Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2009, том 6, N 1, 82–95

УДК 517.547.3

***А. М. Гомилко***

*(Институт гидромеханики НАН Украины, Киев)*

***Е. И. Радзиевская***

*(Национальный университет пищевых технологий МОН Украины, Киев)*

***Г. В. Радзиевский***

*(Институт математики НАН Украины, Киев)*

# Локальная теорема о среднем для разделенных разностей голоморфных функций*

**alex@gomilko.com, radz@imath.kiev.ua**

Доказана локальная теорема о среднем значении для разделенных разностей голоморфных функций.

**Введение.** Локальным теоремам о среднем для векторнозначных функций и, в частности, для голоморфных функций посвящено достаточно много работ (см., напр., [1-7]). Данная статья непосредственно примыкает к этой тематике и в ней, по-видимому, впервые изучается вопрос: когда разделенная разность голоморфной функции может быть записана в форме Коши, то есть когда возможно (и каким образом) перенести хорошо известную в случае вещественных на отрезке

*При написании работы первый автор пользовался поддержкой Фонда Гражданских Исследований и Развития США (CRDF) и Министерства Просвещения и и образования Украины (грант UK2-2811-OD-06).

функций формулу на случай голоморфных в области функций? Этот вопрос напрямую связан с вопросом о том, когда разность между голоморфной в области функцией и ее интерполяционным многочленом можно записать в форме Коши (см. [8] (гл. 1, §§ 1, 4)). При этом, если в качестве узлов интерполяции взять одну кратную точку, то такая задача сводится к аналогичной задаче для остатка в формуле Тейлора для голоморфной функции. Такая задача впервые была рассмотрена в работе С. Чинквини [1], впоследствии она уточнялась в различных направлениях в статьях [2-7].

Работа состоит из введения и трех параграфов. В первом параграфе приводится постановка задачи и формулируется основная теорема. Во второй параграф вынесены две вспомогательные леммы геометрического характера. Эти леммы используются в третьем параграфе, где дано доказательство теоремы.

**1. Постановка задачи и формулировка основного утверждения.** Далее через $U_r(\alpha) := \{z \in \mathrm{C} : |z-\alpha| \le r\}$ обозначаем замкнутый круг радиуса $r$ с центром в точке $\alpha$, а $\partial U_r(\alpha)$ — его положительно ориентированная граница. Пусть $\overline{P}$ — наименьший выпуклый замкнутый многоугольник, содержащий, возможно, совпадающие между собой точки комплексной плоскости $z_0, z_1, \ldots, z_n$, где $n \ge 1$. Допустим, что $f$ — голоморфная в области $D \subset \mathrm{C}$ функция, причем $\overline{P} \subset D$. Тогда за определение $n$-й разделенной разности функции $f$ можно принять выражение [8, гл. 1, § 4.2]

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n; f] :=$$

$$:= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} F(t_1, \ldots, t_n; z_0, z_1, \ldots, z_n) dt_1 \ldots dt_n, \qquad (1)$$

где функция

$$F(t_1, \ldots, t_n; z_0, z_1, \ldots, z_n) :=$$

$$:= f^{(n)}(z_1 + (z_2 - z_1)t_1 + \cdots + (z_n - z_{n-1})t_{n-1} + (z_0 - z_n)t_n).$$

Далее будем предполагать, что точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ принадлежат некоторому кругу $U_r(\alpha)$, а сам круг $U_r(\alpha)$ принадлежит $D$. Таким образом, $\overline{P} \subset U_r(\alpha) \subset D$. Тогда непосредственно из (2) следует неравенство

$$|[z_0, z_1, \ldots, z_n; f]| \le \frac{1}{n!} \max_{\zeta \in \overline{P}} |f^{(n)}(\zeta)| \le \frac{1}{n!} \max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |f^{(n)}(\zeta)|. \qquad (2)$$

Предположим, что область $G$, содержащая точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$, компактно принадлежит $D$, а ее граница $\partial G$ положительно ориентирована и состоит из конечного числа непрерывных кривых. Тогда для $n$-ой разделенной разности справедливо также представление

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n; f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0) \ldots (\zeta - z_n)}. \tag{3}$$

В случае когда вещественная функция $f$ определена и $n$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b] \subset \mathrm{R}$, а точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ принадлежат $[a, b]$, то справедлива формула Лагранжа [8] (гл. 1, § 4.1)

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{4}$$

где $\xi$ — некоторая точка, принадлежащая наименьшему отрезку, содержащему точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Простые примеры показывают, что требование вещественности $f$ для справедливости формулы (4) является существенным и даже если функция $f$ голоморфна (но не принимает вещественные значения на отрезке $[a, b]$), то в общем случае утверждение (4) может не выполняться.

В настоящей работе рассматривается задача: когда формулу (3) можно записать в виде (4), т.е. когда когда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0) \ldots (\zeta - z_n)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \tag{5}$$

и где может находится точка $\xi$ ?

Пусть на комплексной плоскости задано $k$, возможно, совпадающих, точек $w_1, \ldots, w_k$. Тогда по теореме Юнга [9, § 2.10] существует и является единственным такой замкнутый круг $U_r(v)$ (равный точке, если все $w_k$ совпадают между собой), который содержит $w_1, \ldots, w_k$, а его радиус $r$ является наименьшим среди радиусов всех замкнутых кругов, содержащих $w_1, \ldots, w_k$. Этот единственный круг будем называть кругом минимального радиуса, содержащим точки $w_1, \ldots, w_k$. Отметим, что по теореме Юнга справедлива оценка $r \le d/\sqrt{3}$, где $d$ — диаметр множества, образованного точками $w_1, \ldots, w_k$.

Далее будем считать полностью выполненными все введенные предположения и обозначения.

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема.** *Пусть функция $f$ голоморфна в области $D$ и не является полиномом степени не выше $n$, точка $\alpha \in D$, а $s$ – наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих требованию $f^{(n+s)}(\alpha) \neq 0$. Предположим, что для точек круга $\zeta \in U_r(\alpha)$, целиком лежащего в $D$, выполнено условие*

$$\frac{(n+s-1)(n+s)}{ns(s+1)} r \max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| < |f^{(n+s)}(\alpha)|. \tag{6}$$

*Тогда для любого множества точек $z_0, z_1, \ldots, z_n$, для которых $U_r(\alpha)$ является кругом минимального радиуса, найдется по крайней мере одна такая точка $\xi \in U_r(\alpha)$, для которой выполняется равенство* (4). *Если условие* (6) *выполнено для значения $s = 1$, то есть когда*

$$\frac{(n+1)}{2} r \max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |f^{(n+2)}(\zeta)| < |f^{(n+1)}(\alpha)|, \tag{7}$$

*то указанная точка $\xi$ является единственной.*

Заметим, что за счет уменьшения радиуса круга $U_r(\alpha)$ при фиксированном $\alpha$ всегда можно добиться выполнения неравенства (6). При $r = 0$, т.е. когда все точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ совпадают с $\alpha$, равенство (5) справедливо при $\xi = \alpha$, поскольку тогда левая и правая части в формуле (5) равны вычету функции $\zeta^{-n-1} f(\zeta)$ в точке $\zeta = \alpha$.

Отметим, что если $f$ — полином степени не выше $n$, то для него утверждение теоремы остается в силе. Действительно, рассмотрев рациональную функцию $g(\zeta) = f(\zeta)/((\zeta - z_0)\ldots(\zeta - z_n))$, $\deg f \le n$, $\deg(\zeta - z_0)\ldots(\zeta - z_n) = n+1$, переменного $\zeta \in \mathrm{C}$, замечаем, что левая часть в формуле (5) совпадает, с точностью до знака, со значением вычета функции $g(\zeta)$ в точке $\zeta = \infty$, то есть с коэффициентом при $z^n$ многочлена $f(z)$ [10] (гл. 4, § 4).

**2. Вспомогательные утверждения.** В данном пункте доказываются вспомогательные утверждения, относящиеся к понятию круга минимального радиуса и играющие важную роль при доказательстве теоремы.

***Замечание 1.*** *Пусть $U_r(v)$ — круг минимального радиуса, содержащий точки $w_1, \ldots, w_k$. Тогда, если имеются точки, пусть это будут $w_s, \ldots, w_k$, которые лежат строго внутри круга $U_r(v)$, то $U_r(v)$ будет также кругом минимального радиуса и для точек $w_1, \ldots, w_{s-1}$.*

Действительно, если предположить, что найдется круг $U_{r_0}(v_0)$, с $r_0 < r$, содержащий точки $w_1, \ldots, w_{s-1}$, то тогда круги $U_r(v_\varepsilon)$, с центрами в $v_\varepsilon = \varepsilon v + (1-\varepsilon)v_0$, $\varepsilon \in [0,\ 1]$, при достаточно малых $\varepsilon$ будут содержать все точки $w_1, \ldots, w_{s-1}$ и $w_s, \ldots, w_k$, что противоречит единственности круга минимального радиуса $U_r(v)$.

Отметим, что если точки $w_1$, $w_2$ и $w_3$ являются вершинами остроугольного либо прямоугольного треугольника, то тогда граница круга минимального радиуса, содержащего точки $w_1$, $w_2$, $w_3$, совпадает с описанной вокруг треугольника $w_1w_2w_3$ окружностью. Далее понадобится следующее утверждение, носящее чисто геометрический характер.

**Предложение 1.** *Пусть на комплексной плоскости задано $k \geq 4$ различных точек $w_1, \ldots, w_k$, и $U_r(v)$ — круг минимального радиуса, содержащий эти точки. Тогда найдутся три такие точки $w_{s_1}$, $w_{s_2}$, $w_{s_3}$, для которых круг $U_r(v)$ является кругом минимального радиуса.*

***Доказательство.*** Не уменьшая общности, можно считать, что все точки $w_1, \ldots, w_k$ лежат на границе круга $U_r(v)$. Пусть $d$ — диаметр множества, образованного точками $w_s$, $s = 1, \ldots, k$. При этом $d \leq 2r$ и если $d = 2r$, то это значит, что на границе $\partial U_r(v)$ найдется пара точек, лежащих на диаметре круга $U_r(v)$. Пусть это будут точки $w_1$, $w_2$, тогда круг $U_r(v)$ будет кругом минимального радиуса, содержащим две точки $w_1$, $w_2$. В частности, $U_r(v)$ будет кругом минимального радиуса и для трех точек $w_1$, $w_2$, $w_3$.

Пусть теперь $d < 2r$ и $d = |w_l - w_s|$ для некоторых $l, s \leq k$. Если предположить, что для этих $l$, $s$ все треугольники, образованные точками $w_l, w_s, w_j$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq l, s$, не являются остроугольными, либо вырождаюся в отрезки, то тогда круг с центром в точке $w_0 = (w_l + w_s)/2$ и радиусом $d/2 < r$ будет содержать все точки $w_j$, $j = 1, \ldots, k$, что противоречит минимальности радиуса $r$. Таким образом, на границе $\partial U_r(v)$ найдется тройка точек $w_{s_1}$, $w_{s_2}$, $w_{s_3}$ из системы $w_j$, $j = 1, \ldots, k$, образующая остроугольный треугольник. Тогда круг $U_r(v)$ является также кругом минимального радиуса, содержащим эти точки $w_{s_1}$, $w_{s_2}$, $w_{s_3}$.

Предложение доказано.

**Лемма 1.** *Пусть на комплексной плоскости задано $k \geq 2$, возможно, совпадающих между собой точек $w_1, \ldots, w_k$, и пусть $U_r(v)$ — круг минимального радиуса $r \geq 0$, содержащий эти точки. Тогда* *выполняется неравенство*

$$\left| v - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} w_j \right| \le \frac{k-2}{k} r. \tag{8}$$

***Доказательство.*** Не уменьшая общности, считаем, что система $w_1, \ldots, w_k$ содержит хотя бы две несовпадающие точки. Для $k = 2$ и при $k = 3$, в случае, когда точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ не образуют остроугольный треугольник, оценка (8) является очевидной (в случае прямоугольного треугольника неравенство (8) превращается в равенство).

Пусть теперь точки $w_1$, $w_2$ и $w_3$ различны и являются вершинами остроугольного треугольника. В этом случае граница круга минимального радиуса, содержащего точки $w_1$, $w_2$, $w_3$, совпадает с описанной вокруг треугольника $w_1w_2w_3$ окружностью. При этом левая часть в (8) совпадает с расстоянием $\rho$ между центром описанного круга треугольника и его ортоцентром, причем $\rho^2 = R^2 - (a^2+b^2+c^2)/9$, где $R$ — радиус описанной окружности, а $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника [11, п. 47]. Отсюда, используя теорему синусов, получаем

$$\rho^2 = R^2 \left\{ 1 - \frac{4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}{9} \right\},$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы треугольника. Тогда на основании элементарной формулы

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

имеем (с учетом остроты углов треугольника)

$$\rho^2 = (1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\left(\frac{R}{3}\right)^2 < \left(\frac{R}{3}\right)^2,$$

то есть $\rho < R/3$, и оценка (8) верна при $k = 3$.

Покажем, что оценка (8) при значениях $k \ge 4$ является следствием справедливости неравенства (8) при $k = 3$. Действительно, согласно предложению 1 найдутся три такие точки из системы $w_j$, $j = 1, \ldots, k$, пусть это будут точки $w_1$, $w_2$, $w_3$, для которых $U_r(v)$ также является кругом минимального радиуса. Тогда, по доказанному выше для $k = 3$, имеем оценку

$$\left|v - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} w_j\right| = \frac{1}{k}\left|\sum_{j=1}^{k}(v - w_j)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{k}r + \frac{1}{k}\sum_{j=4}^{k}|v - w_j| \le \frac{1}{k}r + \frac{k-3}{k}r = \frac{k-2}{k}r.$$

Лемма доказана.

***Замечание 2.*** *Пусть на комплексной плоскости имеется* $k \ge 2$, *возможно совпадающих между собой, точек* $w_1, \dots, w_k$, *в которых сосредоточены единичные массы. Тогда точка* $w = (w_1 + \dots + w_k)/k$ *называется центром тяжести системы* $w_1, \dots, w_k$ [12] (Отдел 5, гл. 2, § 1). *Таким образом, утверждение* (8) *допускает следующую равносильную формулировку: если* $r$ *— радиус минимального круга, содержащего точки* $w_1, \dots, w_k$ *единичной массы, а* $\rho$ *— расстояние от центра этого круга до центра тяжести системы точек* $w_1, \dots, w_k$, *то* $\rho \le ((k-2)/k)r$.

На основании предложения 1 и леммы 1 доказывается следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть* $U_r(v)$ *— круг минимального радиуса, содержащий, возможно совпадающие между собой, точки комплексной плоскости* $w_1, \dots, w_k$, $k \ge 2$, *а* $\gamma$ *— произвольный положительно ориентированный жорданов спрямляемый контур, ограничивающий некоторую область, содержащую* $w_1, \dots, w_k$. *Тогда для чисел*

$$\Delta_{k,h}(v) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\prod_{j=1}^{k}(\zeta - w_j)^{-1}\right)(\zeta - v)^h\, d\zeta, \quad h = 0, 1, 2, \dots,$$

*справедливы равенства*

$$\Delta_{k,h}(v) = 0, \ \ \text{при} \ \ h < k-1, \quad \Delta_{k,k-1} = 1, \tag{9}$$

$$\Delta_{k,h}(v) = \sum_{l_1+\dots+l_k = h-k+1,\ l_j \ge 0}\left(\prod_{j=1}^{k}(w_j - v)^{l_j}\right), \quad h \ge k, \tag{10}$$

*и оценки*

$$|\Delta_{2,h}(v)| \le \frac{(1-(-1)^h)}{2}r^{h-1}, \ \ h \ge 2, \tag{11}$$

$$|\Delta_{k,h}(v)| \le \left(C_h^{k-1} - 2C_{h-2}^{k-2}\right) r^{h-k+1}, \quad h \ge k \ge 3, \tag{12}$$

*где биномиальные коэффициенты*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n \ge m, \quad 0! = 1.$$

***Доказательство.*** Преобразование $w \mapsto w - v$ сводит доказательство леммы к случаю, когда центр $v$ круга минимального радиуса, содержащего $w_1, \ldots, w_k$, находится в нуле, что и будем предполагать, так что далее $\Delta_{k,h}(v) = \Delta_{k,h}(0)$. Пусть $S(R)$ — положительно ориентированная окружность с центром в нуле и радиусом $R > r$. Поскольку справедливо разложение

$$\frac{\zeta}{\zeta - w_j} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{w_j}{\zeta}\right)^l, \quad |\zeta| > r,$$

то, учитывая сделанные предположения и теорему Коши, имеем

$$\Delta_{k,h}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(R)} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{\zeta}{\zeta - w_j}\right) \zeta^{h-k}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{l_1+\cdots+l_k=s,\; l_j \ge 0} \left(\prod_{j=1}^{k} w_j^{l_j}\right)\right) \int_{S(R)} \zeta^{h-k-s}\, d\zeta.$$

Если теперь заметить, что интегралы в последнем выражении равны нулю, когда $h-k-s \ne -1$, и равны $2\pi i$, когда $h-k-s = -1$, то тогда получим равенства (9), (10).

Используя (10) и лемму 1, будем иметь

$$|\Delta_{k,k}(0)| = |\sum_{j=1}^{k} w_j| \le (k-2)r = \left(C_k^{k-1} - 2\right) r, \tag{13}$$

то есть оценка (12) выполняется при $h = k$ для любого $k \ge 2$.

Если $k = 2$ и $w_1 = w_2$, то $\Delta_{k,h}(0) = 0$ для любого $h \ge 2$. Если же $w_1 \ne w_2$, то тогда $w_1 = -w_2$ и

$$\Delta_{2,h}(0) = \sum_{l_1+l_2=h-1,\; l_j \ge 0} \left(\prod_{j=1}^{2} w_j^{l_j}\right) = \frac{w_1^h - w_2^h}{w_1 - w_2} = \frac{(1-(-1)^h)}{2} w^{h-1},$$

откуда вытекает оценка (11).

Отметим, что число слагаемых в выражении (10) равняется $C_h^{k-1}$, где $C_h^{k-1}$ представляет собой число различных сочетаний с повторениями из $k$ элементов по $h-k+1$ элементов [13, § 1.1].

Докажем оценки (12) для значения $k=3$. Заметим, что справедливо равенство

$$2\Delta_{3,h}(0) = \Delta_{3,3}(0)\Delta_{3,h-1}(0) + \sum_{l_1+l_2+l_3=h-2,\ l_j\geq 0} c_{l_1,l_2,l_3}\left(\prod_{j=1}^{3} w_j^{l_j}\right), \tag{14}$$

где коэффициенты $c = c_{l_1,l_2,l_3}$ принимают одно из трех значений 0, 1 или $-1$, причем $c=0$, если соответствующее слагаемое имеет вид $w_s^{l_s}w_j^{2-h-l_s}$, $l_s = 1,\dots,h-3$, $s\neq j$, $s,j=1,2,3$. Таких слагаемых будет $3(h-3)$, и значит, число ненулевых коэффициентов $c_{l_1,l_2,l_3}$ в правой части (14) равняется $C_h^2 - 3(h-3)$. Таким образом, на основании (14) и (13) для значения $k=3$, имеем оценку

$$2|\Delta_{3,h}(0)| \leq |\Delta_{3,h-1}(0)|r + (C_h^2 - 3(h-3))r^{h-2}.$$

Отсюда, если сделать индуктивное предположение, что для $|\Delta_{3,h-1}(0)|$ при $h\geq 4$ выполняется оценка (12), то тогда, после простых вычислений, получаем

$$2|\Delta_{3,h}(0)| \leq \{C_{h-1}^2 - 2C_{h-3}^1 + C_h^2 - 3(h-3)\}r^{h-2} =$$

$$= \{h^2-7h+16\}r^{h-2} = \{C_h^2-2C_{h-2}^1-2(h-4)\}r^{h-2} \leq \{C_h^2-2C_{h-2}^1\}r^{h-2},$$

то есть оценка (12) выполняется и для величины $|\Delta_{3,h}(0)|$. Поскольку оценка (12) уже доказана для $\Delta_{3,3}(0)$, то мы можем утверждать, что она верна и для всех $\Delta_{3,h}(0)$, $h\geq 3$.

Таким образом, оценки (12) справедливы для величин $\Delta_{k,h}(0)$ при $h=k$ и при $k=2$, $k=3$ для любого $h\geq k$.

Докажем теперь оценки (12) при $k\geq 4$ методом индукции. Отметим, что величина $\Delta_{k,h}(0)$ содержит два индекса $k$ и $h\geq k$. Поэтому индуктивное предположение состоит в том, что для некоторых фиксированных значений $k\geq 4$ и $s\geq 0$ выполняются оценки (12) для величин $\Delta_{k-1,h}(0)$ при всех $h\geq k-1$ и для величины $\Delta_{k,k+s}(0)$. Тогда лемма будет доказана, если установить, что оценка (12) имеет место и для величины $\Delta_{k,k+s+1}(0)$.

Согласно предложению 1 найдется такая точка, пусть это будет точка $w_k$, что круг $U_r(0)$ будет кругом минимального радиуса как для исходной системы точек $w_1, \ldots, w_k$, так и для точек $w_1, \ldots, w_{k-1}$. Тогда, используя соотношение $\Delta_{k,k+s+1}(0) = \Delta_{k,k+s}(0)w_k + \Delta_{k-1,k+s}(0)$ и легко проверяемое равенство $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$, получаем на основании сделанного индуктивного предположения неравенство

$$|\Delta_{k,k+s+1}(0)| \leq |\Delta_{k,k+s}(0)|r + |\Delta_{k-1,k+s}(0)| \leq$$
$$\leq \left(C_{k+s}^{k-1} + C_{k+s}^{k-2} - 2C_{k+s-2}^{k-2} - 2C_{k+s-2}^{k-3}\right) r^{s+2} = \left(C_{k+s+1}^{k-1} - 2C_{k+s-1}^{k-2}\right) r^{s+2},$$

то есть оценка (12) выполняется и для $\Delta_{k,k+s+1}(0)$.

Лемма доказана.

**3. Доказательство теоремы.** Перед доказательством теоремы сделаем простое замечание, относящееся к формуле Тейлора для голоморфной функции. Пусть функция $f$ голоморфна в области $D$ и пусть круг $U_r(\alpha) \subset D$. Тогда, поскольку формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме справедлива и для функций со значениями в банаховом пространстве (см., например, [14, п. 12.64]), и, в частности, для функций со значениями в $\mathbb{C}$, то справедливо равенство

$$f(z) = \sum_{h=0}^{s} \frac{(z-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha) + Q_s(z; f), \quad z \in U_r(\alpha), \tag{15}$$

где

$$Q_s(z; f) = \frac{1}{s!} \int_\alpha^z f^{(s+1)}(\tau)(z-\tau)^s \, d\tau, \tag{16}$$

а интеграл берется по отрезку в комплексной плоскости с началом в точке $\alpha$ и концом в точке $z$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда среди множества $z_0, z_1, \ldots, z_n$ есть по крайней мере две различные точки. Равенством

$$F(z) := f^{(n)}(z) - f^{(n)}(\alpha) \tag{17}$$

введем в рассмотрение голоморфную в области $D$ функцию $F(z)$. При этом из (17), формулы Тейлора (15), записанной для функции $f^{(n)}$, и из условия, что $s$ — наименьшее из натуральных чисел, для которого $f^{(n+s)}(\alpha) \neq 0$, находим что справедливо равенство

$$F(z) = \frac{(z-\alpha)^s}{s!} f^{(n+s)}(\alpha) + Q_s(z; f^{(n)}).$$

Тогда, поскольку для функции $Q_s(z; f^{(n)})$, заданной равенством (16), и записанной для $f^{(n)}$ вместо $f$, справедливы соотношения

$$|Q_s(z; f^{(n)})| \leq \frac{1}{s!}\int_\alpha^z |z-\tau|^s\,|d\tau| \max_{\zeta\in U_r(\alpha)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)| \leq$$

$$\leq \frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!} \max_{\zeta\in U_r(\alpha)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)|, \quad z\in U_r(\alpha), \tag{18}$$

то находим следующую для $z \in U_r(\alpha)$ оценку снизу

$$|F(z)| \geq \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(n+s)}(\alpha)| - \frac{|z-\alpha|^{s+1}}{(s+1)!} \max_{\zeta\in U_r(\alpha)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)|. \tag{19}$$

Отсюда, в частности, используя условие (6), имеем при $z \in U_r(\alpha)$ неравенство

$$|F(z)| > \frac{|z-\alpha|^s}{s!}|f^{(n+s)}(\alpha)| \left\{1 - \frac{ns}{(n+s-1)(n+s)}\right\}, \tag{20}$$

где

$$1 - \frac{ns}{(n+s-1)(n+s)} \geq \frac{n}{n+s} > 0.$$

Из (19) и определения функции $F(z)$ следует, что функциия $F(z)$ в круге $U_r(\alpha)$ имеет единственный корень $z = \alpha$ кратности $s$.

Поскольку функция $f$ голоморфна в области $D$, а область $G$ и круг $U_r(\alpha)$, по предположению, содержат все точки $z_0, z_1, \dots, z_n$, то согласно теореме Коши о равенстве нулю интеграла от голоморфной функции по замкнутому контуру, не уменьшая общности, будем далее предполагать, что область $G$ в формуле (3) и в последующих рассуждениях содержит круг $U_r(\alpha)$ (иначе $G$ следует заменить на объединение $G$ с внутренностью круга $U_r(\alpha)$). Пусть постоянная

$$g := \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)\dots(\zeta-z_n)} - f^{(n)}(\alpha). \tag{21}$$

Тогда, используя равенства (см. [8], гл. 1, формулы (50), (54))

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\zeta^h\,d\zeta}{(\zeta-z)\omega(\zeta)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq h \leq n-1, \\ 1, & h = n, \end{cases}$$

для постоянной $g$ получаем представление

$$g = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{1}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_n)} \left\{ f(\zeta) - \sum_{h=0}^{n} \frac{(\zeta-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha) \right\} d\zeta.$$

Применяя теперь формулу Тейлора (15) при значении $s$, равном $n+s$, и используя предположение о том, что $f^{(n+h)}(\alpha) = 0$ при $0 < h < s$, имеем равенство

$$g = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{1}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_n)} \left\{ \frac{(\zeta-\alpha)^{n+s}}{(n+s)!} f^{(n+s)}(\alpha) + Q_{n+s}(\zeta; f) \right\} d\zeta.$$

Далее, воспользовавшись в последнем равенстве оценкой (12) при $h = n+s$, $k = n+1$, выводим неравенство

$$|g| \le \frac{n!}{(n+s)!} \left( C_{n+s}^{n} - 2C_{n+s-2}^{n-1} \right) r^s |f^{(n+s)}(\alpha)| + \\ + \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{Q_{n+s}(\zeta; f)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_n)} \right|. \tag{22}$$

Далее, из равенства (3) и неравенства (2), примененных к функции $Q_{n+s}(\zeta; f)$, вытекает оценка

$$\frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{Q_{n+s}(\zeta; f)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_n)} \right| \le \max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |Q_{n+s}^{(n)}(\zeta; f)|. \tag{23}$$

Из определения (16) функции $Q_s(\cdot; f)$ следует равенство

$$Q_{n+s}^{(n)}(z; f) = \frac{1}{s!} \int_{\alpha}^{z} f^{(n+s+1)}(\tau)(z-\tau)^s\, d\tau,$$

а значит (см. вывод оценки (18)), справедливо неравенство

$$\max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |Q_s^{(n)}(\zeta; f)| \le \frac{r^{s+1}}{(s+1)!} \max_{\zeta \in U_r(\alpha)} |f^{(n+s+1)}(\zeta)|.$$

Используя это неравенство вместе с (23) в неравенстве (22), получаем

$$|g| \le \left( \frac{1}{s!} - 2\frac{n!}{(n+s)!} \frac{(n+s-2)!}{(n-1)!(s-1)!} \right) r^s |f^{(n+s)}(\alpha)| +$$

$$+\frac{r^{s+1}}{(s+1)!}\max_{\zeta\in U_r(\alpha)}|f^{(n+s+1)}(\zeta)|=$$

$$=\left(1-\frac{2ns}{(n+s-1)(n+s)}\right)\frac{r^s}{s!}|f^{(n+s)}(\alpha)|+\frac{r^{s+1}}{(s+1)!}\max_{\zeta\in U_r(\alpha)}|f^{(n+s+1)}(\zeta)|. \tag{24}$$

Таким образом, на основании оценок (19) и (24), с учетом условия (6) теоремы, приходим к выводу, что для справедливости оценки

$$|F(z)|>|g|,\quad z\in\partial U_r(\alpha), \tag{25}$$

достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{s!}|f^{(n+s)}(\alpha)|-\frac{r}{(s+1)!}\max_{\zeta\in U_r(\alpha)}|f^{(n+s+1)}(\zeta)|>$$

$$>\left(1-\frac{2ns}{(n+s-1)(n+s)}\right)\frac{1}{s!}|f^{(n+s)}(\alpha)|+\frac{r}{(s+1)!}\max_{\zeta\in U_r(\alpha)}|f^{(n+s+1)}(\zeta)|,$$

то есть

$$\frac{r}{(s+1)}\max_{\zeta\in U_r(\alpha)}|f^{(n+s+1)}(\zeta)|<\frac{ns}{(n+s-1)(n+s)}|f^{(n+s)}(\alpha)|,$$

что совпадает с условием (6). Таким образом, на основании (25) и теоремы Руше (см., например, [10] (гл. 4, § 6)) заключаем, что функции $F(z)$ и

$$F(z)-g=f^{(n)}(z)-\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)\dots(\zeta-z_n)}$$

имеют внутри круга $U_r(\alpha)$ одинаковое число нулей. Последнее означает, что найдется по крайней мере одна такая точка $\xi\in U_r(\alpha)$, для которой выполняется равенство (5), а если условие (6) выполнено для значения $s=1$, то такая точка единственна.

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность И. А. Шевчуку за полезные обсуждения данной работы.

## Список литературы

[1] Cinquini S. Sopra un'estensione di una formula di Curtiss // Inst. Lombardo. Rend. – 1937. – **70**, № 3. – P. 236-248.

[2] Sharma A. Remark on a theorem Cinquini // Acta math. Acad. Sci. Hung. – 1960. – **16**, № 4. – P. 329-331.

[3] McLaud R.M. Mean value theorems for vector valued functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1965. – **14**, № 3. – P. 197-209.

[4] Robertson J.M. A local mean value theorem for the vector complex plane // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1969. – **16**, № 4. – P. 329-321.

[5] Samuelsson A.A. A local mean value theorem for analytic functions // Amer. Math. Monrhly. – 1973. – **80**, № 1. – P. 45-46.

[6] Савчук В.В. До теореми про середнє для аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1143-1147.

[7] Радзиевская Е.И., Радзиевский Г.В. Для голоморфной в области функции остаточный член в форме Тейлора допускает запись в форме Лагранжа // Сиб. мат. журн. – 2003. – **44**, № 2. – С. 402-414.

[8] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.

[9] Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

[10] Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991.

[11] Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.

[12] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2-х ч. – Ч.2. – М.: Наука, 1978.

[13] Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982.

[14] Шилов Г.Е. Математический анализ: В 3-х ч. – Ч. 3: Функции одного переменного. – М.: Наука, 1970.