{1-p} < +\infty$.

Доведення цієї теореми таке ж, як і теорем 1 та 2, і ґрунтується на тому, що якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то за теоремою 4 із [6] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|f_n|} \right)^{1-p} < +\infty$.

1. Нечюшките Э. О скорости стремления к пределу нулей частичных сумм ряда Тейлора целой функции / Нечюшките Э., Стрелиц Ш. // Литовск. матем. сб. – 1961. – Т. 1-2. – С.181-185.
2. Микитюк Л.Я. Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції / Микитюк Л.Я., Шеремета М.М. // Доповіді НАН України. – 2003. – №6. – С. 16-20.
3. Шеремета М.М. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / Шеремета М.М. // Изв. вузов. Матем. – 1961. – №2. – С. 100-108.
4. Микитюк Л.Я. Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції скінченного логарифмічного порядку / Микитюк Л.Я. // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 85-88.
5. Valiron G. General theory of integral functions / Valiron G. Toulouse, 1923.
6. Мулява О.М. Класи збіжності в теорії рядів Діріхле / Мулява О.М. // Доповіді НАН України. – 1999. – №3. – С. 35-39.