

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикун

**ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СВЯЗАННЫЕ ПРОЦЕССЫ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ
СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A theory of long-term damage of layered materials under the temperature effect is constructed. The process of damage of material layers is modeled by forming in them the stochastically located micropores. The criterion of fracture of unit microvolume is characterized by the microvolume long-term strength, which is determined by dependence of the brittle fracture time on degree of closeness of equivalent stress to its limit value. This value characterizes the short-time strength by the Schleicher – Nadai criterion and is assumed the random function of coordinates. For arbitrary time, the equation of balance of layer damage (porosity) is formulated with allowance for temperature. The algorithms of evaluation of dependence of the material layer microdamage on time, the macrostresses on time as well as the corresponding curves are obtained and the temperature effect on these curves is studied.

Key words: layered material, temperature influences, long-term damageability, porosity, effective characteristics, balance equation of porosity.

Введение.

При достаточно высоком уровне нагружения в материалах и элементах конструкций происходит образование и развитие во времени рассеянных микроповреждений, что приводит, как правило, к образованию магистральных трещин. Микроповреждения представляют собой хаотически расположенные разрушенные микрообъемы материала, которые полностью или частично утратили несущую способность, что приводит к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам. Микроповреждения могут возникать в процессе деформирования вследствие того, что микронапряжения достигают локальных границ прочности или при постоянных деформациях вследствие уменьшения локальных границ прочности под влиянием климатических и радиационных факторов.

Наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений, а также экспериментальные исследования, свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. В [7, 9] предложена структурная теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов, в основу которой положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [5]. Длительную повреждаемость обычно рассматривают как результат процесса накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. На микроскопическом уровне прочность материала является неоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности мик-

рообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При действии на макрообразец постоянного растягивающего напряжения часть микрообъемов, предел прочности которых ниже приложенного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности. В [8, 10 – 13] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред построена теория длительной повреждаемости однородных, слоистых и волокнистых композитных материалов.

В настоящей статье исследовано влияние температурных воздействий на деформирование и длительную повреждаемость слоистых композитных материалов. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости компонентов слоистого материала моделируется разрушением рассеянных микрообъемов в слоях материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Шлейхера – Надаи. Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние слоистого материала с системой стохастически расположенных микроповреждений в слоях определяются на основе стохастических уравнений термоупругости пористых сред.

Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов слоистого материала, учитывающие температурную составляющую. Зависимости макронапряжения – макродеформации для слоистого материала с пористыми компонентами и уравнения баланса пористости компонентов описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости композита с учетом их взаимодействия, что приводит к снижению макронапряжений при заданных макродеформациях, происходящих во времени. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости компонентов слоистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также получены соответствующие кривые в случае как дробно-степенной, так и экспоненциально-степенной функции долговечности. Исследовано влияние температурных воздействий на кривые макродеформирования и повреждаемости материала.

§1. Рассмотрим слоистый N -компонентный материал с изотропными компонентами. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига, коэффициенты температурных напряжений и деформаций материала каркаса i -компонента $K_i, \mu_i, \beta_i, \alpha_i$, его пористость p_i , а объемное содержание пористого i -компонента c_i ($i=1, \dots, N$). Макронапряжения $\langle \sigma_{jk} \rangle$ в композите связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температурой θ соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{jk} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{jk} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle - \beta_1^* \theta) \delta_{jk}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle - \beta_3^* \theta; \quad \langle \sigma_{j3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{j3} \rangle \quad (j, k, r=1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* , коэффициенты температурных напряжений β_1^* , β_3^* и деформаций α_1^* , α_3^* определяются [2] через соответствующие модули и температурные коэффициенты пористых компонентов λ_{ip} , μ_{ip} , β_{ip} ($i=1, \dots, N$) формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu_p (\lambda_p + \mu_p)}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p \mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1}; \\ \beta_1^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \left\langle \frac{\beta_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\beta_p \mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \beta_3^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\beta_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \alpha_1^* &= \frac{\lambda_{33}^* \beta_1^* - \lambda_{13}^* \beta_3^*}{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2}; \quad \alpha_3^* = \frac{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \beta_3^* - 2\lambda_{13}^* \beta_1^*}{(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2},\end{aligned}\quad (1.2)$$

где

$$\langle f^* \rangle = \sum_{i=1}^N c_i f_{ip} \quad (i=1, \dots, N). \quad (1.3)$$

Эффективные модули и температурные коэффициенты пористого материала i -компонента K_{ip} , μ_{ip} , β_{ip} , α_{ip} согласно [2] определяются формулами

$$\begin{aligned}K_{ip} &= \frac{4K_i \mu_i (1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \mu_{ip} = \frac{(9K_i + 8\mu_i)\mu_i (1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \lambda_{ip} = K_{ip} - \frac{2}{3}\mu_{ip}; \\ \beta_{ip} &= \frac{4\beta_i \mu_i (1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \alpha_{ip} = \frac{\beta_{ip}}{3K_{ip}} = \frac{\beta_i}{3K_i} \quad (i=1, \dots, N).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала i -компонента в форме Шлейхера – Надаи [3]

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = k_i; \quad I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} = (\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle' \langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle')^{1/2} \quad (i=1, \dots, N), \quad (1.5)$$

где $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle'$, $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ – соответственно, девиатор и шаровая часть средних по неповрежденной части материала i -компонента напряжений; a_i – детерминированная постоянная; k_i – предельное значение инварианта $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ для i -компонента, являющееся случайной функцией координат, причем средние по неповрежденной части материала i -компонента напряжения $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle$ определяются формулой [6]

$$\langle \sigma_{jk}^{il} \rangle = \frac{1}{1-p_i} \langle \sigma_{jk}^i \rangle. \quad (1.6)$$

Если инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{il} + a_i \langle \sigma_{rr}^{il} \rangle$ для некоторого микрообъема i -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_i , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^i , длительность которого зависит от степени близости $I_{\langle \sigma \rangle}^{il} + a_i \langle \sigma_{rr}^{il} \rangle$ к предельному значению k_i . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^i = \varphi_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{il} + a_i \langle \sigma_{rr}^{il} \rangle, k_i), \quad (1.9)$$

причем $\varphi_i(k_i, k_i) = 0$, $\varphi_i(0, k_i) = \infty$ согласно (1.5).

Одноточечную функцию распределения $F_i(k_i)$ предела прочности k_i микрообъема неповрежденной части материала i -компонента можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ \left(\frac{k_i - k_{0i}}{k_{li} - k_{0i}} \right)^{\beta_i}, & k_{0i} \leq k_i \leq k_{li}; \\ 1, & k_i > k_{li} \end{cases}, \quad (1.8)$$

или распределением Вейбулла

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ 1 - \exp[-m_i(k_i - k_{0i})^{\beta_i}], & k_i \geq k_{0i}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь k_{0i} – минимальная величина предельного значения k_i , с которого начинается разрушение в некоторых объемах i -компонента; k_{li} , m_i , β_i – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в i -компоненте.

Примем, что случайное поле предела микропрочности i -компонента k_i является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F_i(k_i)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала i -компонента, в котором предел микропрочности меньше значения k_i . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{pq}^{il} \rangle$ функция $F_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{il} + a_i \langle \sigma_{rr}^{il} \rangle)$ определяет согласно (1.5), (1.8), (1.9), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала i -компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость i -компонента равной p_{0i} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости i -компонента при кратковременной повреждаемости

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i})F_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{il} + a_i \langle \sigma_{rr}^{il} \rangle), \quad (1.10)$$

где согласно (1.6)

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{il} = \frac{1}{1-p_i} I_{\langle \sigma \rangle}^i; \quad I_{\langle \sigma \rangle}^i = (\langle \sigma_{jk}^i \rangle' \langle \sigma_{jk}^i \rangle')^{1/2}, \quad (1.11)$$

причем средние в i -компоненте напряжения $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температурой θ зависимостями

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{jk}^i \rangle &= 2\mu_{ip} \langle \varepsilon_{jk} \rangle + \frac{\lambda_{ip}}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \times \\
&\times \left[\left\langle \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{ip} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \delta_{jk} - \\
&- \frac{1}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\lambda_{ip} \left\langle \frac{\beta_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{ip} \beta_{ip} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right) \theta \delta_{jk}; \\
\langle \sigma_{33}^i \rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle - \left\langle \frac{\beta_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \theta \right); \\
\langle \sigma_{j3}^i \rangle &= 2 \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{j3} \rangle \quad (j, k, r = 1, 2; i = 1, \dots, N), \quad (1.12)
\end{aligned}$$

а эффективные модули пористого i -компонента λ_{ip} , μ_{ip} , β_{ip} определяются формулами (1.4).

Если напряжения в i -компоненте $\langle \sigma_{pq}^i \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то согласно критерию длительной прочности (1.7) за это время в i -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_i , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^i = \varphi_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle, k_i), \quad (1.13)$$

где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle$ определяется выражениями (1.12).

Время τ_k^i хрупкого разрушения i -компонента для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle >> 0$. В этом случае функцию долговечности $\varphi_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle, k_i)$ i -компонента для микрообъема с мгновенным пределом прочности k_i можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\begin{aligned}
\varphi_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle, k_i) &= \tau_{0i} \left(\frac{k_i - I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} - a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle}{I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle - \gamma_i k_i} \right)^{n_i} \\
(\gamma_i k_i \leq I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle \leq k_i, \gamma_i < 1), \quad (1.14)
\end{aligned}$$

где некоторое характерное время τ_{0i} , показатель n_i и коэффициент γ_i определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности i -компонента.

Подставляя (1.14) в (1.13), приходим к неравенству

$$k_i \leq I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle > \frac{1 + \bar{t}_i^{-1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{-1/n_i}} \left(\bar{t}_i = \frac{t}{\tau_{0i}} \right). \quad (1.15)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_i(k_i)$, приходим к выводу, что функция $F_i[(I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle) \psi_i(\bar{t}_i)]$, где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \frac{1 + \bar{t}_i^{-1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{-1/n_i}} \quad (1.16)$$

определяет в момент времени \bar{t}_i относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала i -компонента. Тогда с учетом (1.6) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для i -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[\frac{I_{<\sigma>}^i + a_i <\sigma_{rr}^i > \psi_i(\bar{t}_i)}{1 - p_i} \right], \quad (1.17)$$

где пористость i -компонента p_i является функцией безразмерного времени \bar{t}_i , а инвариант $I_{<\sigma>}^i + a_i <\sigma_{rr}^i >$ определяется выражениями (1.11), (1.12).

Если время τ_k^i хрупкого разрушения i -компонента имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1} >$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_i(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1} >, k_i) = \tau_{0i} \left\{ \exp m_{1i} \left[\left(\frac{k_i}{I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1} >} \right)^{n_{1i}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2i}}, \quad (1.18)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{0i} , m_{1i} , n_{1i} , n_{2i} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.18) в (1.13), приходим к неравенству

$$k_i \leq (I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1} >) \left[1 + \frac{1}{m_{1i}} \ln \left(1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_{1i}} \left(\bar{t}_i = \frac{t}{\tau_{0i}} \right). \quad (1.19)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_i(k_i)$, приходим к выводу, что функция $F_i[(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1} >) \psi_i(\bar{t}_i)]$, где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \left[1 + \frac{1}{m_{1i}} \ln \left(1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_{1i}}, \quad (1.20)$$

определяет в момент времени \bar{t}_i относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала i -компонента. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для i -компонента при длительной повреждаемости (1.6) можно представить в виде (1.17).

Уравнения баланса пористости (1.17) с учетом (1.11), (1.12), (1.16) в начальный момент $\bar{t}_i = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала i -компонента. С ростом времени уравнения (1.17), (1.11), (1.12), (1.16) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной поврежденности и дополнительной, развивающейся во времени.

§2. Обобщим описанную в §1 модель повреждаемости слоистого N -компонентного материала. Предположим, что микроповреждения, которые образуются в его компонентах при нагружении, представляют собой поры, заполненные частицами разрушенного материала, оказывающими определенное сопротивление деформированию. Пусть частицы разрушенного материала не оказывают сопротивления на сдвиг и на всестороннее растяжение, а на всестороннее сжатие сопротивляются как неповрежденный материал. Тогда модуль сдвига разрушенного материала, заполняющего поры, можно принять равным нулю, а модуль объемного сжатия равным нулю при $<\sigma_{rr}^{i2} > \geq 0$ ($i=1, \dots, N$) и равным соответствующему модулю неповрежденного компонента K_i при $<\sigma_{rr}^{i2} > < 0$, где $<\sigma_{rr}^{i2} >$ – напряжения в заполненных разрушенными частицами порах i -компонента. Тогда, согласно §1, при $<\sigma_{rr}^{i2} > \geq 0$, т.е. если средние

объемные напряжения в заполняющих поры частицах в i -компоненте являются растягивающими, эффективные модули и температурные коэффициенты пористых наполненных частицами разрушенного материала компонентов K_{1p} , μ_{1p} , β_{1p} , α_{1p} ($i=1, \dots, N$) определяются формулами (1.4). При $\langle \sigma_{rr}^{i2} \rangle < 0$, т.е. если соответствующие напряжения являются сжимающими, они определяются формулами [7]

$$K_{ip} = K_i; \quad \mu_{ip} = \frac{[9K_i + 8\mu_i(1-p_i)]\mu_i(1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i + 4\mu_i)p_i - 4\mu_i p_i^2}; \quad \beta_{ip} = \beta_i; \quad \alpha_{ip} = \alpha_i \quad (i=1, 2). \quad (2.1)$$

Принимая критерий прочности в микрообъеме неповрежденной части материала i -компонента в форме Шлейхера – Надаи (1.5), приходим к уравнению баланса пористости (1.10), где $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1}$ определяется формулами (1.11), (1.12), функция $\psi(\bar{i})$ – формулами (1.16) или (1.20), а для $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ имеем

$$\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{1-p_i} \langle \sigma_{rr}^i \rangle, & \langle \sigma_{rr}^i \rangle \geq 0; \\ \langle \sigma_{rr}^i \rangle, & \langle \sigma_{rr}^i \rangle < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\langle \sigma_{rr}^i \rangle$ – средние напряжения в i -компоненте, определяемые формулой (1.12).

Поскольку заданы макродеформации $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температура θ , то с учетом соотношений, связывающих средние напряжения в i -компоненте $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$, макродеформации $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температуру θ (1.12), можно определить выполнение условия $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle \geq 0$ или $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle < 0$. Учитывая соотношения (1.11), уравнение баланса пористости компонента (1.10) при выполнении условия $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle \geq 0$ приведем к виду (1.17), где эффективные модули и температурные коэффициенты пористых наполненных частицами разрушенного материала компонентов K_{1p} , μ_{1p} , β_{1p} , α_{1p} ($i=1, \dots, N$) определяются формулами (1.4). При выполнении условия $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle < 0$ уравнение баланса пористости компонента (1.10) приведем к виду

$$p_i = p_{0i} + (1-p_{0i})F_i \left(\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^{i1}}{1-p_i} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle \right), \quad (2.3)$$

где средние в i -компоненте напряжения $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ зависимостями (1.12), а эффективные модули и температурные коэффициенты пористых наполненных частицами разрушенного материала компонентов K_{1p} , μ_{1p} , β_{1p} , α_{1p} ($i=1, \dots, N$) определяются формулами (2.1).

§3. На основе соотношений (1.17), (1.2) – (1.4), (1.6), (1.8), (1.9) (1.11), (1.12), (1.16) (или (1.20)) и условия $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle \geq 0$ или (1.17), (1.2), (1.3), (2.1), (2.2), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12), (1.16) (или (1.20)) и условия $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle < 0$, можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и напряженно-деформированного состояния слоистого материала. С этой целью воспользуемся методом секущих [1].

Записав уравнение баланса пористости i -компонента (1.10) в виде

$$\varphi_i(p_i) = \{p_i - p_{0i} - (1-p_{0i})F_i[I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle] \psi_i(\bar{i})\} = 0, \quad (3.1)$$

легко проверить, что корень p_i находится в интервале $[p_{0i}, 1]$, так как имеют место неравенства

$$\varphi_i(p_{0i}) < 0; \quad \varphi_i(1) > 0. \quad (3.2)$$

Поэтому нулевое приближение корня $p_i^{(0)}$ определяется формулой

$$p_i^{(0)} = \frac{a_i^{(0)}\varphi_i(b_i^{(0)}) - b_i^{(0)}\varphi_i(a_i^{(0)})}{\varphi_i(b_i^{(0)}) - \varphi_i(a_i^{(0)})}, \quad (3.3)$$

где $a_i^{(0)} = p_{0i}$, $b_i^{(0)} = 1$.

Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_i^{(m)} = \frac{a_i^{(m)}\varphi_i(b_i^{(m)}) - b_i^{(m)}\varphi_i(a_i^{(m)})}{\varphi_i(b_i^{(m)}) - \varphi_i(a_i^{(m)})}, \quad (3.4)$$

$$a_i^{(m)} = a_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = p_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)})\varphi_i(p_i^{(m-1)}) \leq 0;$$

$$a_i^{(m)} = p_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)})\varphi_i(p_i^{(m-1)}) \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$|\varphi_i(p_i^{(m)})| < \varepsilon, \varphi, \quad (3.5)$$

где ε – точность вычисления корня.

На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования двухкомпонентных слоистых композитных материалов при микроповреждениях в связующем для распределения Вейбулла (1.9) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (1.16). В качестве жесткого слоя и связующего приняты, соответственно, алюмоборосиликатное стекло с характеристиками [2]

$$E_1 = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,2; \quad \alpha_1 = 4,9 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$$

и объемным содержанием $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ и эпоксидное связующее с характеристиками неповрежденной части [4] $E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,35; \quad \alpha_2 = 45 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$.

где E_1 и E_2 – модули Юнга, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона, α_1 и α_2 – коэффициенты температурных деформаций неповрежденной части, соответственно, жесткого слоя и связующего, а также при

$$p_{02} = 0; \quad k_{02} / \mu_2 = 0,01; \quad m_2 \mu_2^{\beta_2} = 1000; \quad \beta_2 = 2; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа} \quad (\sigma_{2p} = \sqrt{1,5} k_{20});$$

$$\alpha_2 = 0,02; \quad \gamma_2 = 0,001; \quad n_{12} = 1; \quad \theta = \pm 20 \text{ °C}.$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle = 0,002; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (3.6)$$

согласно (1.1) макронапряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ и температурой θ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \{ [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle - [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\beta_3^* - 2\lambda_{13}^*\beta_1^*] \theta \}.$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде соотношений (1.17), (1.2) – (1.4), (1.6), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12), (1.16) (или (1.20)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ и соотношений (1.17), (1.2), (1.3), (2.1), (2.2), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12), (1.16) (или (1.20)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$ имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = - \frac{\lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle - \beta_1^* \theta}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*},$$

что эквивалентно условию (3.6).

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости связующего p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания жесткого слоя c_1 . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании жесткого слоя $c_1 = 0$, штриховой линией — при $c_1 = 0,25$, точечной линией — при $c_1 = 0,5$, штрих-пунктирной линией — при $c_1 = 0,75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 2. Графики показывают, что с уменьшением температуры и увеличением объемного содержания жесткого слоя микрповрежденность p_2 увеличивается.

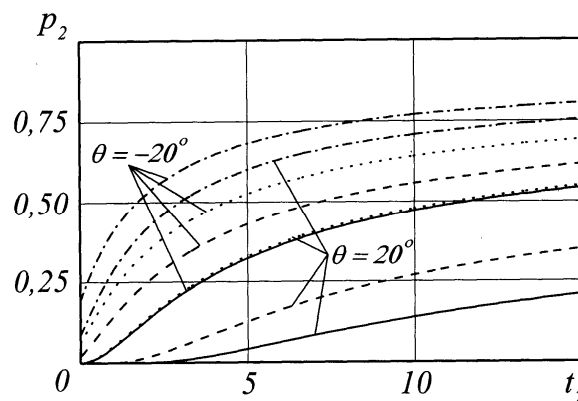


Рис. 1

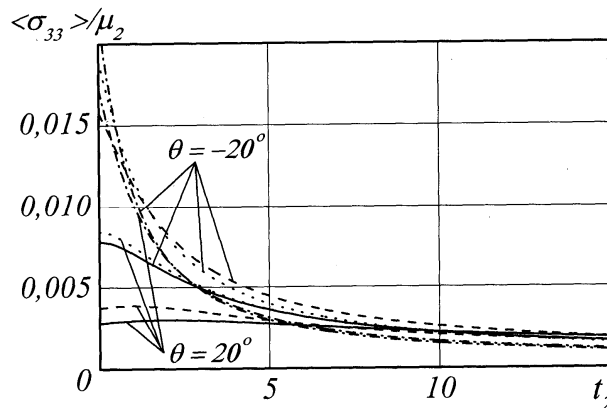


Рис. 2

На рис. 2 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания жесткого слоя c_1 . Графики показывают, что эти кривые являются нисходящими для всех значений температуры и объемного содержания жесткого слоя. Однако следует отметить, что уменьшение макронапряжений со временем не является монотонной функцией температуры и объемного содержания жесткого слоя.

Заключение.

Построена теория длительной повреждаемости и деформирования слоистых композитных материалов при температурных воздействиях. Процесс повреждаемости слоев материала моделируется образованием в них стохастически расположенных

микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Шлейхера — Надаи. Для произвольного момента времени сформулированы уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов слоистого материала, учитывающие температурную составляющую. Построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости компонентов слоистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также получены соответствующие кривые. Исследовано влияние температурных воздействий на кривые макродеформирования и повреждаемости материала.

РЕЗЮМЕ. Побудовано теорію довготривалої пошкоджуваності шаруватих матеріалів під впливом температури. Процес пошкоджуваності шарів матеріалу моделюється утворенням в них стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Шлейхера — Надаї, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоженості (пористості) шарів з урахуванням температурної складової. Побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності шарів матеріалу від часу, макронапружень від часу, а також отримано відповідні криві і досліджено вплив на них температури.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 10. – P. 1035 – 1041.
7. Khoroshun L.P. Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 9. – P. 1158 – 1165.
8. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 2. – P. 127 – 135.
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 591 – 620.
10. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Layered Materials with Stress-Rupture Microstrength Described by an Exponential Power Function // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 8. – P. 873 – 881.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled Deformation and Long-Term Damage of Layered Materials with Stress-Rupture Microstrength Described by a Fractional-Power Function // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 9. – P. 991 – 999.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of fibrous materials with the stress-rupture microstrength of the matrix described by a fractional-power function // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1196 – 1205.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of fibrous materials with the microdurability of the matrix described by an exponential power function // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 1. – P. 37 – 45.

Поступила 15.06.2009

Утверждена в печать 07.12.2010