ISBN 5-7702-0416-8. Ряды Фурье: теория и приложения. Киев, 1992.

О.В.ОСТРОВСКАЯ

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ СУММАМИ ЗИГМУНДА В МЕТРИКЕ C

Устанавливаются асимптотические оценки для верхних граней уклонений обобщенных сумм Зигмунда на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ в случае быстро убывающих функций $\psi(t)$.

Пусть L_p, $p\geq 1$, - пространство 2π-периодических функций $f(\cdot)$ с конечной нормой $\|f\|_p$, где при $p\in[1,\infty)$

$$\|f\|_{L_p}=\|f\|_p=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

при $p=\infty$

$$\|f\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}|f(t)|,$$

C - множество 2π-периодических непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_C=\max\|f(t)\|,$$

$\omega(f,\delta)\ (0<\delta\leq\pi)$ - модуль непрерывности функций $f\in C$, а H_ω - класс 2π-периодических непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(t)-f(t')|\leq\omega(|t-t'|)$, где $\omega(t)$ - фиксированный модуль непрерывности.

Пусть

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f,x) \qquad (1)$$

- ряд Фурье функции $f\in L$, $S_n=S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f,x)$

- её суммы Фурье.

А.Зигмунд в [1] ввел в рассмотрение линейный метод суммирования рядов Фурье. Этот метод определяется с помощью треугольной матрицы чисел

$$\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}=\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right\},\ k=\overline{1,n-1},\ s>0,\ \lambda_0^{(n)}=1. \qquad (2)$$

При этом каждой функции $f \in L$ на основании ее разложения в ряд Фурье (I) ставится в соответствие последовательность тригонометрических полиномов вида

$$Z_n(f,\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f,x), \quad n=1,2,\ldots . \qquad (3)$$

Такие полиномы называются суммами Зигмунда.

В случае $f \in C$ последовательность $Z_n(f,\Lambda)$ равномерно сходится. Аппроксимирующие свойства сумм Зигмунда изучались многими математиками (см., напр., [I - 6]). В дальнейшем, в работах [7 - 9] рассмотрен аналог сумм Зигмунда, в котором

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}, \qquad (4)$$

где $\varphi(k)$ - значения в точках $k \in N$ некоторой непрерывной убывающей функции $\varphi(x)$. Такие обобщенные суммы Зигмунда обозначаются $Z_n^{\varphi}(f,x)$.

Пусть $\psi(x)$, $x \geq 1$, - непрерывная выпуклая вниз функция, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{M}$.

А.И.Степанец [10, II] предложил классификацию функций на основе преобразования их рядов Фурье и через L_β^ψ обозначил класс суммируемых 2π-периодических функций $f(x)$, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \quad \beta \in R,$$

является рядом Фурье некоторой функции из L, которую он обозначил $f_\beta^\psi(x)$ и назвал (ψ,β)-производной функции $f(x)$. Если $f \in C \subset L$, а $f_\beta^\psi \in L_\infty$ и при этом $\|f\|_\infty \leq 1$, то класс таких функций обозначим через $C_{\beta,\infty}^\psi$. Если же $f_\beta^\psi \in H_\omega$, то - через $C_\beta^\psi H_\omega$.

В работе [10] с помощью функции $\mu(\psi,x) = \dfrac{x}{\eta(x) - x}$, $\eta(x) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(x)\right]$ (ψ^{-1} - функция, обратная к ψ) из множества $\mathfrak{M}$ выделено три класса функций $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_\infty$:

$\psi \in \mathfrak{M}_0$, если $0 < \mu(x) \leq K_1$; $\psi \in \mathfrak{M}_C$, если $K_2 < \mu(x) \leq K_3$, $K_1, K_2, K_3 = const$; $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, если $\mu(x)$ монотонно возрастает и не ограничена сверху.

В случае $\lambda_K = 1 - \left(\frac{K}{n}\right)^s$ поведение уклонений верхних граней

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} |f - Z^\psi_n(f)|$$

достаточно полно изучено в работе [6]. В случае сумм Зигмунда, построенных с помощью матрицы $\Lambda = \left\{\lambda^{(n)}_K = 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(K)}\right\}$ в [7, 8] установлено, что при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ порядок приближения суммами Зигмунда на классах $C_{0,\infty}$ совпадает с порядком наилучшего приближения. В случае $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ показано, что

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{0,\infty}, Z^\psi_n) = \sup_{f \in C^\psi_{0,\infty}} |\rho_n(f, x)| =$$

$$= \mathcal{O}(1)\psi(n) \ln(\min(\mu(n), n)).$$

В работе [~~11~~] изучено поведение $\mathcal{E}_n(C^\psi_{0,\infty}, Z^\psi_n)$ при выполнении условий выпуклости (вверх, вниз) функции $\psi(x)/\varphi(x)$, если $\lim\limits_{x \to \infty} (\psi(x)/\varphi(x)) = c$, или ∞ и $\psi \in \mathfrak{M}_C$. В частности, при выполнении условий $\lim\limits_{x \to \infty} (\psi(x)/\varphi(x)) = c$, $\psi, \varphi \in \mathfrak{M}_C$

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \varphi(n) \int_1^n \frac{\psi(x)}{\varphi(x)x}dx + \mathcal{O}(1)\psi(n).$$

Следовательно, при $\varphi(x) = \psi(x)$

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \psi(n) \ln n + \mathcal{O}(1)\psi(n). \quad (5)$$

Если $\psi(t) = t^{-r}$, $t \geq 1$, $r > 0$, такое равенство получено в [4].

В настоящей работе изучается поведение величин $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n)$ и $\mathcal{E}_n(C^\psi_0 H_\omega, Z^\psi_n)$ в случае $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Пусть $\lambda_n(v)$, $0 \le v \le 1, n=1,\dots,$ – последовательность функций таких, что

$$\lambda_n\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}, \quad k=1,\dots,n-1, \tag{6}$$

$$\lambda_n(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\psi(n)}{\psi(nv)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ 0, & v \ge 1, \end{cases}$$

и

$$\tau_n(v,\psi) = \tau_n(v) =$$

$$= \begin{cases} nv\psi(n), & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}, \\ (1-\lambda_n(v))\psi(nv), & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ \psi(nv), & v \ge 1. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку преобразование Фурье

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_n(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv \tag{8}$$

функции $\tau_n(v)$ является суммируемой функцией на числовой прямой (см. [6, 9, 11, 12]), то, как показано в [10], уклонение $\rho_n(f,x)$, $f \in C^\psi_\beta$, можно представить в виде

$$\rho_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Кромо того, в этом случае (см. [11, с. 52])

$$\tau_n(v) = \int_{-\infty}^\infty \hat{\tau}_n(t)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt. \tag{10}$$

1. Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ обобщенными суммами Зигмунда.

Теорема 1. Справедливы следующие асимптотические оценки ($n \to \infty$) :

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n) = A\psi(n)\ln n + O(1)\psi(n), \quad \psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$$

$$\mu(n) > n, \quad \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \le A \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| + \frac{4}{\pi^2} \ ;$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n + \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\mu(n) +$$

$$+ O(1)\psi(n), \qquad \mu(n) \le n, \quad \ln\mu(n) = O(\ln n).$$

Здесь $O(1)$ - величина, равномерно ограниченная по n .

Доказательство. Известно (см., напр.,[11, с. 102]), что верхние грани $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} |\rho_n(f,x)|$

и $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}} |\rho_n(f,x)|$ не зависят от точки $x \in [0,2\pi]$. Поэтому можно рассматривать уклонение $\rho_n(f,x)$ в точке $x = 0$.

Согласно $\tilde{(2)}$ и $\tilde{(4)}$, для каждой $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ имеем

$$\rho_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0\le|t|\le\pi} + \int_{\pi\le|t|\le\mu(n)} + \int_{|t|\ge\mu(n)}\right) f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3, \tag{11}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0\le|t|\le\pi} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{n}\right)\Bigg[\int_0^{1/n} n\psi(n)v\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv +$$

$$+ \psi(n)\int_{1/n}^{1}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv + \int_1^{\infty} \cancel{f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{n}\right)}\psi(nv)\cos\left(vt +\right.$$

$$\left. + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\Bigg]\,dt. \tag{12}$$

Будем использовать оценки из работы [II, с. 102-107, I2I]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\mu(n)}\left|\int\limits_1^\infty \psi(nv)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt\le A_1\psi(n), \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\mu(n)}\left|\frac{n}{t}\int\limits_1^\infty \psi'(nv)\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt\le A_2\psi(n). \tag{14}$$

Из (I2), используя оценку (I3), получим

$$|I_1|\le A\psi(n). \tag{15}$$

При оценке I_2 и I_3 рассмотрим отдельно случаи, когда $\mu(n)\le n$ и $\mu(n)>n$.

Пусть сначала $\mu(n)\le n$. В этом случае имеем:

$$I_2=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\left[\psi(n)\frac{n}{t^2}\left(\cos\left(\frac{t}{n}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)+\frac{\psi(n)\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}+\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos\left(vt+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\ \right]dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\left[\left(\frac{n\psi(n)}{t^2}\left(\cos\frac{t}{n}\cos\frac{\beta\pi}{2}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{n}{t^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)+\frac{\psi(n)\sin t+\frac{\beta\pi}{2}}{t}+$$

$$\left.\left.+\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right]dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{n\psi(n)}{t^2}\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\cos\frac{t}{n}-1\right)-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\psi(n)\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}+\int_1^\infty \psi(nv)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\Bigg]\,dt\Bigg| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\Bigg[\Bigg(-\frac{n\psi(n)}{t^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}\,2\sin^2\frac{t}{2n}\,-$$

$$-\frac{n\psi(n)\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t^2}+\frac{\psi(n)\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\Bigg)+$$

$$+\int_1^\infty \psi(nv)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\Bigg]dt\,. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{2n\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{t^2}\sin^2\frac{t}{2n}\,dt\right| \le$$

$$\le\frac{\psi(n)}{\pi}\,\frac{\mu(n)-\pi}{n}\;\le\;\frac{\psi(n)}{\pi} \tag{17}$$

Согласно (13)

$$\left|\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\int_1^\infty\psi(nv)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt\right|\le$$

$$\le A\psi(n) \tag{18}$$

Из (16) - (18) следует, что

$$I_2=\frac{1}{\pi}\psi(n)n\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\Bigg[-\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\cdot\sin\frac{t}{n}}{t^2}+$$

$$+\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\Bigg]dt\;+\;O(1)\psi(n)\,. \tag{19}$$

Далее, имеем

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq \mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \left[\frac{-2n\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{n\psi(n)\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin\frac{t}{n}}{t^2} - \frac{n}{t}\int\limits_1^\infty \psi'(nv)\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv \right] dt \quad (20)$$

$$2n\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left| \int\limits_{|t|\geq\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}\,dt \right| =$$

$$= 2n\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\int\limits_{\mu\leq|t|\leq n} + \int\limits_{|t|\geq n} \right) f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}\,dt =$$

$$2\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left| \int\limits_{\frac{\mu}{n}\leq|t|\leq 1} f_\beta^\psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|t|\geq 1} f_t^\psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,dt \right| \leq \psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\left(1-\frac{\mu(n)}{n}\right)+2\right) =$$

$$= O(1)\psi(n). \quad (21)$$

Из (I4) и (I9) - (2I) следует

$$I_2 + I_3 = \frac{-n\psi(n)}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{|t|\geq\pi} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\pi\leq|t|\leq\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt + O(1)\psi(n) \quad (22)$$

Таким образом, из соотношений (I5) - (22) имеем

$$|\rho_n(f,0)| =$$

$$= \frac{n\psi(n)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\left|\int\limits_{|t|\geq\pi}\left(-f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}\right)dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt\right| + O(1)\psi(n) \qquad (23)$$

Если $\psi\in\mathfrak{M}_C$, то $\mu(n)=O(n)$ и

$$\psi(n)\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt \leq$$

$$\leq \ln\mu(n) - \ln\pi = O(1)\psi(n)\,. \qquad (24)$$

Поэтому из (23) имеем

$$|\rho_n(f,0)| =$$

$$= \frac{n\psi(n)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{|t|\geq\pi} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt\right| +$$

$$+ O(1)\psi(n) = \frac{n\psi(n)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\left(\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\frac{\pi n}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{|t|\geq\frac{n\pi}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt\right)\right| + O(1)\psi(n) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f_\beta^\psi(t)\,\frac{1}{t}\,dt\right| + O(1)\psi(n) \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{\psi(n)}{\pi}\ln n + O(1)\psi(n). \tag{25}$$

Из этого соотношения при $\mu(n)=\sigma(n)$ можно получить асимптотическое равенство (5).

Пусть $\ln\mu(n) = O(\ln n)$, $\mu(n)\le n$.

В этом случае из (23) получаем

$$\rho_n(f,0) \le \frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| n\psi(n)}{\pi}\left|\int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt\right.$$

$$\left. + \psi(n)\int\limits_{\frac{\pi n}{2}\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt\right| + O(1)\psi(n) =$$

$$= \psi(n)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f_\beta^\psi(t)\,\frac{1}{t}\,dt\right| +$$

$$+ \psi(n)\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}\le|t|\le\frac{\mu(n)}{n}} f_\beta^\psi(t)\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt\right| + O(1)\psi(n). \tag{26}$$

n

С учетом результатов работы [11] отсюда следует, что

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n + \frac{4\psi(n)}{\pi^2}\ln\mu(n) + O(1)\psi(n) \tag{27}$$

вставка

Пусть $\mu(n) > n$. В этом случае из (23) имеем

$$\rho_n(f,0) = -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2} n\psi(n)}{\pi} \int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt +$$

$$+\psi(n)\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt + O(1)\psi(n) =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f_\beta^\psi(t)\frac{\sin t}{t^2}dt +$$

$$+\psi(n)\int\limits_{\pi\le|t|\le\pi n} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt +$$

$$+\int\limits_{\pi n\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi(t)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt + O(1)\psi(n). \qquad (28)$$

Аналогично тому, как это показано в [11 , с. 110], имеем

$$\psi(n)\int\limits_{\pi n\le|t|\le\mu(n)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt = O(1)\psi(n)$$

Отсюда и из (12) получаем

$$\rho_n(f,0) = -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2} n\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt$$

$$+\psi(n)\int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt + O(1)\psi(n) =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f_\beta^\psi(t)\frac{1}{t}dt +$$

$$+\ \psi(n) \int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} f_\beta^\psi(t)\frac{\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})}{t}dt + O(1)\psi(n), \qquad (29)$$

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n + \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n +$$
$$+\ O(1)\psi(n). \qquad (30)$$

Если через $f^*(t)$ обозначим функцию, (ψ,β)-производная которой почти везде совпадает с четной функцией

$$\begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{\pi}{n}, \\ 1, & \frac{\pi}{n} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi - \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \pi - \frac{\pi}{n} \le t \le \pi, \end{cases}$$

то из (29) получим

$$\left|\rho(f^*,0)\right| = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)\ln n\ +\right.$$

$$\left. +\ \psi(n)\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})}{t}dt\right| + O(1)\psi(n).$$

Отсюда, учитывая, что (см. [11, с. 100])

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})}{t}dt\right| = O(1),$$

следует, что

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) \ge \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n\ +$$
$$+\ O(1)\psi(n) \qquad (31)$$

Таким образом, из (26), (27), (30), (31) следует справедливость утверждения теоремы.

2. Приближение суммами Зигмунда на классах $C_0^{\psi} H_{\omega}$, $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$.

Через $C_0^{\psi} H_{\omega}$ будем обозначать класс функций $C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$ в случае $\sin(\beta\pi/2) = 0$.

Теорема 2. Если $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$ и $\sin \frac{\beta\pi}{2} = 0$, то при $n \longrightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi} H_{\omega}, Z_n^{\psi}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\times \\ \quad \times \ln(\min(n,\mu(n))), \quad \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(\min(\mu(n),n)) = O(1); \\ \frac{2\theta\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi^2}\psi(n)\ln(\min(n,\mu(n)))\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + \\ \quad + O(1)\psi(n), \quad \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(\min(\mu(n),n)) \longrightarrow \infty; \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi} H_{\omega}, Z_n^{\psi}) \le$$

$$\le \frac{2\theta\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi^2}\ln(\min(n,\mu(n)))\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt +$$

$$\frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(\min(\mu(n),n)) = O(1), \quad \frac{2}{3} \le \theta \le 1.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, верхняя грань $\mathcal{E}_n(C_0^{\psi} H_{\omega}, Z_n^{\psi}) = \sup|\rho_n(f,x)| = \sup\limits_{f \in C_0^{\psi} H_{\omega}} |f(x) -$

$-\mathcal{Z}_n^\psi(f,x)\Big|$ не зависит от x. Поэтому будем оценивать уклонение $\rho_n(f,x)$ в точке $x=0$. Поскольку $\hat{\tau}_n(0)=0$, то согласно лемме 3.I из [11] $\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t)dt=0,\ \beta\in R$. Следовательно, уклонение $\rho_n(f,x)$ можно представить в виде

$$\rho_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(0,\frac{t}{n}\right)\tau_n(t)\,dt \tag{32}$$

где $\varphi\left(0,\frac{t}{n}\right)=\varphi\left(\frac{t}{n}\right)=f_0^\psi\left(\frac{t}{n}\right)-f_0^\psi(0)$.

В силу (I) – (5) и (32) имеем

$$\rho_n(f,0)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\left[\psi(n)\int_0^{1/n}nv\cos vt\,dv+\right.$$

$$\left.+\psi(n)\int_{1/n}^{1}\cos vt\,dv+\int_1^{\infty}\psi(nv)\cos vt\,dv\right]dt.$$

В дальнейшем будем использовать оценки, установленные в [11, с. 106, 108, 120, 121].

$$\left|\int_0^{\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\int_1^{\infty}\psi(nv)\cos vt\,dv\,dt\right|=O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{33}$$

$$\left|\int_{\mu(n)}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{n}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dv\,dt\right|=O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{34}$$

Далее, из (7) и (32), (33) получим

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)dt\right|=O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right); \tag{35}$$

$$\left|\int_{\pi}^{\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{\pi}^{\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\left(\psi(n)\frac{\sin t}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n\psi(n)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\right)dt\right|+O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$\left|\int_{\mu(n)}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\mu(n)}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\int_{\mu(n)}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt +$$

$$+ O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (36)$$

Поскольку

$$\left|\frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt\right| = \frac{n\psi(n)}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}\,dt\right| = O(1)\frac{\psi(n)}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$\frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt + \frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{|t|\ge\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\times$$

$$\times\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt = \frac{n\psi(n)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt +$$

$$+ O(1)\frac{\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos t-1}{t^2}\,dt +$$

$$+ O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда согласно лемме 1.1 [11, с. 43] получим

$$\frac{n\psi(n)}{\pi}\left(\int_{\pi}^{\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt + \int_{\mu(n)}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt + O(1)\,\frac{\psi(n)\,\omega(\frac{1}{n})}{n} =$$

$$= \psi(n)\, f_0^{\psi}(0) + O(1)\,\psi(n)\,\omega(\tfrac{1}{n})/n. \qquad (37)$$

Таким образом, из (32) - (37) имеем

$$\rho_n(f,0) = \cos\frac{\beta\pi}{2}\,\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\varphi(\tfrac{t}{n})\,\frac{\sin t}{t}\,dt +$$

$$+ \cos\frac{\beta\pi}{2}\,\psi(n)\, f_0^{\psi}(0) + O(1)\,\psi(n)\,\omega(\tfrac{1}{n}). \qquad (38)$$

Пусть сначала $\mu(n) \le n$ и $\omega(\frac{1}{n})\ln\mu(n) = O(1)$. Тогда, используя результаты работы [11],

$$\sup_{f\in C_0^{\psi}H_\omega}\left|\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\,\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\varphi(\tfrac{t}{n})\,\frac{\sin t}{t}\,dt\right| =$$

$$= \frac{2\theta}{\pi^2}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\,\psi(n)\ln\mu(n)\int_0^{\pi/2}\omega(\tfrac{2t}{n})\sin t\,dt\right| +$$

$$+ O(1)\,\psi(n)\,\omega(\tfrac{1}{n}),$$

имеем

$$|\rho_n(f,0)| = \psi(n)\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\, f_0^{\psi}(0)\right| + O(1)\,\psi(n)\,\omega(\tfrac{1}{n})$$

Отсюда, учитывая теорему 1 работы [12], имеем

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_\omega, Z_n^{\psi}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\,\psi(n)\,\omega(\tfrac{1}{n}). \qquad (39)$$

Если $\omega(\frac{1}{n})\ln n \to \infty$ при $n \to \infty$, то учитывая результаты [10,11], из (38) следует

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_\omega, Z_n^{\psi}) =$$

$$= \frac{2\theta}{\pi^2}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \ln\mu(n)\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\psi(n). \quad (40)$$

Если же $\omega(\frac{1}{n})\ln\mu(n) = O(1)$, то из (38) получим

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_\omega, Z_n^{\psi}) \le \theta\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{2\psi(n)}{\pi^2}\ln\mu(n)\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt +$$

$$\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{2\psi(n)}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (41)$$

Пусть теперь $\mu(n) > n$. Из соотношения (38) имеем

$$\rho_n(f,0) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le n\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt +$$

$$+\cos\frac{\beta\pi}{2}\frac{\psi(n)}{\pi}\int_{n\pi\le|t|\le\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt + \cos\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)f_0^{\psi}(0) +$$

$$+ O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (42)$$

11

? В силу предложения 7.1 из [9] получим

$$\left|\int_{n\pi\le|t|\le\mu(n)}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\right| = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому отсюда и из (42) имеем

$$\rho_n(f,0) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le n\pi}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt +$$

$$+ \cos\frac{\beta\pi}{2}\psi(n)f_0^{\psi}(0) + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (43)$$

Если же $\omega(\frac{1}{n})\ln n = \bar{o}(1)$, то, используя результаты работ [11] и [14], имеем

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_{\omega}, Z_n^{\psi}) = \frac{2}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt +$$

$$+\,O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\cancel{\ln n} \qquad (44)$$

Если $\omega(\frac{1}{n})\ln n \to \infty$ при $n \to \infty$, импользуя результаты работы [13], получим

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_{\omega}, Z_n^{\psi}) = \frac{2\theta}{\pi^2}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n\cdot\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$$

$$+\,O(1)\psi(n),\ \frac{2}{3}\le\theta\le 1. \qquad (45)$$

Если же $\omega(\frac{1}{n})\ln n = O(1)$, то из (42), (43) следует

$$\mathcal{E}_n(C_0^{\psi}H_{\omega}, Z_n^{\psi}) \le \frac{2\theta}{\pi^2}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n\cdot\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$$

$$+\ \frac{2}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (46)$$

Из соотношений (40) - (46) следует справедливость утверждения теоремы.

1. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series//Duke Math.J.-1945.-12.,N 4.-P.695-704.
2. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. - 1945. - 15. - С. 1-76.
3. Nagy B. Approximation der Functionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Furierschen Reihen//Mat.es Fis.Japok.-1942.-19.-P. 123-138.
4. Теляковский С.А. О нормах тригонометрических полиномов и приближений дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. - 1961. - 62. - С. 61-97.

5. Степанец А.И. Асимптотические представления уклонений средних Зигмунда от дифференцируемых периодических функций // Методы теории приближений и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 96-116.
6. Бушев Д.Н. Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 62 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
7. Гаврилюк В.Т. О характеристике класса насыщения $C_0^{\psi} L_{\infty}$ // Укр. мат. журн. – 1986. – 38, № 4. – С. 421-427.
8. Гаврилюк В.Т. О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, № 5. – С. 569-576.
9. Ковальская И.Б. Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C. – Киев, 1988. – 28 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
10. Степанец А.И. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
11. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 287 с.
12. Рукасов В.И. Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 54 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
13. Островская О.В. Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 57-71.
14. Корнійчук М.П. Про екстремальні властивості періодичних функцій // Доп. АН УРСР. – 1962. – № 8. – С. 993-997.