

10. Про одну властивість сфери.

Максим Бодяк, Віталій Бородін, Ганна Циганкова
Національний університет харчових технологій

Вступ. При дослідженні ефективності змішування рідкої та твердої фракцій була введена глобальна характеристика поверхні – коефіцієнт купольності. Коефіцієнтом купольності поверхні називається відношення площі поверхні до площі плоскої

основи, над якою знаходиться поверхня $k = \frac{S_{нов}}{S_{осн}}$, де $S_{нов}$ - площа поверхні,

$S_{осн}$ - площа основи.

Для півсфери радіуса R маємо, $S_{осн} = \pi R^2$; $S_{нов} = 2\pi R^2$, отже коефіцієнт купольності півсфери $k = \frac{2\pi R^2}{\pi R^2} = 2$.

Матеріали і методи. Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, де область D лежить в площині XOY . Позначимо через $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні σ , де α, β, γ - кути між вектором $\vec{n}$ та осями координат. Зафіксуємо точку $M(x, y, z)$ на поверхні σ . Позначимо через $P(x, y)$ проєкцію точки M на площину XOY . Зафіксуємо деякий елемент $\Delta\sigma$ поверхні $z = f(x, y)$, який містить точку $M(x, y, z)$, та позначимо через $\Delta\sigma$ площу поверхні $(\Delta\sigma)$. Проєкцію елемента поверхні $(\Delta\sigma)$ на площину XOY позначимо (ΔS) , площу (ΔS) позначимо ΔS . Середнім коефіцієнтом купольності поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y, z)$ називається $k_{cp}(x, y, z) = k_{cp}(M) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta S}$.

Оскільки для поверхні σ координата z визначається точкою $P(x, y)$, то для коефіцієнта купольності поверхні можна використати позначення $k_{cp}(x, y, z) = k_{cp}(x, y)$. Коефіцієнтом купольності (або локальним коефіцієнтом купольності) поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y, z)$ (або в точці $P(x, y)$) називається

$$k(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} k_{cp}(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta S},$$

коли область $(\Delta\sigma)$ стягується в точку $M(x, y, z)$ (або область (ΔS) стягується в точку $P(x, y)$).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні f'_x, f'_y , то

$$k(x, y, z) = \pm \frac{1}{\cos \gamma},$$

де у формулі вибираємо знак плюс, якщо кут γ гострий і знак мінус, якщо кут γ тупий.

Формула для локального коефіцієнта купольності випливає з таких міркувань. Нехай трикутник (σ) з площею σ лежить в площині (Π_1) . Позначимо через

(S) проєкцію трикутника (σ) на площину (Π_2), S - площа трикутника (S).
Відомо, що $S = \sigma \cos \theta$, де $\angle \theta = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ кут між нормальними до площин (Π_1) та (Π_2).

Величина $k(x, y, z)$ використовується при обчисленні поверхневих інтегралів.

Результати. Обчислимо середній коефіцієнт купольності для півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Оскільки вектор нормалі для поверхні $F(x, y, z) = 0$ має вигляд $\vec{N} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}$ та для півсфери $F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z$, то за вектор нормалі для півсфери можна взяти вектор $\vec{N} = \{x, y, z\}$. Одиничний вектор нормалі визначається формулою: $\vec{n} = \left\{ \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right\}$.

Тому коефіцієнт купольності для верхньої півсфери $k(x, y) = \frac{R}{z}$.

Середній коефіцієнт купольності для півсфери

$$k_{cp} = \frac{1}{S(D_{xy})} \iint_{D_{xy}} k(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{xy}} \frac{R}{z} dx dy = 2$$

Висновки. Оскільки середній коефіцієнт купольності верхньої та нижньої півсфер однакові, то доведено твердження про те, що середній коефіцієнт купольності сфери дорівнює коефіцієнту купольності сфери. В роботі показано, що коефіцієнт купольності сфери дорівнює середньому локальних коефіцієнтів купольності сфери. Значення локального коефіцієнта купольності дорівнює середньому значенню купольності в точках сфери, які проєктуються в коло

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4} R^2.$$

Література.

Бородін, В.О. Математична модель піни / В.О. Бородін, Г.А. Циганкова // Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 27-29 червня 2013р., м. Київ, НУХТ. – 2013. – С.98-100.