ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

НЕСТЕРЕНКО
Нелли Васильевна

ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(01.01.07 – вычислительная математика)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев – 1975

Работа выполнена в Институте математики АН УССР.

Научный руководитель	–	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Э.П.Гранкин
Официальные оппоненты	–	доктор физико-математических наук Б.Н.Пшеничный, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А.А.Березовский
Ведущее предприятие	–	Киевский ордена Ленина Государственный университет им. Т.Г.Шевченко.

Автореферат разослан "____" ________________ 1975 г.

Защита состоится "____" ________________ 1975 г. на заседании Ученого Совета Института математики АН УССР, г. Киев, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН УССР.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук

А.Ю.Лучка

В последние годы все большее внимание привлекают вопросы, связанные с решением нелинейных уравнений математической физики.

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными и краевые условия (линейные или нелинейные), как известно, возникают в качестве математических моделей реальных физических процессов. Поэтому разработка методов решения нелинейных краевых задач является весьма актуальной не только в теоретическом, но и в практическом отношении.

Следует отметить, что исследование нелинейных дифференциальных уравнений значительно осложняется тем обстоятельством, что для них не применим принцип суперпозиции. Классические методы решения дифференциальных уравнений обладают рядом недостатков и не всегда пригодны для практического использования.

В связи с этим важное значение приобретают различные приближенные методы определения решения. Построение эффективных приближенных методов решения и связанные с ним вопросы существования и количества определяемых решений является одной из важных проблем вычислительной математики.

Фундаментальная важность нелинейных краевых задач для многих разделов науки и техники привела к созданию большого количества методов численного решения этих задач с возможным использованием разнообразных устройств, способных реализовать эти методы.

Из существующих в настоящее время численных методов решения краевых задач математической физики одним из наиболее эффективных является метод конечных разностей.

Существенный вклад в теорию и практику решения краевых задач математической физики этим методом внесли выдающиеся советские ученые А.А.Самарский, А.Н.Тихонов и их ученики.

Диссертационная работа посвящена применению и обоснованию методов решения одного класса нелинейных краевых задач, которые, в частности, возникают при решении обратной задачи электронной оптики. Исходя из данной в работе физической постановки, под обратной задачей электронной оптики понимается определение фокусирующего электростатического поля при заданной конфигурации широкого интенсивного пучка. В работе рассматривается обратная задача для плоско-параллельного случая.

В первой главе выводятся основные соотношения, характеризующие изучаемый процесс, и дается математическая постановка задачи. Показано, что задача определения фокусирующего поля $\varphi_p(x,y)$ для плоско-параллельных интенсивных пучков сводится к определению гармонической функции $\varphi(x,y)$ для внешности пучка G и двух функций $\varphi_б(x,y)$ и $\varphi_n(x,y)$ для его внутренности, удовлетворяющих уравнениям:

$$\Delta\varphi(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi_n(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}, \qquad (I)$$

где $\rho(x,y)$ – плотность объемного заряда.

При наличии точки изображения крайние траектории пучка, форма которых должна быть задана, образуют замкнутый контур $\mathcal{L}$, вдоль которого функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial n}\Big|_{\mathcal{L}} = \frac{2}{R}\,\dot{\varphi}(x,y)\Big|_{\mathcal{L}} \qquad (2)$$

а функция
$$\varphi_n(x,y)\big|_{\mathcal{L}} = 0 \qquad (3)$$

причем для внешности пучка $\varphi_p = \varphi$, а для внутренности $\varphi_p = \varphi - \varphi_n$.

Во втором параграфе первой главы дается вывод правой части уравнения (I). Показано, что в случае значительного пространственного заряда в электронных пучках функция $\rho(x,y)$ имеет вид:

$$\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{\varphi(x,y)}} .$$

Подставляя последнее выражение в (I), получаем для определения функции $\varphi(x,y)$ нелинейную краевую задачу:

$$\Delta\,\varphi(x,y) = -\frac{f(x,y)}{\sqrt{\varphi(x,y)}}\,, \quad (x,y)\in G \qquad (4)$$

при краевом условии (2), которая и представляет основной интерес при решении обратной задачи электронной оптики.

Во второй главе исследуются вопросы существования и единственности решения дифференциального уравнения (4) при краевом условии более общего вида:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial n} + a\,\varphi(x,y) = \mu(x,y), \quad (x,y)\in\mathcal{L}. \qquad (5)$$

Из постановки задачи вполне очевидно, что функция $\varphi(x,y)$ принадлежит классу положительных функций U , причем $0 < \varphi_{min} \le \varphi(x,y) \le \varphi_{max}$. Правая часть уравнения (4) удовлетворяет условию Липшица

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{\varphi_1}} - \frac{f(x,y)}{\sqrt{\varphi_2}}\right| < N(x,y)\,|\varphi_1 - \varphi_2|. \qquad (6)$$

С помощью второй формулы Грина нелинейная краевая задача (4)-(5) приводится к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна

$$\varphi(Q) = V(Q) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_G \mathcal{K}(P,Q) \frac{f(P)}{\sqrt{\varphi(P)}} d\tau_P, \quad Q \in G \qquad (7)$$

с положительным симметричным ядром $\mathcal{K}(P,Q)$. Доказывается существование положительного решения нелинейного интегрального уравнения (7) и одновременно существование решения нелинейной краевой задачи (4)-(5). Рассматриваются также вопросы единственности определяемого решения.

Для решения нелинейного интегрального уравнения (7) возможно применение метода последовательных приближений определения решения:

$$\varphi_n(Q) = \varphi_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_G \mathcal{K}(P,Q) \frac{f(P)}{\sqrt{\varphi_{n-1}(P)}} d\tau_P, \quad Q \in G$$

где $\varphi_0(Q) = \frac{a}{2\pi} \int\limits_S \mathcal{K}(P,Q)\, \mu(P)\, ds_P,$

сходимость которого гарантируется выполнением условия (6) и

$$\int\limits_G N^2(P)\, h^2(P)\, d\tau_P = c^2, \quad c < 1,$$

где $h^2(P) = \int\limits_G \mathcal{K}(P,Q)\, d\tau_Q$.

Третья глава посвящена применению метода конечных разностей к решению основной нелинейной краевой задачи (4)-(5) в области пучка G.

Применение метода конечных разностей к решению нелинейной задачи позволяет составить ее разностной аналог, заменяя дифференциальные операторы их приближенными разностными выражениями. В результате задаче (4)-(5) ставится в соответствие разностная краевая задача, т.е. задача определения сеточной функции $\varphi_{h\ell} \in U$ из системы нелинейных разностных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\varphi_i^j}}{h^2}\left(\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j\right) + \dfrac{\sqrt{\varphi_i^j}}{\ell^2}\left(\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}\right) = f_i^j \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_i; y_j) \in \omega_{h\ell} \\ \dfrac{\sqrt{\varphi_i^j}}{h}\left(\dfrac{\varphi_{i+1}^{+j} - \varphi_i^j}{h_1} - \dfrac{\varphi_i^j - \varphi_{i-1}^{-j}}{}\right) + \dfrac{\sqrt{\varphi_i^j}}{\ell}\left(\dfrac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\ell_1} - \dfrac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\ell_2}\right) = f_i^j \\ \dfrac{\varphi_{i+1}^j - \varphi_i^j}{k_1} \cdot \sin \varphi_{ij}^{(2)} + \dfrac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{k_2} \cdot \sin \varphi_{ij}^{(1)} + a\varphi_i^j = \mu_i^j \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_i; y_j) \in \gamma_{h\ell} \end{cases}$$

По методике, изложенной в работах А.Н.Тихонова и А.А.Самарского, проводится оценка в сеточной норме $C(\omega_{h\ell})$ погрешности аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором $L_{h\ell}$ и точность рассматриваемой разностной схемы.

Из существующих итерационных методов для решения нелинейной системы уравнений (8) предлагается метод Ньютона, который обладает квадратичной сходимостью. Вычислительная схема метода реализуется по формуле:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \Gamma^{-1}(\varphi_k)[g(\varphi_k) - f].$$

В четвертой главе рассматриваются вопросы, связанные с решением краевой задачи

$$\Delta \varphi_n(x,y) = F(x,y), \qquad (x,y) \in G \tag{9}$$

при условии (3), т.е. решении уравнения Пуассона.

Предложенный итерационный метод решения нелинейного уравнения (4) также приводит к необходимости на каждом этапе решать уравнение типа (9).

Довольно широко при решении уравнения Пуассона используют конформные отображения, с помощью которых преобразуется не только область, но и само дифференциальное уравнение.

Если потребовать, чтобы в новых переменных уравнение содержало в правой части постоянную величину

$$\frac{f^2[x(s,\varrho),\ y(s,\varrho)]}{|\omega'(z)|^2} = Const,$$

то для определения отображающей функции получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\left[\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right]^2 = \varphi(x,y). \qquad (10)$$

Следует отметить, что с уравнениями такого типа приходится встречаться в различных областях науки и техники.

Показана возможность применения к решению уравнения (10) метода конечных разностей. В результате получим разностную краевую задачу

$$\begin{aligned} P_{he}\, U_{he} &= \varphi_{he}, \qquad (x,y)\in\omega_{he}, \\ U_{he} &= \mu_{he}, \qquad (x,y)\in\gamma_{he}, \quad U_{he}\in U^*_{he} \qquad (11) \end{aligned}$$

Показано, что оценка погрешности аппроксимации оператора P разностным P_{he} имеет второй порядок относительно h и e.

Пользуясь методикой, применяемой в третьей главе для доказательства сходимости приближенного решения U_{he} к решению $U(x,y)$ для функции ε_{he} получили нелинейную краевую задачу, которая потребовала дополнительных исследований. Поэтому вопрос сходимости приближенного и точного.решения поставленной задачи связан с понятием корректности, исследованной в работах С.К.Годунова, В.С.Рябенького. Показано, что в норме сеточных функций справедлива оценка $\| U_{he} - U \|_{U^*_{he}} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малая величина.

Систему нелинейных уравнений (11) можно решать одним из методов, рассмотренных в третьей главе.

В приложении иллюстрируется применение метода конечных разностей к решению краевой задачи для прямоугольника

$$\Delta \varphi(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{\varphi(x,y)}}$$

с граничными условиями $\varphi(x,y) = (y - 0{,}25x^2 - 2)^2$

Все расчеты реализованы на ЭВМ "Мир-2" и сравнивались с результатами, полученными методом степенных рядов и методом математического моделирования.

Методом конечных разностей решена более общая краевая задача

$$\Delta \varphi(x,y) = \frac{A}{\sqrt{\varphi}} \cdot \frac{y^2}{(x^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 2ax)}$$

при граничном условии третьего рода $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{a} \cdot \varphi$ для области ограниченной круговыми траекториями. Расчеты проводились на ЭВМ "Минск - 22 М". и сравнивались с результатами, полученными методом математического моделирования.

Основные положения диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах отдела прикладной математики, отдела дифференциальных и интегральных уравнений Института математики АН УССР; на Всесоюзной конференции "Математическое моделирование на сплошных и дискретных средах" (Киев, 1972 г.) и опубликованы в следующих работах автора:

1. Нестеренко Н.В., Нестеренко Б.Б. К вопросу о погрешностях при моделировании уравнений. Сб. "Математическое моделирование потенциальных полей", К., 1972.

2. Нестеренко Н.В. Про оцінку похибки та збіжності різницевої апроксимації для одного нелінійного диференціального рівняння. ДАН УРСР, № 6, 1973.

3. Гранкин Э.П., Нестеренко Н.В. Минимаксная оценка решения уравнения Пуассона. Сб. "Моделирование задач теплофизики", изд. ИМ АН УССР, К., 1973.

4. Нестеренко Н.В. Чисельні методи розв'язування оберненої задачі електронної оптики. Зб. "Проекційно-ітеративні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь", вид. ІМ АН УРСР, К., 1974.

5. Нестеренко Н.В. Моделирование обратной задачи электронной оптики для широких плоско-параллельных пучков. Сб. "Математическое моделирование на сплошных и дискретных средах", К., 1974.