

**Василенко С. М., Українець А. І., Олішевський В. В.**

Основи тепломасообміну: Підручник / За ред. акад. УААН І. С. Гулого. — К.: НУХТ, 2004. — 250 с.: іл.

ISBN 966-612-030-5

Розглянуто теоретичні та фізичні засади процесів тепломасообміну, методи їх розрахунку. Викладено основні положення вчення про теплопровідність, конвективний теплообмін в однофазних течіях, теплообмін під час фазових перетворень, променевий теплообмін, а також основи масообміну. Значну увагу приділено методам аналізу процесів тепломасообміну, в тому числі методам математичного моделювання, основам теорії граничного шару, теорії подібності.

Для студентів і магістрантів спеціальностей «Теплоенергетика» та «Холодильні машини і установки» вищих навчальних закладів. Може бути корисний також для студентів та магістрантів інших спеціальностей, а також для наукових та інженерно-технічних працівників, які досліджують та обчислюють процеси тепломасообміну.

УДК 536.24+66.021.3

## ЗМІСТ

<b>Основні умовні позначення</b> .....	3
<b>Абетки</b> .....	6
<b>Вступ</b> .....	7
<b>1. Елементи механіки суцільного середовища</b> .....	9
<b>2. Теплопровідність</b> .....	12
2.1. Основні поняття теорії теплопровідності .....	12
2.1.1. Поле температури .....	12
2.1.2. Вектор густини теплового потоку .....	12
2.1.3. Перенесення теплоти через довільну поверхню .....	14
2.1.4. Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є .....	14
2.2. Елементи аналітичної теорії теплопровідності .....	17
2.2.1. Математичне формулювання задач теплопровідності .....	17
2.2.2. Теплопровідність за умови стаціонарного режиму .....	19
2.2.3. Теплопровідність за умов нестационарного режиму .....	34
<b>3. Конвективний теплообмін в однорідному середовищі</b> .....	41
3.1. Основні поняття .....	41
3.2. Диференціальне рівняння збереження енергії для ламінарного руху .....	42
3.3. Диференціальне рівняння збереження енергії для турбулентних течій .....	48
3.4. Умови однозначності задач конвективного теплообміну .....	51
<b>4. Елементи теорії теплової подібності</b> .....	53
4.1. Теорія подібності .....	53
4.2. Перша теорема подібності (пряма теорема подібності) .....	55
4.3. Фізичний сенс чисел подібності .....	58
4.4. Друга теорема подібності .....	59
4.5. Третя теорема подібності (зворотна теорема подібності) .....	60
4.6. Метод аналізу розмірностей (або метод л-теореми, або ж метод Бекінгема) .....	61
<b>5. Елементи теорії граничного шару</b> .....	65
5.1. Поняття граничного шару .....	65
5.2. Рівняння Прандтля для плоского граничного шару .....	66
5.3. Тепловий граничний шар .....	66
5.4. Турбулентні динамічний та тепловий граничні шари .....	68
5.5. Інтегральні рівняння граничного шару .....	69
<b>6. Вимушена конвекція за умови ламінарного режиму течії</b> .....	73
6.1. Теплообмін у разі обтікання пластини потокком нестисливої рідини .....	73

6.2. Течія в циліндричних каналах круглого перерізу .....	77
6.2.1. Гідродинаміка течії з повністю розвиненим полем швидкості .....	78
6.2.2. Теплообмін за умови повністю розвинутої течії в круглій трубі .....	79
<b>7. Вимушена конвекція за умови турбулентного руху рідини .....</b>	<b>83</b>
7.1. Вимушена конвекція в циліндричних трубах круглого перерізу ...	83
7.1.1. Аналогія Рейнольдса .....	83
7.1.2. Аналогія Прандтля .....	85
7.1.3. Аналогія Кармана — Белтера — Мартініеллі .....	87
7.1.4. Врахування залежності фізичних властивостей рідини від температури .....	92
7.1.5. Емпіричні залежності для розрахунку теплообміну в гладких циліндричних трубах .....	93
7.1.6. Вплив шорсткості поверхні .....	94
7.2. Теплообмін у каналах некруглого перерізу .....	97
7.2.1. Теплообмін у кільцевих каналах .....	97
7.2.2. Теплообмін за умови поздовжнього обтікання пучків труб .....	98
7.3. Теплообмін у зігнутих трубах .....	99
7.4. Теплообмін під час обтікання тіл .....	100
7.4.1. Поздовжнє обтікання ізотермічної пластини потоком з постійною швидкістю .....	100
7.4.2. Загальне кореляційне співвідношення для середніх коефіцієнтів тепловіддачі під час поздовжнього обтікання плоскої пластини .....	104
7.4.3. Обтікання поодиноких тіл різної форми .....	105
7.4.4. Поперечне обтікання поодиноких рядів труб .....	106
7.4.5. Обтікання пучків труб .....	106
<b>8. Теплообмін під час вільного руху .....</b>	<b>108</b>
8.1. Вільна ламінарна конвекція на поверхні вертикальної пластини .....	108
8.2. Вільна турбулентна конвекція на поверхні вертикальної пластини .....	112
8.3. Розрахункові залежності для теплообміну під час вільної конвекції у великому об'ємі .....	114
8.3.1. Ламінарна конвекція на вертикальній поверхні .....	114
8.3.2. Конвекція на вертикальних поверхнях у перехідному та турбулентному режимах .....	115
8.3.3. Конвекція на горизонтальних поверхнях .....	115
8.4. Вільна конвекція в обмеженому об'ємі (у порожнинах) .....	116
8.4.1. Течія між плоскими паралельними поверхнями .....	116
8.4.2. Розрахункові залежності для вільної конвекції в обмеженому об'ємі .....	118
8.5. Змішана конвекція .....	119
8.5.1. Течія в ламінарному граничному шарі .....	120
8.5.2. Змішана конвекція у вертикальних каналах .....	121
8.5.3. Змішана конвекція в горизонтальних трубах .....	122
<b>9. Теплообмін під час конденсації .....</b>	<b>123</b>
9.1. Режими конденсації .....	123
9.2. Термічний опір тепловіддачі під час конденсації .....	124
9.3. Термічний опір фазового переходу (міжфазний термічний опір) .....	124

9.4. Плівкова конденсація пари .....	125
9.4.1. Плівкова конденсація нерухомої пари на вертикальній поверхні під час ламінарного руху рідини .....	125
9.4.2. Плівкова конденсація нерухомої пари на поверхні горизонтального циліндра під час ламінарного руху рідини .....	129
9.4.3. Ламінарна плівкова конденсація нерухомої пари на поверхні пучка горизонтальних труб .....	130
9.4.4. Плівкова конденсація нерухомої пари на вертикальній поверхні під час турбулентного режиму течії рідини .....	131
9.4.5. Плівкова конденсація рухомої пари .....	135
9.5. Крапельна конденсація пари .....	140
10. Теплообмін під час пароутворення .....	143
10.1. Основні положення .....	143
10.2. Механізми пароутворення .....	144
10.2.1. Випаровування .....	145
10.2.2. Гомогенне зародкоутворення .....	145
10.2.3. Гетерогенне зародкоутворення .....	145
10.2.4. Закономірності зародкоутворення, зростання, відриву та руху парових бульбашок .....	146
10.3. Кипіння за умов вільної конвекції (у великому об'ємі) .....	150
10.3.1. Крива кипіння .....	150
10.3.2. Бульбашкове кипіння .....	152
10.3.3. Перша критична густина теплового потоку (криза тепловіддачі під час кипіння) .....	158
10.3.4. Перехідний режим кипіння .....	160
10.3.5. Друга критична густина теплового потоку .....	160
10.3.6. Плівковий режим кипіння .....	161
10.4. Пароутворення під час вимушеної конвекції .....	163
Пароутворення у вертикальних трубах .....	163
11. Променевий теплообмін .....	170
11.1. Основні положення .....	170
11.2. Радіаційні властивості поверхонь .....	172
11.3. Інтегральні радіаційні властивості .....	172
11.4. Закони теплового випромінювання .....	173
11.4.1. Закон Планка .....	174
11.4.2. Закон Віна .....	175
11.4.3. Закон Стефана — Больцмана .....	176
11.4.4. Закон Кірхгофа .....	177
11.4.5. Закони Ламберта .....	181
11.5. Напрявлені радіаційні властивості .....	181
11.6. Кутовий коефіцієнт випромінювання .....	186
11.7. Теплообмін випромінюванням між тілами, розділеними прозорим (діатермічним) середовищем .....	188
11.7.1. Теплообмін між плоскими паралельними поверхнями .....	188
11.7.2. Теплообмін випромінюванням між двома поверхнями, довільно розміщеними в просторі .....	189
11.7.3. Теплообмін за наявності екранів .....	191
11.8. Променевий теплообмін у поглинальних та випромінювальних середовищах .....	192
11.8.1. Рівняння перенесення енергії .....	193
11.8.2. Радіаційні властивості газів .....	196

11.8.3. Променевий теплообмін між газом та оболонкою .....	197
11.9. Складний теплообмін .....	199
11.10. Безрозмірні числа подібності променевого теплообміну .....	201
<b>12. Основи масообміну .....</b>	<b>202</b>
12.1. Характеристики багатоконпонентних середовищ .....	203
12.2. Дифузія .....	207
12.2.1. Коефіцієнти дифузії у газах .....	210
12.2.2. Коефіцієнт дифузії в рідинах .....	211
12.3. Диференціальні рівняння збереження бінарних систем (диференціальні рівняння масообміну) .....	213
12.4. Масообмін у разі турбулентного режиму течії .....	217
12.5. Масообмін поблизу границі поділу фаз .....	218
12.5.1. Модель еквівалентної плівки .....	218
12.5.2. Коефіцієнти масовіддачі .....	223
12.5.3. Модель граничного шару .....	224
12.5.4. Аналогія між масовіддачею, тепловіддачею та перенесенням кількості руху .....	227
12.5.5. Аналогія Чілтона — Колборна .....	229
12.5.6. Коефіцієнти масопередачі .....	230
12.6. Застосування теорії подібності до аналізу дослідних даних за кінетикою масоперенесення .....	233
12.7. Узагальнення експериментальних даних з кінетики масоперенесення .....	233
12.7.1. Плоскі поверхні .....	234
12.7.2. Плівки рідини .....	234
12.8. Масообмін в апаратах з розвинутою міжфазною поверхнею .....	237
<b>Література .....</b>	<b>243</b>

### 12.2.1. Коефіцієнти дифузії у газах

Дифузія у бінарних газових системах є предметом теоретичних та експериментальних досліджень вже понад сто років. Наведемо деякі рекомендації для визначення коефіцієнтів взаємної дифузії в таких системах за низького тиску.

Сучасні дослідження в цій області базуються на математичній теорії неоднорідних газів, що розширює границі застосування класичної кінетичної теорії введенням припущення про взаємодію молекул газів. Молекули відштовхуються одна від одної, коли вони розміщені в безпосередній близькості, та притягуються, перебуваючи на певній відстані одна від одної. Міжмолекулярні потенціали взаємодії виражаються емпірично довільною з числа так званих потенціальних функцій, найпоширенішою з яких є потенціал Леннарда — Джонса. Для розрахунку коефіцієнтів дифузії може бути запропоноване теоретичне рівняння Дж. Гіршфелдера та ін., в основу розроблення якого і покладено цей потенціал:

$$D_{AB} = \frac{1,833 \cdot 10^{-2} T^{3/2} (1/M_A + 1/M_B)^{1/2}}{p \sigma_{AB}^2 \Omega_D}, \quad (796)$$

де  $T$  — температура суміші, К;  $M_A, M_B$  — молекулярні маси компонентів кг/кмоль;  $p$  — тиск, Па;  $\Omega_D$  — інтеграл зіткнень (табл. 8),  $\Omega_D = f(kT/\epsilon_{AB})$ ;  $\epsilon_{AB}, \sigma_{AB}$  — константи взаємодії Леннарда — Джонса для бінарної системи;  $k$  — постійна Больцмана.

Постійні величини  $\epsilon_{AB}$  та  $\sigma_{AB}$  отримують з відповідних значень для чистих речовин з допомогою правил комбінування

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_{AB}}{k} &= \left( \frac{\epsilon_A}{k} \frac{\epsilon_B}{k} \right)^{1/2} ; \\ \sigma_{AB} &= \frac{1}{2} (\sigma_A + \sigma_B). \end{aligned} \right\} \quad (797)$$

Таблиця 8. Значення інтеграла зіткнень

$kT/\epsilon_{AB}$	$\Omega_D$	$kT/\epsilon_{AB}$	$\Omega_D$	$kT/\epsilon_{AB}$	$\Omega_D$
0,30	2,662	1,65	1,153	4,0	0,8836
0,40	2,318	1,75	1,128	4,2	0,8740
0,50	2,066	1,85	1,105	4,4	0,8652
0,60	1,877	1,95	1,084	4,6	0,8568
0,70	1,729	2,1	1,057	4,8	0,8492
0,80	1,612	2,3	1,026	5,0	0,8422
0,90	1,517	2,5	0,9996	7	0,7896
1,00	1,439	2,7	0,9770	9	0,7556
1,10	1,375	2,9	0,9576	20	0,6640
1,20	1,320	3,1	0,9406	40	0,5960
1,30	1,273	3,3	0,9256	60	0,5596
1,40	1,233	3,5	0,9120	80	0,5352
1,50	1,198	3,7	0,8998	100	0,5130

Значення величин  $\varepsilon/k$  та  $\sigma$  для деяких чистих речовин наведені в табл. 9, причому їх слід застосовувати в розрахунках одночасно.

На жаль, нині не існує ні адекватної теорії, ні достовірної емпіричної кореляції для передбачення значень коефіцієнта дифузії в газах за високих тисків.

Таблиця 9. Параметри потенціалу Леннарда — Джонса

Молекула	Назва	$\sigma \cdot 10^{10}$ , м	$\varepsilon/k$ , К
Ar	Аргон	3,542	93,3
He	Гелій	2,551	10,22
Ne	Неон	2,820	32,8
Повітря	Повітря	3,711	78,6
CH <sub>3</sub> OH	Метанол	3,626	481,8
CH <sub>4</sub>	Метан	3,758	148,6
CO	Оксид вуглецю	3,690	91,7
CO <sub>2</sub>	Діоксид вуглецю	3,941	195,2
CS <sub>2</sub>	Сірковуглець	4,483	467,0
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	Ацетилен	4,033	231,8
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	Етанол	4,530	362,8
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	Пропан	5,118	237,1
CH <sub>3</sub> COCH <sub>3</sub>	Ацетон	4,600	560,2
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	Бензол	5,349	412,3
Cl <sub>2</sub>	Хлор	4,217	316,0
F <sub>2</sub>	Фтор	3,357	112,6
HCl	Хлористий водень	3,339	344,7
HF	Фтористий водень	3,148	330,0
HJ	Йодистий водень	4,211	288,7
H <sub>2</sub>	Водень	2,827	59,7
H <sub>2</sub> O	Вода	2,641	809,1
H <sub>2</sub> S	Сірководень	3,623	301,1
Hg	Ртуть	2,969	750,0
I	Йод	5,160	474,2
NH <sub>3</sub>	Аміак	2,900	558,3
N <sub>2</sub>	Азот	3,798	71,4
NO	Оксид азоту	3,492	116,7
N <sub>2</sub> O	Оксид азоту (I)	3,828	232,4
O <sub>2</sub>	Кисень	3,467	106,7
SO <sub>2</sub>	Сірчаний ангідрид	4,112	335,4

### 12.2.2. Коефіцієнт дифузії в рідинах

Величина коефіцієнта дифузії для бінарних рідких систем значно менша, ніж для газів за атмосферного тиску (як правило, вона змінюється від значень  $5 \cdot 10^{-5}$  до  $2 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с у випадку нев'язких рідин при  $\sim 300$  К, а для бінарних сумішей газів становить  $1 \cdot 10^{-5}$ — $10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с за атмосферного тиску). Причому це не обов'язково означає зниження інтенсивності дифузії в рідинах, оскільки густини та градієнти концентрації в них значно вищі, ніж в

газах. На протилежність поведінці в газах, коефіцієнт дифузії в рідинах часто суттєво змінюється з концентрацією. Однак сучасний рівень розвитку молекулярної теорії рідкого стану не дає достатньої бази для визначення коефіцієнтів дифузії з такою достовірністю, як для газів за низьких тисків.

Водночас слід відзначити існування двох наближених теорій: **гідродинамічної теорії** та **кінетичної теорії Ейрінга**, які виявились корисними для оцінки порядку розрахункових значень коефіцієнтів дифузії. Гідродинамічна теорія базується на моделі, згідно з якою частка розчиненої речовини розглядається як сфера, що рухається через суцільне середовище розчинника. Результуюче рівняння, яке носить назву рівняння **Стокса — Ейнштейна**, має такий вигляд:

$$D_{AB} = kT / (6\pi r_0 \mu), \quad (798)$$

де  $r_0$  — радіус сферичної частки.

У подальшому С. Уїлкі та П. Ченг модернізували це рівняння до вигляду, зручного для розрахунків:

$$D_{AB}^0 = 7,4 \cdot 10^{-15} (\psi M_B)^{1/2} T / [\mu_B (V_A \cdot 10^3)^{0,6}], \quad (799)$$

де  $D_{AB}^0$  — коефіцієнт взаємної дифузії розчиненої речовини  $A$  у разі дуже низьких її концентрацій у розчині ( $c_A \rightarrow 0$ ),  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\psi$  — параметр асоціації розчинника  $B$ ;  $M_B$  — молекулярна маса  $B$ ,  $\text{кг}/\text{кмоль}$ ;  $T$  — температура,  $\text{К}$ ;  $\mu_B$  — динамічна в'язкість  $B$ ,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ ;  $V_A$  — мольний об'єм розчиненої речовини при нормальній температурі кипіння,  $\text{м}^3/\text{кмоль}$ .

Значення мольного об'єму отримують підсумуванням величин об'ємів атомів та груп, що входять до складу молекули  $A$  (табл. 10). Рекомендовані значення параметра асоціації становлять: для води — 2,6; метанолу — 1,9; етанолу — 1,5; бензолу, ефіру, гептану — 1,0; для неасоційованих розчинників — 1,0.

**Таблиця 10.** Адитивні прирости об'ємів для розрахунку мольних об'ємів розчинених речовин при нормальній температурі

Атом (структура)	Приріст об'єму $V \cdot 10^3$ , $\text{м}^3/\text{кмоль}$	Атом (структура)	Приріст об'єму $V \cdot 10^3$ , $\text{м}^3/\text{кмоль}$
Вуглець	14,8	Бром	27
Водень	3,7	Хлор	24,6
Кисень:		Фтор	8,7
в ефірах:		Йод	37
метилових	9,1	Сірка	25,6
етилових	9,9	Кільця:	
вищих	11,0	тричленні	-0,6
у кислотах	12,0	чотиричленні	-8,5
у сполуках з S, P, N	8,3	п'ятичленні	-11,5
Азот:		шестичленні	-15,0
двічі зв'язаний	15,6		
у амінах:			
первинних	10,5		
вторинних	12,0		

**Примітка.** Процедуру підсумування об'ємів не застосовують для простих молекул. Для них приймають наближені значення  $V \cdot 10^3$ ,  $\text{м}^3/\text{кмоль}$ :  $\text{N}_2$  — 14,3;  $\text{O}_2$  — 25,6;  $\text{N}_2$  — 31,2; повітря — 29,9;  $\text{CO}$  — 30,7;  $\text{CO}_2$  — 34,0;  $\text{SO}_2$  — 44,8;  $\text{NO}$  — 23,6;  $\text{N}_2\text{O}$  — 36,4;  $\text{NH}_3$  — 25,8;  $\text{H}_2\text{O}$  — 18,9;  $\text{H}_2\text{S}$  — 32,9;  $\text{COS}$  — 51,5;  $\text{Cl}_2$  — 48,4;  $\text{Br}_2$  — 53,2;  $\text{J}_2$  — 71,5.

К. Редді та Л. Дорайсвами пропонують відносно просту кореляцію, розрахунок за якою дає задовільні результати,

$$D_{AB}^0 = 10^{-7} K_{RS} T M_B^{1/2} / \left[ \mu_B (V_A V_B 10^{12})^{1/3} \right], \quad (800)$$

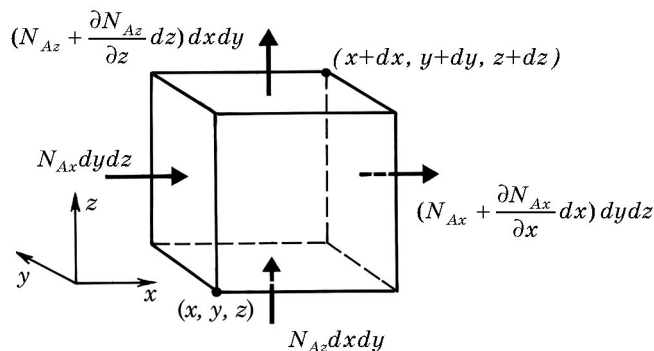
де константа  $K_{RS} = 8,5 \cdot 10^{-8}$  при  $V_A/V_B > 1,5$ ;  $K_{RS} = 10^{-7}$  при  $V_A/V_B < 1,5$ .

Розрахунок коефіцієнтів дифузії за скінченних значень концентрації розчиненої речовини можна проводити за такою наближеною методикою. Спочатку визначають коефіцієнти дифузії  $D_{AB}^0$  за концентрації розчиненої речовини близької до нуля ( $c_A \rightarrow 0$ ) за наведеними вище рекомендаціями. Потім розраховують значення коефіцієнта дифузії  $D_{AB}^1$  за концентрації розчиненої речовини, близької до одиниці ( $c_A \rightarrow 1$ ), враховуючи, що  $D_{AB}^1$  дорівнює  $D_{BA}^0$ , при цьому у формулах (799), (800) міняємо місцями індекси А та В. Коефіцієнти дифузії за проміжних концентрацій розчиненої речовини знаходять інтерполяцією між отриманими граничними значеннями.

### 12.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ БІНАРНИХ СИСТЕМ (ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ МАСООБМІНУ)

Застосуємо закон збереження маси компонента А в елементарному об'ємі  $dx dy dz$ , зафіксованому в просторі, де рухається двокомпонентна суміш (рис. 51). Всередині елементарного об'єму компонент А може утворюватись

Рис. 51. Перенесення компонента А через грані елементарного об'єму



в результаті хімічної реакції зі швидкістю  $r_A$  (кг/(м<sup>3</sup> · с)). Тоді баланс маси компонента А в середині елементарного об'єму запишеться таким чином:

Швидкість зміни маси компонента А	=	Кількість компонента А, що надходить в об'єм	-	Кількість компонента А, що залишає об'єм	+	Швидкість утворення компонента А внаслідок реакції.	(801)
--	---	---	---	---	---	--	-------

Визначимо складові балансового рівняння (801):

швидкість зміни маси компонента

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} dx dy dz; \quad (802)$$

кількість компонента  $A$ , що надходить в об'єм через грані з координатами  $x, y, z$  за одиницю часу,

$$N_{Ax} dy dz; N_{Ay} dx dz; N_{Az} dx dy; \quad (803)$$

кількість компонента  $A$ , що залишає об'єм через грані з координатами  $(x + dx), (y + dy), (z + dz)$  за одиницю часу,

$$\left( N_{Ax} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} dx \right) dy dz; \left( N_{Ay} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} dy \right) dx dz; \left( N_{Az} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} dz \right) dx dy; \quad (804)$$

швидкість утворення компонента  $A$  в результаті хімічної реакції

$$r_A dx dy dz. \quad (805)$$

Підставляючи складові (802) — (805) в рівняння (801) та ділячи його почленно на  $dx dy dz$ , отримаємо

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left( \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = r_A. \quad (806)$$

Вираз (806) являє собою **рівняння нерозривності для компонента  $A$** . Воно описує зміну масової концентрації компонента  $A$  в часі у фіксованій точці простору в результаті руху компонента  $A$  та хімічної реакції. Величини  $N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}$  — компоненти вектора густини потоку речовини  $\vec{N}_A = \rho_A \vec{v}_A$ . У векторній формі рівняння (806) запишеться так:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{N}_A = r_A. \quad (807)$$

**Рівняння нерозривності для компонента  $B$**  запишеться аналогічним чином:

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{N}_B = r_B. \quad (808)$$

Додаючи рівняння (807) та (808), отримаємо **рівняння нерозривності суміші**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) = 0. \quad (809)$$

Для отримання останнього рівняння застосували раніше наведену залежність  $(\vec{N}_A + \vec{N}_B) = \rho \vec{v}$ , а також закон збереження маси у вигляді  $r_A + r_B = 0$ .

У мольних одиницях рівняння нерозривності для компонентів  $A$  та  $B$  запишуться у вигляді

$$\frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{N}_A^* = r_A^*; \quad (810)$$

$$\frac{\partial \rho_B^*}{\partial t} + \bar{\nabla} \bar{N}_B^* = r_B^*, \quad (811)$$

де  $r_A^*, r_B^*$  — мольна швидкість утворення компонент відповідно  $A$  та  $B$ .

Рівняння нерозривності для суміші в мольних одиницях визначимо як суму рівнянь (810) та (811):

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \bar{\nabla} \bar{N}^* = r_A^* + r_B^*. \quad (812)$$

При цьому застосували залежність  $(\bar{N}_A^* + \bar{N}_B^*) = \rho^* \bar{v}^*$ , яку легко отримати зі спільного розгляду рівнянь (780), (782). Слід відзначити, що в загальному випадку  $r_A^* + r_B^* \neq 0$ , оскільки, як правило, на один моль утворення компонента  $A$  не зникає один моль компонента  $B$  та навпаки (внаслідок різниці молекулярних мас компонентів).

Для отримання рівнянь, які б описували поля концентрацій компонентів, підставимо в рівняння (807) та (810) значення  $N_A$  та  $N_A^*$  з виразів закону Фіка (794), (795). При цьому враховуватимемо, що

$$\left. \begin{aligned} c_A (\bar{N}_A + \bar{N}_B) &= c_A \rho \bar{v} = \rho_A \bar{v}; \\ x_A (\bar{N}_A^* + \bar{N}_B^*) &= x_A \rho^* \bar{v}^* = \rho_A^* \bar{v}^*. \end{aligned} \right\} \quad (813)$$

У результаті отримаємо рівняння для описання масообміну в двокомпонентній суміші під час ламінарного руху (у процесі ламінарного руху, як і у випадку теплообміну, перенесення компонента між дотичними паралельними шарами речовини здійснюється лише молекулярним механізмом, тобто дифузією):

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \bar{\nabla} (\rho_A \bar{v}) = \bar{\nabla} (\rho D_{AB} \bar{\nabla} c_A) + r_A; \quad (814)$$

$$\frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} + \bar{\nabla} (\rho_A^* \bar{v}^*) = \bar{\nabla} (\rho^* D_{AB} \bar{\nabla} x_A) + r_A^*. \quad (815)$$

З цих рівнянь видно, що впливом термодифузії, бародифузії та дифузії в полі зовнішніх сил знехтували внаслідок їх незначного внеску в процес масоперенесення.

Оскільки останні два рівняння мають загальний характер, вони дуже громіздкі. Аналізуючи конкретні задачі, приймають певні припущення, які дозволяють спростити ці рівняння, наприклад:

припущення про постійність  $\rho$  та  $D_{AB}$ . В цьому випадку рівняння (814) набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_A (\bar{\nabla} \bar{v}) + \bar{v} \bar{\nabla} \rho_A = D_{AB} \bar{\nabla}^2 \rho_A + r_A. \quad (816)$$

З рівняння нерозривності для нестисливої рідини ( $\rho = \text{const}$ )  $\bar{\nabla} \bar{v} = 0$ , тому матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \bar{v} \bar{\nabla} \rho_A &= D_{AB} \bar{\nabla}^2 \rho_A + r_A; \\ \frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} + \bar{v} \bar{\nabla} \rho_A^* &= D_{AB} \bar{\nabla}^2 \rho_A^* + r_A^*, \end{aligned} \right\} \quad (817)$$

де друге рівняння отримали діленням першого рівняння на  $M_A$ . Вирази в лівих частинах рівнянь (817) являють собою, як очевидно, субстанційні похідні  $D\rho_A/Dt$  та  $D\rho_A^*/Dt$ .

Рівняння (817), як правило, застосовують для аналізу масообміну в розбавлених рідких розчинах;

припущення про постійність  $\rho^*$  та  $D_{AB}$ . При цьому рівняння (815) запи-  
суються у вигляді

$$\frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} + \rho_A^* (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}^*) + \bar{v}^* \bar{\nabla} \rho_A^* = D_{AB} \bar{\nabla} \rho_A^* + r_A^*. \quad (818)$$

З рівняння нерозривності (812) при  $\rho^* = \text{const}$  можна отримати

$$\bar{\nabla} \bar{v}^* = (r_A^* + r_B^*) / \rho^*. \quad (819)$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (818), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} + \bar{v}^* \bar{\nabla} \rho_A^* = D_{AB} \bar{\nabla}^2 \rho_A^* + r_A^* - \frac{\rho_A^*}{\rho^*} (r_A^* + r_B^*), \quad (820)$$

яке використовують, як правило, в аналізі масоперенесення в розріджених газах при постійних температурі та тиску. Ліву частину рівняння (820) не можна розглядати як субстанціональну похідну, оскільки замість  $\bar{v}$  в ній стоїть  $\bar{v}^*$ .

Існує одна, відносно проста форма рівнянь (814), (815). Якщо хімічні реакції в суміші відсутні, величини  $\bar{v}$  та  $\bar{v}^*$  дорівнюють нулю, а густини  $\rho$  та  $\rho^*$  постійні, ці рівняння спрощуються відповідно до вигляду:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = \bar{\nabla} (D_{AB} \bar{\nabla} \rho_A); \quad (821)$$

$$\frac{\partial \rho_A^*}{\partial t} = \bar{\nabla} (D_{AB} \bar{\nabla} \rho_A^*). \quad (822)$$

Рівняння (821), (822) за аналогією з диференціальним рівнянням тепло-  
провідності Фур'є називають **диференціальними рівняннями дифузії Фіка**  
(рівняннями дифузії). Ці рівняння, як правило, застосовують для аналізу  
процесу дифузії в твердих тілах або нерухомих рідинах ( $\bar{v} = 0$ ), а також для

аналізу **еквімолярної протидифузії** в газах (еквімолярною дифузією назива-  
ють дифузію, за якої повний мольний потік компонентів щодо нерухомих  
координат дорівнює нулю  $\bar{v}^* = 0$ ).

#### 12.4. МАСООБМІН У РАЗІ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМУ ТЕЧІЇ

Аналізуючи конвективний масообмін у турбулентних потоках застосуємо методику підрозділу 3.3, причому обмежимося аналізом ізотермічних двокомпонентних систем з постійними значеннями густини суміші  $\rho$  та коефіцієнта дифузії  $D_{AB}$  за відсутності хімічних реакцій. Поточні значення густини компонента запишемо у вигляді

$$\rho_A = \bar{\rho}_A + \rho'_A. \quad (823)$$

Після підстановки в рівняння (817) значення  $\rho_A$  з виразу (823) та швидкості  $v$  з виразу (163) в результаті осереднення отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{\rho}_A}{\partial z} = D_{AB} \left( \frac{\partial^2 \bar{\rho}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\rho}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\rho}_A}{\partial z^2} \right) - \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'_x \rho'_A}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_y \rho'_A}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'_z \rho'_A}) \right]. \end{aligned} \quad (824)$$

Порівняння отриманого виразу з рівнянням (817) свідчить, що осереднене в часі рівняння відрізняється лише наявністю члена в квадратних дужках. Очевидно, що саме цей член визначає інтенсивність турбулентного перенесення маси компонента. Якщо за аналогією з турбулентним перенесенням теплоти ввести поняття **густини потоку турбулентного перенесення компонента**, такого, що має компоненти

$$\bar{j}_{A(T)x} = \overline{v'_x \rho'_A}; \quad \bar{j}_{A(T)y} = \overline{v'_y \rho'_A}; \quad \bar{j}_{A(T)z} = \overline{v'_z \rho'_A}, \quad (825)$$

то осереднене в часі рівняння перенесення маси компонента набуде такого вигляду:

$$\frac{D\bar{\rho}_A}{Dt} = D_{AB} \bar{\nabla}^2 \bar{\rho}_A - \bar{\nabla} \bar{j}_{A(T)}. \quad (826)$$

У мольних одиницях рівняння перенесення компонента запишеться так:

$$\frac{D\bar{\rho}_A^*}{Dt} = D_{AB} \bar{\nabla}^2 \bar{\rho}_A^* - \bar{\nabla} \bar{J}_{A(T)}, \quad (827)$$

де

$$\bar{J}_{A(T)x} = \overline{v'_x \rho_A^{*'}}, \quad \bar{J}_{A(T)y} = \overline{v'_y \rho_A^{*'}}, \quad \bar{J}_{A(T)z} = \overline{v'_z \rho_A^{*'}}. \quad (828)$$

У подальшому в аналізі турбулентного руху знак осереднення не наводитимемо, маючи на увазі, що у рівняння входять осереднені в часі величини.

Процес турбулентного перенесення маси компонентів за аналогією з дифузією (молекулярною дифузією) скорочено називають, як правило, **турбулентною дифузією**. При цьому слід відзначити, що єдина подібність дифузії та турбулентної дифузії полягає в тому, що в бінарних сумішах у разі турбулентного режиму руху мольний потік в багатьох (але не всіх) випадках пропорційний градієнту концентрації компонента. В цих умовах очевидною є спроба ввести поняття **коефіцієнта турбулентного перенесення маси**:

$$\varepsilon_j = -\frac{\bar{J}_{A(T)}}{\bar{V}\rho_A} = \frac{\bar{J}_{A(T)}^*}{\bar{V}\rho_A^*}. \quad (829)$$

Оскільки загальне перенесення маси є результатом і молекулярного, і турбулентного перенесення, тому звичайно приймають, що  $\varepsilon_j$  не залежить від молекулярної дифузії, а коефіцієнти дифузії та турбулентного перенесення маси є адитивними, внаслідок чого рівняння перенесення маси компонента у разі турбулентного руху (826) та (827) набувають такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\rho_A}{Dt} &= (D_{AB} + \varepsilon_j) \bar{V}^2 \rho_A; \\ \frac{D\rho_A^*}{Dt} &= (D_{AB} + \varepsilon_j) \bar{V}^2 \rho_A^*. \end{aligned} \right\} \quad (830)$$

## 12.5. МАСООБМІН ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ ПОДІЛУ ФАЗ

У більшості важливих в техніці процесів, в яких істотну роль відіграє масообмін, відбувається перенесення речовини з однієї фази в іншу, причому течія, як правило, є турбулентною. Явища в області турбулентної течії, яка безпосередньо прилягає до міжфазної границі, складно вивчати експериментально, тому в цьому випадку, як і у вивченні теплообміну, плідним є метод побудови математичної моделі процесу, що базувалась би на фундаментальних засадах. Модель замикається із застосуванням даних, які можуть бути отримані експериментально.

Розглянемо найпростіші моделі, в основу яких покладено засади, аналогічні використуваним у гідродинаміці та теплообміні.

### 12.5.1. Модель еквівалентної плівки

Сенс цієї моделі, запропонованої Н. Нернстом в 1904 р., такий. Коли рідина рухається біля міжфазної границі, її відносна швидкість на поверхні поділу фаз дорівнює нулю (умова прилипання), тому можна уявити наявність тонкої ламінарної плівки, що граничить з поверхнею, над якою рідина перебуває у турбулентному русі. З огляду на це можна сказати: існує деяка плівка рідини, перенесення маси через яку здійснюється виключно дифузійно, і товщина якої є такою, що її опір дифузії дорівнює реальному опору в процесі масообміну (саме тому ця модель носить назву **моделі еквівалентної ламінарної плівки**). Під опором, як звичайно, розуміємо відношення відповідного потенціалу (рушійної сили) до густини потоку маси.

І хоча очевидно, що модель дуже спрощує реальну картину процесу, в деяких випадках її застосування є корисним. Наведемо, як приклад, аналіз на базі цієї моделі впливу масоперенесення, що відбувається з високою швидкістю, на теплоперенесення.

Розглянемо процес теплоперенесення під час стаціонарної конденсації пари із суміші з неконденсованим газом (рис. 52). При цьому припускається:

компоненти в об'ємі парогазової суміші змішані настільки добре, що градієнти концентрацій та температури в ньому дорівнюють нулю. Відповідно вся різниця концентрацій, за рахунок якої конденсована пара дифундує до поверхні поділу фаз, а також різниця температур парогазової суміші та поверхні зосереджені в еквівалентній плівці завтовшки  $\delta$ . Крім того, згідно з постановкою задачі, неконденсований газ  $B$  не може проникнути через міжфазну поверхню. Тому його потік має компенсуватись зустрічним перенесенням таким чином, щоб взагалі не відбувалось жодного руху газу. Тобто єдиним потоком, нормальним до поверхні, є потік пари  $A$ .

Сформулюємо крайову задачу тепломасообміну в парогазовій суміші, яка б відповідала наведеній моделі, та включала б, очевидно, диференціальні рівняння перенесення маси компонента та енергії, а також відповідні граничні умови.

**Рівняння нерозривності (810)** для пари в одновимірній постановці запишеться у вигляді

$$\bar{V} \bar{N}_A^* = \frac{d\bar{N}_A^*}{dz} = 0, \quad (831)$$

де  $\bar{N}_A^* = N_A^* \bar{e}_1$ .

**Рівняння перенесення енергії суміші (144)** в одновимірній постановці запишеться у такому вигляді (дисипацією механічної енергії та роботою масових сил нехтуємо):

$$\frac{d}{dz} \left[ \rho v \left( u + \frac{v^2}{2} \right) + q + pv \right] = 0. \quad (832)$$

Як правило, в задачах такого типу задаються граничні умови на міжфазній поверхні та в об'ємі парогазової суміші (на зовнішній границі еквівалентної плівки), а саме: температура міжфазної поверхні  $T_i$  та концентрація пари в об'ємі суміші  $x_{A\text{см}}$ . Проте оскільки рівняння нерозривності та енергії є рівняннями другого порядку, то лише цих граничних умов для замикання крайової задачі недостатньо. А. Колборн та О. Хоуген запропонували визначати додаткові граничні умови за кривою конденсації: концентрацію пари біля міжфазної поверхні — за парціальним тиском насичення пари, що відповідає температурі міжфазної поверхні; температуру парогазової суміші — як температуру насичення пари за її парціального тиску в об'ємі суміші (як відомо, мольна частка компонента пов'язана з його парціальним тиском залежністю  $x_A = p_A/p$ ).

Тоді граничні умови матимуть такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} T = T_i; \quad p_{Ai} = p_{As} T_i; \quad x_A = x_{Ai} = p_{Ai}/p & \quad \text{при } z = 0; \\ x_A = x_{A\text{см}}; \quad p_{A\delta} = p x_{A\text{см}}; \quad T = T_{\text{см}} = T_s(p_{A\text{см}}) & \quad \text{при } z = \delta. \end{aligned} \right\} \quad (833)$$

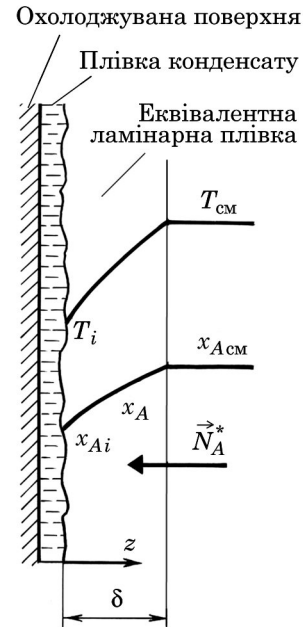


Рис. 52. Конденсація пари в присутності неконденсованого газу

Для визначення величини  $N_A^*$  застосуємо рівняння (795), розв'язуючи яке за умови  $N_B^* = 0$ , отримаємо:

$$N_A^* = -\frac{\rho^* D_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz}. \quad (834)$$

Підставляючи останній вираз в рівняння (831), отримаємо:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\rho^* D_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0. \quad (835)$$

Вважаючи парогазову суміш близькою до ідеальної, винесемо величини  $\rho^*$  та  $D_{AB}$ , значення яких при постійних тиску та температурі практично не залежать від концентрації, за знак похідної:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0. \quad (836)$$

Останнє рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку для поля відносних мольних концентрацій (мольних часток). Інтегруючи його за  $z$ , отримаємо:

$$-\ln(1-x_A) = C_1 z + C_2. \quad (837)$$

Із застосуванням граничних умов для визначення констант інтегрування знайдемо вираз для профілю концентрацій пари (в даному випадку, мольних часток):

$$\frac{1-x_A}{1-x_{Ai}} = \left( \frac{1-x_{Acm}}{1-x_{Ai}} \right)^{z/\delta}. \quad (838)$$

А оскільки, за визначенням,  $x_A + x_B = 1$ , то профіль концентрацій неконденсованого компонента описується рівнянням

$$\frac{x_B}{x_{Bi}} = \left( \frac{x_{Bcm}}{x_{Bi}} \right)^{z/\delta}. \quad (839)$$

Постійне за товщиною еквівалентної плівки значення густини потоку маси визначимо з рівняння (834):

$$N_A^* = -\frac{\rho^* D_{AB}}{1-x_{Ai}} \frac{dx_A}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\rho^* D_{AB}}{\delta} \ln \left( \frac{1-x_{Acm}}{1-x_{Ai}} \right). \quad (840)$$

Відзначимо, що величина  $N_A^*$  є від'ємною, оскільки напрямок вектора густини потоку маси компонента протилежний напрямку  $z$ . Під час випаровування з поверхні плівки в об'єм суміші пари з газом величина  $N_A^*$  буде додатною.

Вирази (838) та (840) можна об'єднати, в результаті чого рівняння профілю концентрації пари набуде такого вигляду:

$$\frac{x_A - x_{Ai}}{x_{Acm} - x_{Ai}} = \frac{1 - \exp \left[ \left( N_A^* / \rho^* D_{AB} \right) z \right]}{1 - \exp \left[ \left( N_A^* / \rho^* D_{AB} \right) \delta \right]}. \quad (841)$$

Розглянемо рівняння перенесення енергії. На відміну від чистих речовин, для сумішей додатково до потоку енергії за рахунок теплопровідності  $q_T$  слід враховувати також внесок, зумовлений взаємною дифузиею компонентів (дифузійно-термічним ефектом Дюфо нехтуємо). Тоді рівняння густини теплового потоку щодо середньомасової швидкості запишеться у такому вигляді:

$$\bar{q} = \bar{q}_T + \bar{q}_d = -\lambda \bar{\nabla} T + \sum_{i=1}^n h_i^* \bar{J}_i, \quad (842)$$

де  $h_i^*$  — парціальна мольна ентальпія  $i$ -го компонента, Дж/кмоль.

Тоді рівняння (832) запишеться таким чином (величиною  $\rho v^2/2$  нехтуємо та враховуємо, що  $u + p/\rho = h$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + (h_A^* J_A + h_B^* J_B) + \rho v u + p v \right] &= \frac{d}{dz} \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + (h_A^* J_A + h_B^* J_B) + \rho h v \right] = \\ &= \frac{d}{dz} \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + (h_A^* J_A + h_B^* J_B) + (\rho_A^* h_A^* v + \rho_B^* h_B^* v) \right] = 0. \end{aligned} \quad (843)$$

А оскільки

$$\bar{J}_i + \rho_i^* \bar{v} = \rho_i^* (\bar{v}_i - \bar{v}) + \rho_i^* \bar{v} = \rho_i^* \bar{v}_i = \bar{N}_i^*, \quad (844)$$

то рівняння (843) приводиться до вигляду (враховуємо, що  $\bar{v}_B = 0$ , відповідно  $N_B^* = 0$ )

$$\frac{d}{dz} \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + (N_A^* h_A^* + N_B^* h_B^*) \right] = \frac{d}{dz} \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + N_A^* c_{pA}^* (T - T_i) \right] = 0, \quad (845)$$

де  $c_{pA}^*$  — мольна теплоємність пари за постійного парціального тиску, Дж/(кмоль · К). Величина  $T_i$  вибрана як температура відліку ентальпії.

Інтегруючи останнє рівняння за граничних умов (833), отримуємо рівняння профілю температури в еквівалентній ламінарній плівці:

$$\frac{T - T_i}{T_{\text{см}} - T_i} = \frac{1 - \exp \left[ \left( N_A^* c_{pA}^* / \lambda \right) z \right]}{1 - \exp \left[ \left( N_A^* c_{pA}^* / \lambda \right) \delta \right]}. \quad (846)$$

Знайдемо величину густини теплового потоку теплопровідністю на міжфазній поверхні з боку парогазової суміші при наявності потоку маси

$$q = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{z=0} = \frac{-N_A^* c_{pA}^* (T_{\text{см}} - T_i)}{1 - \exp \left[ \left( N_A^* c_{pA}^* / \lambda \right) \delta \right]}. \quad (847)$$

Якщо ввести значення коефіцієнта тепловіддачі від парогазової суміші до плівки рідини за відсутності потоку маси  $\alpha_0 = \lambda/\delta$ , то рівняння (847) може бути приведене до вигляду, отриманого Дж. Аккерманом,

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{H}{1 - \exp(-H)}, \quad (848)$$

$$H = -N_A^* c_{pA}^* / \alpha_0. \quad (849)$$

Коефіцієнт  $\alpha_0$  часто визначають за звичайною методикою для однофазної течії, припускаючи, що наявність плівки конденсату на тепловіддачу в газовій фазі не впливає (цей метод, як правило, дає занижені значення коефіцієнта тепловіддачі).

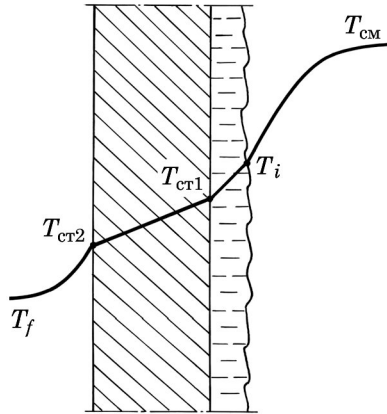


Рис. 53. Ілюстрація моделі Колборна — Хоугена

У аналізі процесу перенесення енергії у разі конденсації пари з парогазової суміші розв'язується складна спряжена задача тепломасообміну в газовій фазі та теплообміну в плівці конденсату. Тому температура міжфазної поверхні при цьому виступає як умова спряження.

А. Колборн та О. Хоуген запропонували метод розрахунку, що базується на деяких вищезриманих результатах. Цей метод проілюстровано на рис. 53. Густина теплового потоку, що проходить через стінку, складається з двох частин:

$$q = q_{см} + N_A \Delta h_{A0}, \quad (850)$$

де  $q_{см}$  — густина потоку теплоти за рахунок охолодження парогазової суміші;  $N_A \Delta h_{A0}$  — густина теплового потоку внаслідок безпосередньо конденсації пари.

З іншого боку, густина теплового потоку через стінку може бути записана як

$$q = (T_i - T_f) / (R_{пл} + R_{ст} + R_f), \quad (851)$$

де  $T_f$  — температура охолоджувальної рідини;  $R_{пл}$  — термічний опір теплоперенесення в плівці конденсату;  $R_{ст}$  — термічний опір стінки;  $R_f$  — термічний опір тепловіддачі від стінки до охолоджувальної рідини.

Абсолютну величину  $N_A$  визначимо з рівняння (840), помноживши його праву частину на молекулярну масу пари та виразивши мольні частки компонента  $A$  через парціальні тиски:

$$N_A = \frac{D_{AB} p^*}{\delta M_A} \ln \left( \frac{p - p_{Ai}}{p - p_{Aсм}} \right). \quad (852)$$

Тоді, підставляючи вирази (849), (851) та (852) в рівняння (850), отримаємо:

$$\frac{T_i - T_f}{R_{пл} + R_{ст} + R_f} = \alpha_0 (T_{см} - T_i) \frac{H}{1 - e^{-H}} + \Delta h_{A0} \frac{D_{AB} p^*}{\delta M_A} \ln \left( \frac{p - p_{Ai}}{p - p_{Aсм}} \right). \quad (853)$$

Рівняння (853) нелінійне щодо  $T_i$ , причому основна нелінійність виникає внаслідок залежності  $p_{Ai}$  від  $T_i$ .

Для розв'язання рівняння (853) потрібна інформація про термічні опори  $R_{пл}$ ,  $R_f$  та величину  $D_{AB}/\delta$ , яка може бути визначена за наведеними нижче рекомендаціями.

### 12.5.2. Коефіцієнти масовіддачі

У аналізі процесів міжфазного масообміну зручно користуватися поняттями коефіцієнтів масовіддачі (**масовіддача** — конвективний масообмін між рухомим середовищем та поверхнею поділу з іншим середовищем: твердим тілом, рідиною чи газом). Коефіцієнт масовіддачі визначається як відношення (коефіцієнт пропорційності) потоку маси компонента до рушійної сили (різниці потенціалів). Як потенціал (див. п. 12.2), слід було б застосовувати хімічний потенціал компонента, однак прийнято використовувати його концентрацію. Такий вибір пояснюється такими причинами: майже у всіх випадках потік компонента прямує до нуля у разі вирівнювання концентрацій; за низьких тисків цей потенціал прийнятний як для описання дифузії, так і турбулентного перенесення маси.

Коефіцієнт масовіддачі може бути виражений різними способами, чотири найпоширеніші з яких наведені нижче (компонент переноситься з об'єму суміші до міжфазної поверхні):

$$\left. \begin{aligned} N_A &= \beta(\rho_{Acp} - \rho_{Ai}) = \beta_c(c_{Acp} - c_{Ai}) = \beta_p(p_{Acp} - p_{Ai}); \\ N_A^* &= \beta(\rho_{Acp}^* - \rho_{Ai}^*) = \beta_x(x_{Acp} - x_{Ai}) = \beta_M \frac{x_{Acp} - x_{Ai}}{x_{BM}} = \beta_p^*(p_{Acp} - p_{Ai}), \end{aligned} \right\} \quad (854)$$

де індекси “i” та “cp” свідчать, що величини визначаються біля міжфазної поверхні та в об'ємі суміші відповідно; “M” — що величина є середньоарифмічною між ними:

$$x_{BM} = \frac{x_{Bi} - x_{Bcp}}{\ln(x_{Bi}/x_{Bcp})} = \frac{(1 - x_{Ai}) - (1 - x_{Acp})}{\ln[(1 - x_{Ai})/(1 - x_{Acp})]}.$$

Коефіцієнти масовіддачі у рівняннях (854) виражаються, відповідно:  $\beta = \text{м/с}$ ;  $\beta_c = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\beta_p = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Па}) = \text{с/м}$ ;  $\beta_M, \beta_x = \text{кмоль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\beta_p^* = \text{кмоль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Па})$

Для бінарної газової системи, де дифундує лише один компонент, як у попередньо розглянутому прикладі, рівняння масовіддачі в мольних потоках запишуться таким чином (для їх отримання застосовується модель еквівалентної плівки):

$$\begin{aligned} N_A^* &= \frac{\beta}{RT}(p_{Acp} - p_{Ai}) = \frac{\beta p}{RT}(x_{Acp} - x_{Ai}) = \frac{\beta_x}{p}(p_{Acp} - p_{Ai}) = \\ &= \beta_M \ln \frac{1 - x_{Ai}}{1 - x_{Acp}} = \beta_M \ln \frac{p - p_{Ai}}{p - p_{Acp}}. \end{aligned} \quad (855)$$

де  $R$  — універсальна газова стала.

Очевидно, що в цьому випадку наведені коефіцієнти масовіддачі пов'язані між собою такими залежностями:

$$\beta_M = \frac{\beta p x_{BM}}{RT} = \beta_x x_{BM} = \beta_p^* p x_{BM}. \quad (856)$$

Крім того, порівнюючи рівняння (840) та (855), отримаємо

$$\beta_M = \rho^* D_{AB} / \delta = \frac{D_{AB} p}{RT \delta}, \quad (857)$$

тобто товщина еквівалентної плівки може бути розрахована через коефіцієнти масовіддачі, методи визначення яких будуть наведені нижче.

Оскільки біля міжфазної поверхні внаслідок пригнічення турбулентності наявне практично лише молекулярне перенесення, то можна записати:

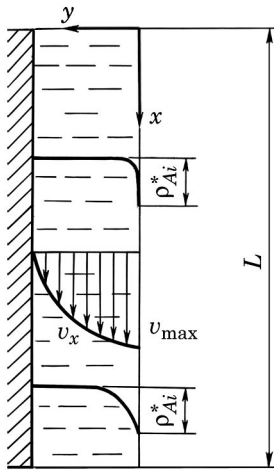
$$N_A = \beta(\rho_{Acp} - \rho_{Ai}) = -D_{AB} \left. \frac{d\rho_A}{dy} \right|_{y=0}. \quad (858)$$

Застосування методів теорії подібності дає змогу отримати з цього рівняння безрозмірнісну форму коефіцієнта масовіддачі  $Nu_D = \beta l / D_{AB}$ , де  $l$  — характерний розмір. Величину  $Nu_D$  називають **дифузійним числом Нуссельта** (числом Нуссельта другого роду). Інше його позначення — **Sh (число Шервуда)**. Безрозмірнісне число Шервуда характеризує подібність процесу масовіддачі і є мірою співвідношення потоку компонента за рахунок конвекції до потоку за рахунок дифузії.

### 12.5.3. Модель граничного шару

Відповідно до динамічного та теплового граничних шарів введемо поняття **дифузійного граничного шару** — граничного шару, що характеризується значним поперечним градієнтом концентрації даного компонента в суміші, під дією якого (градієнта) здійснюється поперечне перенесення цього компонента.

Рівняння дифузійного турбулентного граничного шару отримують подібно до отримання рівняння теплового граничного шару (підрозділ 5.4), тому наведемо їх без виведення:



$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_A}{\partial y} &= (D_{AB} + \varepsilon_j) \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2}; \\ v_x \frac{\partial \rho_A^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_A^*}{\partial y} &= (D_{AB} + \varepsilon_j) \frac{\partial^2 \rho_A^*}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (859)$$

Очевидно, що коли коефіцієнти турбулентного перенесення маси дорівнюють нулю, рівняння (859) автоматично стає рівнянням ламінарного граничного шару.

Розглянемо як приклад застосування моделі граничного шару абсорбцію поганорозчинного газу  $A$  ламінарною плівкою рідини  $B$ , що вільно стікає по вертикальній поверхні. Введемо ряд припущень, а саме: швидкість дифузії відносно низька, тому вона не впливає на поле швидкості; оскільки речовина  $A$  слабкорозчинна в речовині  $B$ , то в'язкість рідини не змінюється. Схема течії наведена на рис. 54.

Запишемо диференціальні рівняння, що описують процес. Задача перенесення кількості руху в ламінарній плівці аналізувалась у підрозділі 9.4.1, причому профіль швидкості може бути записаний таким чином:

$$v_x(y) = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (860)$$

Рівняння перенесення компонента А в плівці запишемо, враховуючи, що  $v_y = 0$ ,

$$v_x \frac{\partial \rho_A^*}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 \rho_A^*}{\partial y^2}. \quad (861)$$

Комбінуючи рівняння (860), (861), отримаємо диференціальне рівняння перенесення маси компонента А у разі вимушеної конвекції в ламінарній плівці:

$$v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial \rho_A^*}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 \rho_A^*}{\partial y^2}. \quad (862)$$

Граничні умови сформуємо, виходячи з таких міркувань: плівка рідини під час надходження в об'єм газу складається з чистого компонента В; опір масоперенесенню в газовій фазі малий, тому ним нехтуємо, і концентрація газу постійна по довжині; концентрація компонента А на поверхні поділу газ — рідина приймається постійною і такою, що дорівнює  $\rho_{Ai}^*$ , причому вона відповідає умові досягнення рівноваги з газом; тверда стінка є непроникною для компонента А, тобто потік компонента А при  $y = \delta$  дорівнює нулю. В результаті отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \rho_A^* &= 0 & \text{при } x &= 0; \\ \rho_A^* &= \rho_{Ai}^* & \text{при } y &= 0; \\ \partial \rho_A^* / \partial y &= 0 & \text{при } y &= \delta. \end{aligned} \right\} \quad (863)$$

Ця задача була розв'язана Р. Пігфордом в повному об'ємі, ми ж розглянемо граничний випадок так званого **малого часу контакту** (для малих значень  $L/v_{\max}$ ).

Оскільки за умовою масоперенесення здійснюється повільно, то товщина проникнення компонента А в плівку незначна порівняно з товщиною плівки. Тому можна вважати, що позовжня швидкість компонента А дорівнює  $v_{\max}$ . Крім того, з цієї умови випливає, що компонент А практично не встигає досягнути твердої стінки. Тобто, якби плівка безконечно великої товщини рухалась зі швидкістю  $v_{\max}$ , компонент А, як кажуть, **не відчув** би цієї різниці. У зв'язку зі сказаним можна переписати рівняння перенесення компонента А та граничні умови таким чином:

$$v_{\max} \frac{\partial \rho_A^*}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 \rho_A^*}{\partial y^2}; \quad (864)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_A^* &= 0 & \text{при } x &= 0; \\ \rho_A^* &= \rho_{Ai}^* & \text{при } y &= 0; \\ \rho_A^* &= 0 & \text{при } y &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (865)$$

Будемо шукати розв'язання у вигляді  $\rho_A^* / \rho_{Ai}^* = f(\eta)$ , де  $\eta$  — безрозмірнісна змінна, задана у вигляді  $\eta = y / \sqrt{4D_{AB}x / v_{\max}}$ . В новій змінній матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho_A^* / \rho_{Ai}^*)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f / \partial \eta}{\partial x / \partial \eta} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} f'; \\ \frac{\partial^2(\rho_A^* / \rho_{Ai}^*)}{\partial y^2} &= \frac{\eta^2}{y^2} f'', \end{aligned} \right\} \quad (866)$$

де верхній індекс “штрих” позначає операцію диференціювання за  $\eta$ .

Тоді рівняння (864) та граничні умови (865) набудуть такого вигляду:

$$f'' + 2\eta f' = 0; \quad (867)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \\ f &= 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (868)$$

Перше диференціювання рівняння (867) дає вираз

$$f' = C_1 e^{-\eta^2}. \quad (869)$$

У результаті повторного диференціювання знаходимо

$$f = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + C_2. \quad (870)$$

Використання граничних умов дає змогу отримати

$$f = 1 - \frac{\int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (871)$$

Відношення інтегралів у рівнянні (871), як відомо, має назву **інтеграла ймовірності** та позначається через  $\text{erf} \eta$ . Ця функція добре відома в математичній фізиці, а її значення є практично в усіх довідниках. Відповідно профіль концентрації має такий вигляд:

$$\frac{\rho_A^*}{\rho_{Ai}^*} = 1 - \text{erf} \frac{y}{\sqrt{4D_{AB}x / v_{\max}}}. \quad (872)$$

Інтеграл ймовірності є монотонно зростаючою функцією. Він змінюється в діапазоні від 0 до 1 та досягає значення 0,99 приблизно при  $\eta = 2$ .

Величина  $\text{erfc} \eta = (1 - \text{erf} \eta)$  носить назву **додаткового інтеграла ймовірності**, з допомогою якого вираз (872) перепишеться у вигляді

$$\frac{\rho_A^*}{\rho_{Ai}^*} = \text{erfc} \frac{y}{\sqrt{4D_{AB}x / v_{\max}}}. \quad (873)$$

У цьому разі, коли профілі концентрацій відомі, можна знайти швидкість масовіддачі. Локальний мольний потік на міжфазній поверхні  $y = 0$  в точці, розміщеній вниз по течії на відстані  $x$  від початку відліку,

$$N_{AX}^* = -D_{AB} \left. \frac{\partial \rho_A^*}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho_{Ai}^* \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi x}}. \quad (874)$$

Загальна кількість молей компонента  $A$ , що переносяться в одиницю часу з газу в рідину на один метр ширини плівки,

$$W_A^* = \int_0^L N_{AX}^* dx = \rho_{Ai}^* \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi}} \int_0^L x^{-1/2} dx = 2L \rho_{Ai}^* \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi L}} = 2L \rho_{Ai}^* \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t_{\text{конт}}}}. \quad (875)$$

де  $t_{\text{конт}}$  — так званий **час контакту** елемента поверхні з газом на відстані  $L$  вниз по потоку від початку відліку,  $t_{\text{конт}} = L/v_{\max}$ .

#### 12.5.4. Аналогія між масовіддачею, тепловіддачею та перенесенням кількості руху

Подібність феноменологічних законів, що описують перенесення кількості руху (закон в'язкості Ньютона), теплоти (закон Фур'є) та маси (закон Фіка) наводить на думку про близьку подібність самих процесів перенесення. Такий самий висновок роблять, як правило, із зовнішньої подібності диференціальних рівнянь руху, конвективного перенесення енергії та маси. А оскільки в результаті проведення великої кількості досліджень в механіці рідини накопичено значну інформацію щодо перенесення кількості руху в турбулентних потоках, то відповідно неодноразово здійснювались спроби розширити аналогію між перенесенням кількості руху та теплоти на перенесення маси в турбулентних течіях. Проте це поширення аналогії зустрічається зі значними складнощами, які не вдається подолати на ґрунтовній теоретичній основі. По-перше, температура та концентрація є скалярними величинами, а момент кількості руху — вектор. По-друге, в газах, як було показано вище, швидкості дифузії відносять до площини нульового сумарного мольного перенесення.

Також слід відзначити, що математичну подібність між тепловими та дифузійними явищами можна обґрунтувати лише в рамках таких припущень: фізичні властивості системи постійні; швидкість масообміну відносно низька; у фазах відсутні хімічні реакції; внесок в'язкої дисипації в баланс енергії незначний; у системі відсутній променевий теплообмін; ефектами термодифузії, бародифузії та дифузії в полі зовнішніх сил можна знехтувати. Тому під час аналізу доводиться робити значні припущення, які не завжди виправдовуються.

Загальний підхід до проблеми визначення зв'язку між швидкостями перенесення кількості руху та маси компонента зводиться, як правило, до того, щоб визначити  $\varepsilon_\sigma$  з кореляційних співвідношень для профілів швидкості, прийняти або визначити співвідношення між  $\varepsilon_\sigma$  та  $\varepsilon_j$ , як це було зроблено для випадку теплообміну (див. підрозділ 7.1), та проінтегрувати рівняння перенесення маси компонента. Проілюструємо таку методику для випадку повністю розвинутого турбулентного руху в гладкій циліндричній трубі.

Перенесення маси компонента відбувається від стінки труби в потік рідини. Щоб аналіз був простішим, приймемо спрощувальні припущення, в тому числі про низьке значення потоку речовини. Членом рівняння перенесення маси, що враховує перенесення конвекцією, нехтуємо і припускаємо, що молекулярне та турбулентне перенесення здійснюються паралельно. Рівняння перенесення компонента запишемо у такому вигляді:

$$N_A^* = -(D_{AB} + \varepsilon_j) \frac{d\rho_A^*}{dy}. \quad (876)$$

Функціональний зв'язок між значеннями  $\varepsilon_j$  та  $y$  визначимо з універсального розподілу швидкості в гладких трубах. Враховуючи, що  $\tau_{\text{ст}} = \xi / (8\rho v_{\text{ср}}^2)$ , універсальні швидкість та координату запишемо так:

$$v_x^+ = v_x \sqrt{\frac{\rho}{\tau_{\text{ст}}}} = \frac{v_x}{v_{\text{ср}}} \sqrt{\frac{8}{\xi}}; \quad y^+ = \frac{y}{v} \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}} = \frac{(r_0 - r)v_{\text{ср}}}{v} \sqrt{\frac{\xi}{8}}. \quad (877)$$

Розіб'ємо всю область течії ( $0 < y^+ < r_0^+$ ) на дві ділянки: першу ( $0 < y^+ < y_1^+$ ), в якій молекулярне та турбулентне перенесення співмірні; другу ( $y_1^+ < y^+$ ), в якій  $\varepsilon_\sigma \gg \nu$ . Тоді, інтегруючи рівняння (358), отримаємо поточне значення поздовжньої швидкості в другій області:

$$v_x^+ = \int_0^{y_1^+} \frac{dy^+}{\varepsilon_\sigma / \nu + 1} + \int_{y_1^+}^{y^+} \frac{dy^+}{\varepsilon_\sigma / \nu}. \quad (878)$$

Оскільки принципово найважливішою є область течії, яка безпосередньо прилягає до стінки, припускаємо, що величина  $y/r_0 \approx 0$ , а потік компонента  $N_A^*$  по перерізу пристінного шару постійний. Іншими словами, величину  $N_A^*$  можна використати для визначення мольного потоку компонента на стінці.

Інтегруючи рівняння (876) в припущенні, що значення  $\varepsilon_j$  стає значно більшим  $D_{AB}$  при тому ж значенні  $y_1^+$ , отримуємо:

$$\frac{\rho_{\text{Аст}}^* - \rho_A^*}{N_A^*} \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}} = \int_0^{y_1^+} \frac{dy^+}{\varepsilon_j / \nu + D_{AB} / \nu} + \int_{y_1^+}^{y^+} \frac{dy^+}{\varepsilon_j / \nu}. \quad (879)$$

Вважаючи, що в ядрі турбулентного потоку профілі швидкості та концентрації плоскі, тобто  $v_x = v_{\text{ср}}$ ,  $\rho_A^* = \rho_{\text{Аср}}^*$  (де  $\rho_{\text{Аср}}^*$  — середня в потоці мольна густина), та припускаючи  $\varepsilon_j = \varepsilon_\sigma$ , замінимо останній член в рівнянні (879) останнім членом рівняння (878). В результаті отримаємо:

$$\frac{(\rho_{\text{Аст}}^* - \rho_{\text{Аср}}^*)v_{\text{ср}}}{N_A^*} = \frac{8}{\xi} + \sqrt{\frac{8}{\xi}} \int_0^{y_1^+} \left( \frac{1}{\varepsilon_j / \nu + D_{AB} / \nu} - \frac{1}{\varepsilon_\sigma / \nu + 1} \right) dy^+. \quad (880)$$

Очевидно, що ліва частина цього рівняння є безрозмірним комплексом, в якому величина  $N_A^*/(\rho_{\text{Аст}}^* - \rho_{\text{Аср}}^*)$  не що інше, як коефіцієнт масовіддачі, а сам комплекс носить назву **дифузійного числа Стентона**  $St_D = \beta/v_{\text{ср}}$ . Дифузійне число Стентона характеризує подібність процесу масовіддачі, є мірою співвідношення швидкості перенесення речовини в напрямку, нормального до міжфазної поверхні та швидкості руху суміші.

Можна припустити, що інтеграл в рівнянні (880) є функцією безрозмірного комплексу, який носить назву **числа Шмідта**  $Sc = \nu/D_{AB}$  (його ще називають дифузійним числом Прандтля та позначають  $Pr_D$ ). Число Шмідта є мірою співвідношення інтенсивності перенесення імпульсу в'язким тертям та інтенсивності масоперенесення дифузиею. Можна розглядати як міру подібності поля швидкості суміші та поля хімічного потенціалу (концентрації) компонента в потоці.

Тоді рівняння (880) запишеться так:

$$\frac{1}{St_D} = \frac{8}{\xi} + \sqrt{\frac{8}{\xi}} f(Sc). \quad (881)$$

Права частина рівняння (881) являє собою суму двох опорів: перший член є опором масообміну на відстанях від стінки, що перевищують  $y_1^+$ , другий характеризує опір масообміну в області біля стінки, в якій важливу роль відіграють процеси молекулярного перенесення.

Значна кількість досліджень присвячена отриманню функціональної залежності між  $\varepsilon_\sigma/\nu$  та  $y^+$ , яку можна було б застосувати для визначення вигляду функції  $f(Sc)$  та встановленню аналогії між  $St_D$ ,  $\xi$  та  $Sc$ . Першим, хто застосував універсальний профіль швидкості та загальний підхід, викладений вище, очевидно, був Д. Карман. Межа  $y_1^+$ , що відповідає границі областей, була прийнята такою, що дорівнює 30. Проведений аналіз дав змогу отримати рівняння

$$f(Sc) = 5\sqrt{\frac{8}{\xi}}(Sc - 1) + \ln \left[ 1 + \frac{5}{6}(Sc - 1) \right]. \quad (882)$$

Основним недоліком наведеної моделі є те, що теоретично розраховані значення  $St_D$  для великих значень чисел Шмідта  $Sc \gg 1$  виявляються значно меншими від визначених експериментально. В цій області фізичних властивостей опір масообміну зосереджено в дуже тонкому шарі потоку біля стінки, де навіть незначне перемішування суттєво інтенсифікує масоперенесення. А оскільки дослідних даних з профілю швидкості при  $y^+ < 5$  дуже мало, більшість спроб покращити підхід Кармана зводились до застосування емпіричних чи напівемпіричних співвідношень для  $\varepsilon_\sigma$ , справедливих за високих значень чисел Шмідта.

Цікавим є випадок, коли  $Sc = 1$ . В цьому разі, порівнюючи рівняння (881) з підстановкою виразу (882) з рівнянням аналогії Рейнольдса (324), отримуємо:

$$St = St_D = \xi/8. \quad (883)$$

Рівняння (883) є математичним записом добре відомої потрійної **аналогії Рейнольдса**. Це просте за формою співвідношення добре узгоджується з експериментальними даними з тепловіддачі у повітря ( $Pr = 0,74$ ) та масовіддачі в газах ( $Sc = 0,6-3,0$ ).

### 12.5.5. Аналогія Чілтона — Колборна

Опублікована Т. Чілтоном та А. Колборном у 1934 р. аналогія на сьогодні є напевне одночасно і найпростішим, і найважливішим виразом, що пов'язує перенесення кількості руху, теплоти і маси. З аналогією Колборна

між перенесенням імпульсу та енергії ми ознайомились у підрозділі 9.4.4 в аналізі теплоперенесення в турбулентних плівках конденсату. Аналогія Чілтона — Колборна базується на таких засадах: дані про те, що проста аналогія Рейнольдса справедлива при  $Pr \approx 1$ ,  $Sc \approx 1$ ; відома емпірична залежність  $Nu \sim Pr^{1/3}$  для подання даних з теплообміну в обмеженому діапазоні зміни чисел Прандтля; припущення про аналогію між тепло- та масообміном, з якої випливає, що  $\beta$  має змінюватись зі зміною  $Sc$  таким самим чином, як  $\alpha$  зі зміною  $Pr$ ; теоретично визначений факт, що функція  $Pr^{-2/3}$  відповідає закономірностям теплоперенесення в ламінарному граничному шарі.

Відповідно до  $j$ -фактора теплоперенесення автори аналогії ввели так званий  $j_D$ -фактор масоперенесення

$$j_D = \frac{Sh}{Re Sc} Sc^{2/3} = St_D Sc^{2/3} = \frac{\beta}{v_{cp}} Sc^{2/3}. \quad (884)$$

Тоді рівняння аналогії Чілтона — Колборна запишеться так:

$$j_D = \xi/8. \quad (885)$$

Із застосуванням рівняння (551) можна записати потрібну аналогію:

$$\text{або ж} \quad \left. \begin{aligned} j = j_D = \xi/8 \\ St Pr^{2/3} = St_D Sc^{2/3} = \xi/8. \end{aligned} \right\} \quad (886)$$

Очевидно, що при  $Pr = 1$ ,  $Sc = 1$  ця аналогія переходить в аналогію Рейнольдса.

Експериментальні дані свідчать, що аналогія Чілтона — Колборна з дуже високою точністю описує дані з масовіддачі в діапазоні зміни числа Шмідта  $Sc = 0,6—3\,000$ .

Слід відзначити, що область застосування аналогії обмежується відповідно низькими швидкостями масообміну та системами, в яких концентрація компонента рівномірно розподілена в просторі біля поверхні поділу фаз. Крім цього, слід враховувати, що аналогія добре описує дослідні дані в умовах турбулентного обтікання плоских пластин, але коли міжфазна поверхня має суттєву кривизну починає значну роль відігравати опір форми. При цьому величина  $\xi/8$  стає суттєво більшою від  $j$  та  $j_D$ . Навіть у прямих каналах відповідність між величинами  $\xi/8$  та  $j$ ,  $j_D$  є дуже наближеною. Водночас виявляється, що вужча залежність

$$j = j_D = f(Re, \text{умови однозначності}) \quad (887)$$

справедлива для великої кількості систем з найрізноманітнішими конфігураціями течій, в тому числі для течій в каналах з великими числами Рейнольдса, течій в насадкових колонах тощо. Тому саме рівняння (887) є на сьогодні найпоширенішою формою аналогії Чілтона — Колборна.

### 12.5.6. Коефіцієнти масопередачі

Масоперенесення за наявності міжфазної поверхні можна розглядати як послідовне перенесення компонента з об'єму однієї фази до границі поділу фаз, а потім від цієї границі в об'єм іншої фази. В цілому цей процес

масообміну через поверхню поділу між двома речовинами називають **масопередачею**. У багатьох випадках розглянуті методи розрахунку перенесення речовини в межах однієї фази можна застосувати до кожної з фаз. При цьому основним поняттям теорії масоперенесення стає поняття опору масоперенесення як відношення рушійної сили (потенціалу) до потоку маси компонента. У. Уїтмен та У. Льюїс вперше висловили ідею про адитивність опорів масоперенесення в фазах, розміщених по обидві сторони границі розділу.

У найпростішому вигляді концепція адитивності опорів допускає, що міжфазний опір масоперенесенню суттєвої ролі не відіграє, тобто опір в межах відстаней порядку довжини вільного пробігу молекул в обох фазах по обидві сторони міжфазної поверхні практично відсутній. Це відповідає припущенню про те, що фази в площині дотикання перебувають у стані рівноваги.

Експериментальне визначення локальних коефіцієнтів масовіддачі зустрічає значні принципи труднощі, пов'язані з відсутністю методів безпосереднього вимірювання концентрацій компонентів на міжфазній поверхні. Тому для зручності подання дослідних даних часто використовують так звані **коефіцієнти масопередачі**.

Визначаючи коефіцієнти масовіддачі в кожній фазі як відношення густини потоку компонента до різниці його концентрацій — середньомасової в ядрі фази та на поверхні контакту фаз, рівняння масопередачі в бінарних сумішах запишемо у вигляді (рис. 55)

$$N_A^* = \frac{\rho_L}{M_L} \beta_L (x_{Ai} - x_{Acp}) = \frac{\rho_G}{M_G} \beta_G (y_{Acp} - y_{Ai}), \quad (888)$$

де  $\beta_L, \beta_G$  — коефіцієнт масовіддачі відповідно в рідкій та газовій фазах;  $\rho_L, \rho_G$  — густина відповідно рідини та газу;  $M_L, M_G$  — молекулярна маса відповідно рідини та газу;  $\rho_L/M_L = \rho_L^*$ ;  $\rho_G/M_G = \rho_G^*$  — мольні густини рідкої та газової сумішей, відповідно (див. рівняння (777)); мольні частки компонента в рідині позначаються через  $x$ , в газі — через  $y$ .

Оскільки, як відзначалось, визначення концентрацій компонента на міжфазній границі пов'язане зі значними труднощами, введемо у вираз рушійної сили замість, наприклад, значення  $y_{Ai}$  величину  $y_{Ae}$  деякої фіктивної концентрації компонента  $A$  в газовій фазі, що перебуває в рівновазі з рідиною ядра потоку з концентрацією компонента  $x_{Acp}$  (рис. 56). Тоді рівняння (888) переписеться у такому вигляді:

Рис. 56. Рушійні сили міжфазного перенесення:

$y_A, x_A$  — мольні концентрації компонента  $A$  у відповідно газовій та рідкій фазах;  $y_{Acp}, x_{Acp}$  — середні мольні концентрації компонента в об'ємах фаз;  $y_{Ai}, x_{Ai}$  — мольні концентрації компонента  $A$  на міжфазній поверхні

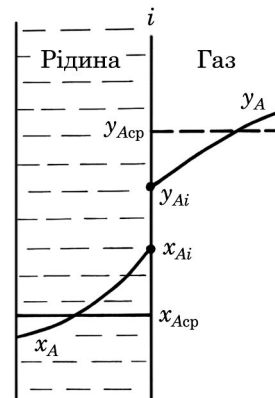


Рис. 55. Профілі концентрацій компонента  $A$  у фазах біля міжфазної поверхні:  $i$  — міжфазна поверхня



$$N_A^* = \frac{\rho_G}{M_G} k_G (y_{Acp} - y_{Ae}), \quad (889)$$

де  $k_G$  — коефіцієнт масопередачі, віднесений до концентрації компонента в газоподібній фазі.

Умова рівноваги фаз на границі поділу може бути апроксимована в межах незначної зміни концентрацій рівнянням прямої з тангенсом кута нахилу  $m$ , з якого отримуємо

$$y_{Ae} = mx_{Acp} + b. \quad (890)$$

Тоді можна записати зв'язок коефіцієнта масопередачі з коефіцієнтами масовіддачі у вигляді рівняння адитивності опорів масоперенесенню:

$$\frac{1}{k_G} = \frac{1}{\beta_G} + \frac{m\Psi}{\beta_L}, \quad (891)$$

де  $\Psi = (\rho_G M_L)/(\rho_L M_G)$ .

Тангенс кута нахилу дотичної до кривої рівноваги в робочій точці для ідеальних сумішей може бути визначений з рівняння

$$m = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_A]^2}, \quad (892)$$

де  $\alpha$  — відносна леткість компонентів суміші у разі нехтування впливом тиску та температури,  $\alpha = K_A/K_B = p_A/p_B$ ;  $p_A, p_B$  — тиск насичення чистих компонентів при температурі суміші відповідно;  $K_A, K_B$  — константи рівноваги компонентів.

Строго кажучи, властивостям ідеального розчину не відповідає жоден розчин, однак багато розчинів ведуть себе як ідеальні.

Якщо в рівняння масопередачі ввести фіктивне значення концентрації компонента  $A$  в рідині  $x_{Ae}$ , що перебуває у рівновазі з газом ядра потоку з концентрацією компонента  $y_{Acp}$ , отримуємо:

$$N_A^* = \frac{\rho_p}{M_p} k_L (x_{Ae} - x_{Acp}). \quad (893)$$

Відповідно коефіцієнт масопередачі  $k_L$ , віднесений до концентрації компонента в рідкій фазі, буде пов'язаний з коефіцієнтами масовіддачі рівнянням адитивності

$$\frac{1}{k_L} = \frac{1}{\beta_L} + \frac{1}{m\Psi\beta_G}, \quad (894)$$

тобто коефіцієнти масопередачі, що визначаються рівняннями (891) та (894), пов'язані між собою залежністю

$$k_L/k_G = m\Psi. \quad (895)$$

З наведеного можна зробити висновок, що коефіцієнти масопередачі залежатимуть не лише від коефіцієнтів масовіддачі, а й від відносної леткості компонентів та їх концентрації. Так, якщо коефіцієнт  $m$  великий (тобто, якщо речовина слабкорозчинна в рідкій фазі), основна частина опору масоперенесенню зосереджена в рідкій фазі і навпаки.

Слід відзначити, що рівняння (891) та (894) не можна застосовувати для визначення коефіцієнтів масопередачі, якщо: існує додатковий опір масоперенесенню на міжфазній поверхні внаслідок присутності на ній поверхнево-активної речовини; виникає додаткове хвилеутворення чи поверхнева турбулентність, які приводять до зростання  $\beta_L$  чи  $\beta_G$  відносно значень, властивих окремо взятій фазі; поблизу границі поділу фаз відбувається хімічна взаємодія, що була відсутня в аналізі чи дослідіах, з яких визначались коефіцієнти масовіддачі.

## 12.6. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ДО АНАЛІЗУ ДОСЛІДНИХ ДАНИХ ЗА КІНЕТИКОЮ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ

У загальному випадку в разі перенесення маси компонента в рухомій неізотермічній суміші зі складною геометрією міжфазної поверхні доводиться аналізувати крайову задачу, що включає в себе диференціальні рівняння: нерозривності, перенесення кількості руху, енергії та маси компонентів, а також складну систему умов однозначності. Для переважної більшості випадків розв'язання цієї задачі не видається можливим. Проте доцільно застосувати ці рівняння для отримання методами теорії подібності системи безрозмірнісних чисел, необхідних у плануванні, проведенні експериментальних досліджень та для узагальнення їх результатів.

Якщо проаналізувати для ізотермічної системи рівняння нерозривності, перенесення маси (817) та кількості руху таким самим чином, як це було зроблено в підрозділі 4.2 в аналізі рівнянь нерозривності, перенесення енергії та кількості руху, то можна отримати комплекс безрозмірнісних чисел, зв'язок між якими в загальному випадку має такий вигляд:

$$\text{Sh} = f(\text{Re}, \text{Fr}, \text{Eu}, \text{Sc}). \quad (896)$$

Рівняння (896) отримано для випадку вимушеного руху рідини. Якщо ж на рух здійснює значний вплив вільна конвекція, рівняння (896) набуде, очевидно, вигляду

$$\text{Sh} = f_1(\text{Re}, \text{Fr}, \text{Eu}, \text{Gr}, \text{Sc}). \quad (897)$$

У деяких випадках як безрозмірнісне число, що визначається, застосовують комбінації дифузійного числа Шервуда з іншими числами подібності, отримані вище:  $\text{St}_D = \text{Sh}/(\text{Re Sc})$  та  $j_D = \text{St}_D \text{Sc}^{2/3}$ .

Крім того, в окремих випадках у разі інтенсивної турбулізації фаз до рівняння подібності вводять числа подібності, що враховують вплив поверхневого натягу (наприклад число Вебера  $\text{We} = \sigma/(\rho_L g l_0^2)$ ).

## 12.7. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ З КІНЕТИКИ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ

У більшості випадків, що мають практичну цінність, потоки фаз турбулентні, і відсутність прийнятної теорії змушує застосовувати в розрахунках результати експериментальних досліджень.

У промислових масообмінних апаратах концентрація розподілюваного між фазами компонента змінюється у фазах по довжині потоків значним чином. Проектування апаратів при цьому вимагає проведення інтегрального

розрахунку з використанням локальних значень швидкостей перенесення. В цьому пункті наведемо деякі емпіричні залежності для визначення цих швидкостей, потрібні для розуміння характеру впливу окремих механізмів на процес перенесення.

### 12.7.1. Плоскі поверхні

Розглянемо перенесення маси до плоскої пластини (чи від неї) під час паралельного руху рідини за відсутності градієнта тиску. Біля передньої кромки пластини починає формуватись ламінарний граничний шар, що в умовах турбулентності основного потоку на деякій відстані передньої кромки стає турбулентним. Тепловий ламінарний граничний шар аналізувався в підрозділі 6.1, де було визначено значення поточного коефіцієнта тепловіддачі (рівняння (281)). Вираз для тепловіддачі внаслідок подібності рівняння теплового та дифузійного граничних шарів можна привести до рівняння, що може використовуватись у розрахунку інтенсивності масовіддачі,

$$\text{Sh}_x = \frac{\beta x}{D_{AB}} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Sc}^{1/3}. \quad (898)$$

Якщо вся довжина пластини перевищує відстань, на якій ламінарний граничний шар переходить в турбулентний, то середній по довжині коефіцієнт масовіддачі буде деякою середньозваженою величиною зі значень коефіцієнтів для ламінарного та турбулентного граничних шарів. Для значення критичного числа Рейнольдса переходу від ламінарного граничного шару до турбулентного, що дорівнює  $\text{Re}_{x_{кр}} = 3,2 \cdot 10^5$ , У. Розенов та Г. Чой застосували рівняння (898) для  $\text{Re}_x \leq 3,2 \cdot 10^5$ , а для турбулентної області граничного шару  $\text{Re}_x > 3,2 \cdot 10^5$  використали аналогію Чілтона – Колборна (для знаходження коефіцієнта тертя була застосована емпірична залежність, згідно з якою  $\xi \sim x^{-0,2}$ ). Отриманий ними результат має такий вигляд:

$$\text{Sh}_{L_{cp}} = \frac{\beta_{cp} L}{D_{AB}} = 0,037 \text{Sc}^{1/3} (\text{Re}_L^{0,8} - 15\,500). \quad (899)$$

Слід відзначити, що рівняння (899) дійсне при  $\text{Sc} > 0,5$ .

### 12.7.2. Плівки рідини

Масообмінні апарати зі стічними плівками рідини особливо часто використовують для конденсації із суміші, випаровування в суміш, абсорбції та десорбції, вакуумної дистиляції.

#### 12.7.2.1. Абсорбція чи десорбція поганорозчинних газів

Задача цього типу була проаналізована в підрозділі 12.5.3 для випадку абсорбції газу в гладку ламінарну плівку рідини. Аналіз проведено на основі уявлень про стаціонарне перенесення маси в наближенні граничного шару. Справедливість результатів аналізу для гладких плівок підтверджена експериментально в дослідах на дуже коротких поверхнях ( $L = 5\text{—}10$  см), коли

хвилі на поверхні плівки не встигають сформуватись, та у випадку довших поверхонь за наявності поверхнево-активних речовин, що пригнічують хвилеутворення.

Однак вже при  $Re_{\delta} \approx 8-10 (Re_{de} \approx 40)$  хвилеутворення на поверхні плівки може значно інтенсифікувати масообмін в ній. Результати експериментальних досліджень, як відзначалось, свідчать про наявність чотирьох режимів, що змінюють один одного зі збільшенням плівкового числа Рейнольдса: безхвильового ламінарного (гладка плівка), двох хвильових ламінарних та турбулентного.

Н. Кулов та ін. провели експериментальне дослідження десорбції кисню з води в повітря, коли рівноважна та робоча лінії були прямими та виконувалася умова  $\rho_{Ai} = \text{const}$ . Досліди проводились при  $T_p \approx 293$  К в діапазоні зміни  $Re_{de} = 180-14\,000$ , висота труби діаметром 25 мм, по внутрішній поверхні якої стікала вода,  $L = 0,195; 0,60; 0,90; 1,42$  м.

На основі аналізу експериментальних даних авторами запропоновані такі розрахункові рівняння для визначення коефіцієнта масовіддачі:

перший ламінарно-хвильовий режим ( $40 \leq Re_{de} \leq 200$ )

$$Sh = \frac{\beta}{D_{AB}} \left( \frac{v_p^2}{g} \right)^{1/3} = 0,011 Re_{de}^{0,67} Sc_L^{0,5} (L^*)^{-0,12}; \quad (900)$$

другий ламінарно-хвильовий режим ( $200 \leq Re_{de} \leq 1\,200$ )

$$Sh = 0,356 Re_{de}^{0,07} Sc_L^{0,5} (L^*)^{-0,155}; \quad (901)$$

турбулентний режим ( $Re_{de} \geq 1\,200$ )

$$Sh = 2,2 \cdot 10^{-3} Re_{de}^{0,82} (L^*)^{-0,176}, \quad (902)$$

де осереднений на ділянці  $0-L$  коефіцієнт масовіддачі визначався згідно із співвідношенням

$$\beta = \frac{\Gamma}{L} \ln \frac{\rho_{A0} - \rho_{Ai}}{\rho_{AL} - \rho_{Ai}}, \quad (903)$$

де  $D_{AB}$  — коефіцієнт дифузії в рідкій фазі;  $\rho_{A0}$  — масова концентрація розчиненого газу на вході (біля верхнього зрізу поверхні);  $\rho_{AL}$  — середньозмішана концентрація на відстані  $L$  від верхнього зрізу;  $L^* = L/(v_L^2/g)^{1/3}$ ;  $(v_L^2/g)^{1/3}$  — лінійний масштаб товщини плівки.

У всіх трьох режимах визначена близька залежність  $Sh$  від  $L$ , яка, очевидно, пов'язана із зміною хвильових характеристик поверхні плівки по довжині. Причому зі збільшенням довжини труби функція  $\beta = f(L)$  прямує до постійного значення. Автори визначили, що при  $L \approx 1,5$  м хвильові характеристики стабілізуються, тому для довших поверхонь ( $L \geq 1,5$  м) запропоновані такі кореляційні залежності:

перший ламінарно-хвильовий режим

$$Sh = 3,17 \cdot 10^{-3} Re_{de}^{0,67} Sc_L^{0,5}; \quad (904)$$

другий ламінарно-хвильовий режим

$$Sh = 7,12 \cdot 10^{-2} Re_{de}^{0,07} Sc_L^{0,5}; \quad (905)$$

турбулентний режим

$$\text{Sh} = 3,54 \cdot 10^{-4} \text{Re}_{de}^{0,82} \text{Sc}_L^{0,5}. \quad (906)$$

Розрахункові залежності (900)—(902), (904)—(906) можуть застосовуватись у розрахунку масовіддачі як у разі вільного стікання рідини, так і вимушеного руху газового ядра в трубі в умовах слабкої взаємодії фаз, границя якої авторами визначена у вигляді

$$\text{Re}_G = \frac{v_{Gep} d}{v_G} \leq 5,32 \cdot 10^4 \text{Re}_{de}^{-0,19}, \quad (907)$$

а також в умовах протитечії за швидкості газу, що дорівнює 80—90 % від швидкості захлинання.

### 12.7.2.2. Масоперенесення між поверхнею рідкої плівки та потоком газу

Масообмін в газовій фазі, що рухається в колоні (каналі) зі змоченими стінками, був предметом багатьох досліджень з абсорбції добре розчинного компонента у зрошувальну плівку, коли опором масоперенесенню в ній можна знехтувати, ректифікації бінарних сумішей та випаровування з поверхні плівки в парогазову суміш.

М. Джексон та Н. Сіглскі, вивчаючи плівкову ректифікацію, показали, що в межах зміни числа Рейнольдса газу  $\text{Re}_G = 4 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^4$  з високою точністю виконується аналогія Чілтона — Колборна між перенесенням кількості руху та маси. Проте у разі застосування цієї аналогії основна проблема полягає у визначенні коефіцієнта тертя газового потоку в зрошуваній трубі.

І. Джіллленд та Т. Шервуд провели дослідження випаровування води та восьми різних органічних рідин в повітря, що рухалось в колоні діаметром 2,54 см, змоченій на довжину 1,17 м при  $\text{Re}_G \approx 2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$ . У результаті кореляції дослідних даних була отримана залежність, розрахунок за якою дає добру відповідність більшості експериментальних даних інших дослідників:

$$\frac{\beta d}{D_{AB}} \frac{p_{BM}}{p} = 0,023 \text{Re}_G^{0,83} \text{Sc}_G^{0,44}, \quad (908)$$

де  $D_{AB}$  — коефіцієнт дифузії в газовій фазі.

З останнього рівняння можна зробити висновок, що воно практично є виразом аналогії між перенесенням теплоти та маси у разі турбулентного руху газу. При цьому слід зазначити, що хоча дослідні проводились як в умовах прямої течії, так і протитечії газу та рідини, кращі результати дає розрахунок із застосуванням не відносної швидкості газу (швидкості відносно поверхні плівки), а швидкості відносно поверхні каналу.

Р. Кафезян та ін. отримали емпіричну залежність, що дає змогу виділити вплив витратних характеристик рідини на інтенсивність масообміну в газовій фазі:

$$\frac{\beta d}{D_{AB}} \frac{p_{BM}}{p} = 0,00814 \text{Re}_G \text{Sc}_G^{0,44} \text{Re}_{de}^{0,15}, \quad (909)$$

де швидкість газу, що входить до числа  $\text{Re}_G$ , також є абсолютною, вимірною відносно труби.

## 12.8. МАСООБМІН В АПАРАТАХ З РОЗВИНЕНОЮ МІЖФАЗНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

В апаратах з розвиненою міжфазною поверхнею в складних умовах взаємодії фаз визначення площі поверхні контакту фаз стикається зі значними труднощами. Тому на практиці у розрахунках масопередачі та у опрацюванні результатів експериментальних досліджень користуються умовними коефіцієнтами масовіддачі та масопередачі, віднесеними, наприклад, до одиниці робочого об'єму апарата (об'ємні коефіцієнти масовіддачі та масопередачі)  $\beta a_e$  та  $ka_e$ . За розвиненої поверхні контакту фаз, що має місце в барботажному шарі в дисперсній системі газ — рідина, а також у разі плівкової течії через шар насадку рівняння балансу маси компонента для диференціального елемента апарата заввишки  $dh$ , в якому вміст компонента змінився на  $dy_A$ , за локального масового потоку компонента  $N_A^*$  запишеться у вигляді

$$N_A^* a_e dh = -d(G^* y_A) = -G^* dy_A - y_A dG^*, \quad (910)$$

де  $a_e$  — ефективна поверхня контакту фаз в одиниці об'єму апарата,  $\text{м}^2/\text{м}^3$ ;  $G^*$  — мольна швидкість газової фази,  $\text{кмоль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $y_A$  — середньомасовий вміст компонента в газовій фазі.

Якщо переноситься лише один компонент  $A$ , то виконується співвідношення

$$dG^* = -N_A^* a_e dh, \quad (911)$$

підставляючи яке в рівняння (910), отримаємо

$$dh = -\frac{G^* dy_A}{N_A^* a_e (1 - y_A)}. \quad (912)$$

Підставляючи замість  $N_A^*$  його вираз (854) та інтегруючи по висоті апарата, знаходимо:

$$h = \int_1^2 dh = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{G^* dy_A}{\beta_{xG} a_e (1 - y_A)(y_A - y_{Ai})}, \quad (913)$$

де  $\beta_{xG} a_e$  — **об'ємний коефіцієнт масовіддачі** в газовій фазі,  $\beta_{xG} a_e = \beta_G \rho_G / M_G a_e$ .

Дані з масообміну, як правило, подаються у вигляді, що не дає змоги безпосередньо використовувати рівняння (913). Як свідчать результати аналізу, у разі перенесення одного компонента, безрозмірнісний комплекс  $G^*/(\beta_x y_{BM})$  не залежить від концентрації та тиску. Тому, якщо рівняння (913) помножити та поділити на  $y_{BM}$ , то можна отримати:

$$h = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{G^*}{\beta_{xG} a_e y_{BM}} \frac{y_{BM} dy_A}{(1 - y_A)(y_A - y_{Ai})}. \quad (914)$$

Лівий множник під інтегралом має розмірність довжини, тому його називають **висотою одиниці перенесення в газовій фазі**:

$$H_G = \frac{G^*}{\beta_{xG} a_e y_{BM}}, \quad (915)$$

причому ще раз відзначимо, що теоретично величина  $H_G$  не залежить від концентрації та тиску.

Якщо швидкість потоку та параметр  $a_e$  відносно слабко залежать від висоти апарата, величину  $H_G$  можна замінити її середнім значенням по висоті апарата та винести з-під знака інтеграла:

$$h = H_{G\text{cp}} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{y_{BM} dy_A}{(1 - y_A)(y_A - y_{Ai})}. \quad (916)$$

Інтеграл у рівнянні (916) називають **числом (кількістю) одиниць перенесення для газової фази**:

$$N_G = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{y_{BM} dy_A}{(1 - y_A)(y_A - y_{Ai})}. \quad (917)$$

Отже, висоту апарата можна подати у вигляді добутку числа одиниць перенесення на висоту одиниці перенесення

$$h = H_{G\text{cp}} N_G. \quad (918)$$

Можна зробити висновок, що число одиниць перенесення — це безрозмірний комплекс, що характеризує ступінь складності реалізації процесу розділення компонентів, тобто є аналогом рушійної сили та визначає ступінь вилучення компонента з відповідної фази, що досягається. Висота ж одиниці перенесення є аналогом коефіцієнта масовіддачі. Оскільки висота одиниці перенесення обернено пропорційна коефіцієнту масовіддачі та площі поверхні фаз в одиниці об'єму, то що вищі  $\beta$  та  $a_e$ , то інтенсивніший апарат. Вираз для  $N_G$  можна спростити в деяких випадках. Так, для низької концентрації компонента в газовій фазі різниця  $(y_A - y_{Ai})$  по висоті апарата приблизно постійна. В цьому разі рівняння (917) набуде вигляду

$$N_G \approx \frac{1}{(y_A - y_{Ai})_{\text{cp}}} \int_1^2 dy_A = \frac{y_{A1} - y_{A2}}{(y_A - y_{Ai})_{\text{cp}}}, \quad (919)$$

тобто в цьому разі одна одиниця перенесення відповідає висоті апарата, на якій склад газу змінюється на величину, що дорівнює середній рушійній силі масовіддачі.

Для масообміну в рідкій фазі матеріальний баланс компонента запишеться таким чином:

$$d(L^* x_A) = N_A^* a_e dh = L^* dx_A + x_A dL^*, \quad (920)$$

де  $x_A$  — середньомасовий вміст компонента в рідкій фазі;  $L^*$  — мольна швидкість рідкої фази, кмоль/(м<sup>2</sup> · с).

Враховуючи, що  $dL^* = N_A^* a_e dh$ , та використовуючи для визначення  $N_A^*$  рівняння масовіддачі в рідкій фазі, отримаємо:

$$h = \int_1^2 dh = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{L^* dx_A}{\beta_{xL} a_e (x_{Ai} - x_A)(1 - x_A)}. \quad (921)$$

Помноживши та поділивши на  $x_{BM}$ , отримаємо:

$$h = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \left( \frac{L^*}{\beta_{xL} a_e x_{BM}} \right) \left[ \frac{x_{BM} dx_A}{(1-x_A)(x_{Ai} - x_A)} \right]. \quad (922)$$

**Висота одиниці перенесення в рідкій фазі** характеризується першим множником під інтегралом

$$H_L = \frac{L^*}{\beta_{xL} a_e x_{BM}}. \quad (923)$$

**Число (кількість) одиниць перенесення в рідкій фазі** визначається відповідно правим множником під інтегралом

$$N_L = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{x_{BM} dx_A}{(1-x_A)(x_{Ai} - x_A)}. \quad (924)$$

Якщо значення потоків, температур та фізичних властивостей рідини незначно змінюються по висоті апарата, то можна висоту апарата визначити з допомогою середнього по висоті значення  $H_{Lcp}$ :

$$h = H_{Lcp} N_L. \quad (925)$$

Із застосуванням **об'ємного коефіцієнта масопередачі**  $k_{0G} a_e = k_G \rho_G / M_G a_e$  висота колони запишеться так:

$$h = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{G^* dy_A}{k_{0G} a_e (1-y_A)(y_A - y_{Ae})}. \quad (926)$$

Помноживши та поділивши підінтегральний вираз на  $y_{BM}^* = [(1-y_A) - (1-y_{Ae})]: \ln[(1-y_A)/(1-y_{Ae})]$ , отримаємо:

$$h = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \left( \frac{G^*}{k_{0G} y_{BM}^* a_e} \right) \left[ \frac{y_{BM}^* dy_A}{(1-y_A)(y_A - y_{Ae})} \right]. \quad (927)$$

**Загальна висота одиниці перенесення в газовій фазі** при цьому дорівнюватиме

$$H_{0G} = \frac{G^*}{k_{0G} y_{BM}^* a_e}. \quad (928)$$

Аналогічно загальна кількість одиниць перенесення в газовій фазі дорівнюватиме

$$N_{0G} = \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{y_{BM}^* dy_A}{(1-y_A)(y_A - y_{Ae})}. \quad (929)$$

Із урахуванням середнього по висоті апарата значення  $H_{0G}$  запишемо:

$$h = H_{0Gcp} N_{0G}. \quad (930)$$

Відповідно для рідкої фази запишемо вирази:  
для загальної висоти одиниць перенесення в рідкій фазі:

$$H_{0L} = \frac{L^*}{k_{0L} x_{BM}^* a_e}, \quad (931)$$

де  $k_{0L} = k_L \rho_L / M_L$ ;  $x_{BM}^* = [(1 - x_A) - (1 - x_{Ae})] / \ln[(1 - x_A) / (1 - x_{Ae})]$ ,

для загальної кількості одиниць перенесення в рідкій фазі:

$$N_{0L} = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{x_{BM}^* dx_A}{(1 - x_A)(x_{Ae} - x_A)}. \quad (932)$$

Загальні висоти одиниць перенесення (928) та (931) можна пов'язати з висотами одиниць перенесення у фазах (915) та (923) співвідношенням адитивності масоперенесенню:

$$\left. \begin{aligned} H_{0G} &= H_G \frac{y_{BM}}{y_{BM}^*} + H_L m \frac{G^* x_{BM}}{L^* y_{BM}^*}; \\ H_{0L} &= H_L \frac{x_{BM}}{x_{BM}^*} + H_G \frac{1}{m} \frac{L^* y_{BM}}{G^* x_{BM}^*}. \end{aligned} \right\} \quad (933)$$

## Масообмін у насадкових апаратах

### *Змочена поверхня насадка та ефективна міжфазна поверхня*

Визначення інтенсивності міжфазного масоперенесення включає в себе три самостійні задачі із визначення: рушійної сили процесу, коефіцієнта масопередачі та поверхні контакту фаз.

За умови зрошування насадка рідиною товщина та швидкість шару рідини змінюються від точки до точки по поверхні насадка. В більшості випадків не вся поверхня насадка змочена рідиною. Крім того, не вся поверхня бере однакову участь у процесі масопередачі. Наприклад, у випадку фізичної абсорбції газу рідиною на тих ділянках, де швидкість рідини низька або ж товщина шару рідини дуже низька, може відбуватись практичне насичення рідини абсорбованим газом, внаслідок чого внесок цих ділянок у загальну швидкість абсорбції дуже низький. Відповідно дійсну поверхню контакту фаз не слід змішувати зі змоченою поверхнею насадка.

Експериментальні дослідження величин змоченої поверхні насадка та ефективної міжфазної поверхні показали, що величини  $a_w/a_t$  та  $a_e/a_t$ , де  $a_w$ , ( $a_e$  та  $a_t$  — площа відповідно змоченої, ефективної та геометричної поверхні насадка), зростають зі збільшенням густини зрошування насадка рідиною. Однак густина зрошування впливає лише до деякого значення і з подальшим її збільшенням змочена та ефективна поверхні не зростають. Для регулярних насадків при цьому досягається повне змочування насадка, а ефективна поверхня стає такою, що дорівнює геометричній.

Вплив руху газу різними дослідниками трактується неоднозначно: в одних експериментах вплив швидкості газу не виявлений, в інших відзначалося зменшення змоченої та ефективної поверхонь зі збільшенням швидкості газу.

Серед фізичних властивостей рідини найбільший вплив, як і слід було очікувати, має величина поверхневого натягу, причому з його зменшенням величини  $a_w$  та  $a_e$  зростають. Також відзначалось деяке їх зменшення зі значним збільшенням в'язкості рідини.

Значний вплив на величини  $a_w$  та  $a_e$  здійснюють форма та розмір насадків: зі збільшенням розмірів елемента насадка  $a_w/a_t$  та  $a_e/a_t$  зростають. Тому ефективна міжфазна поверхня для дрібних насадків не набагато вища, ніж для великих, хоча геометрична поверхня значно зростає зі зменшенням розмірів елементів насадка. Висота шару насадка, за даними ряду дослідників, не впливає значно на величини  $a_w/a_t$  та  $a_e/a_t$ .

Г. Гікіта та ін. отримані експериментальні дані для насадків, розміщених навалом, узагальнили рівнянням

$$a_e / a_t = AL^{0,455} \sigma^{-m}, \quad (934)$$

де  $m = bd^{-p}$ ;  $L$  — масова швидкість рідини повним перерізом апарата,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\sigma$  — поверхневий натяг,  $\text{мН}/\text{м}$ ;  $d$  — номінальний розмір насадка,  $\text{мм}$ .

Значення  $A$ ,  $b$ ,  $p$  для різних насадків розмірами 12,5 та 25 мм наведені в табл. 11.

Таблиця 11. Значення коефіцієнтів у рівнянні (934)

Насадок	$A$	$b$	$p$
Кільцевий	2,26	0,83	0,48
Сідлоподібний	0,767	0,495	0,96

Д. Онда та ін. рекомендують для визначення міжфазної поверхні насадка, що складається з кільця Рашига чи сідел, розрахункове рівняння

$$a_e / a_t = 1 - \exp \left[ -1,45 \left( \frac{\sigma_c}{\sigma} \right)^{0,75} \left( \frac{L}{a_t / \mu_L} \right)^{0,1} \left( \frac{L^2 a_t}{\rho_L^2 g} \right)^{-0,05} \left( \frac{L^2}{\rho_L \sigma a_t} \right)^{0,2} \right], \quad (935)$$

де  $\sigma_c$  — так званий критичний поверхневий натяг для насадкового матеріалу, тобто максимальний поверхневий натяг, що допускає розтікання рідини по поверхні насадки (для води та керамічних насадків  $\sigma_c/\sigma = 0,85$ ).

### Масоперенесення в рідкій фазі

Результати експериментальних досліджень з кінетики масоперенесення, як правило, подають у вигляді залежностей для розрахунку коефіцієнтів масовіддачі чи висот одиниць перенесення.

Д. Онда та ін. для розрахунку коефіцієнтів масовіддачі на основі результатів своїх дослідів та дослідів інших авторів рекомендують таку залежність:

$$\beta_L / (v_L g)^{1/3} = 0,0051 \left[ L / (a_e \mu_L) \right]^{2/3} \text{Sc}_L^{-0,5} (a_t d)^{0,4}, \quad (936)$$

де  $a_e$  — ефективна міжфазна поверхня, визначена за рівнянням (935);  $d$  — номінальний розмір елементів насадка,  $\text{м}$  (член  $a_t d$  залежить, отже, лише від форми насадка).

Опрацюванням результатів багатьох досліджень В. Рамм отримав таку залежність для розрахунку об'ємного коефіцієнта масовіддачі:

$$\frac{\beta_L (v_L^2 / g)^{1/3}}{D_{AB}} \frac{a_e}{a_t} = 0,0021 \left( \frac{4L}{a_t \mu_L} \right)^{0,75} Sc_L^{0,5}. \quad (937)$$

Рівняння (937) задовільно узагальнює численні експериментальні дані не лише для кільцевих та сідлоподібних насадків, завантажених неупорядковано, а й для кілець Рашига розмірами від 50 до 100 мм, викладених в шаховому порядку.

Рівняння для визначення висоти одиниці перенесення згідно з даними А. Касаткіна та І. Ціпаріса набуває такого вигляду:

$$H_L = 119 \left( \frac{v_L^2}{g} \right)^{1/3} \left( \frac{4L}{a_t \mu_L} \right)^{0,25} Sc_L^{0,5}. \quad (938)$$

### Масоперенесення в газовій фазі

На сьогодні нема досить задовільних універсальних узагальнювальних рівнянь для визначення інтенсивності масоперенесення в газовій фазі за умови різних геометричних характеристик насадка.

З міркувань розмірності, підтверджених експериментальними даними, Д. Онда та ін. запропонували такий вираз для розрахунку коефіцієнта масовіддачі у газовій фазі:

$$Sh_G = A \varepsilon^p Re_G^{0,8} Ga^q Sc_G^{1/3}, \quad (939)$$

де  $Sh_G$  — число Шервуда газової фази,  $Sh_G = \beta_G d_{екв} / D_{AB}$ ;  $Re_G$  — число Рейнольдса газу,  $Re_G = 4G / (a_t \mu_G)$ ;  $Ga$  — число Галілея газу,  $Ga = g d_{екв}^3 / v_G^2$ ;  $d_{екв}$  — еквівалентний діаметр насадка,  $d_{екв} = 4\varepsilon / a_t$ , м;  $\varepsilon$  — вільний об'єм насадка;  $D_{AB}$  — коефіцієнт дифузії компонента в газовій фазі, м<sup>2</sup>/с;  $G$  — масова швидкість газу перерізом апарата, кг/(м<sup>2</sup>·с).

Постійні  $A$ ,  $p$ ,  $q$  мають значення, наведені в табл. 12.

Таблиця 12. Значення коефіцієнтів у рівнянні (939)

Насадок	$A$	$p$	$q$
Кільцевий	0,0142	0,52	0,16
Сідлоподібний	0,0058	0,34	0,22

Для розрахунку висот одиниць перенесення можна використовувати залежності для насадків:

неупорядкованих

$$H_G = 0,615 d_{екв} Re_G^{0,345} Sc_G^{2/3}, \quad (940)$$

упорядкованих

$$H_G = 1,5 d_{екв} Re_G^{0,26} Sc_G^{2/3} (l / d_{екв})^{0,47}, \quad (941)$$

де  $l$  — висота елемента насадка.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса : Пер. с англ. — М.: Химия, 1974. — 688 с.
2. Делайе Дж., Гюо М., Ритмюллер М. Теплообмен и гидродинамика в атомной и тепловой энергетике: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 424 с.
3. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: Учеб. для вузов. — Изд. 4-е, перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1981. — 416 с.
4. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по теплогидравлическим расчетам: Ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы / Под общ. ред. П.Л.Кириллова. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 296 с.
5. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи : Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 512 с.
6. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
7. Лыков А.В. Теплообмен. — М.: Энергия, 1972. — 560 с.
8. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. — 2-е изд., стер. — М.: Энергия, 1977. — 344 с.
9. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках: Учеб. пособ. для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 472 с.
10. Слеттери Дж.С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах / Пер. с англ. — М.: Энергия, 1978. — 448 с.
11. Справочник по теплообменникам: [В 2 т.] / Пер. с англ.; Под ред. Б.С.Петухова, В.К.Шикова. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 1 т. — 560 с.
12. Теоретические основы хладотехники. Теплообмен: Учеб. пособ. для вузов / С.Н. Богданов, Н.А. Бучко, Э.И. Гуйго и др. — М.: Агропромиздат, 1986. — 319 с.
13. Теория теплообмена: Учеб. для вузов / С.И. Исаев, М.А. Кожинов, В.И. Кофанов и др. — М.: Высш. шк., 1977. — 495 с.
14. Теплопередача в двухфазном потоке / Пер. с англ.; Под. ред. Д.Баттерверса и Г.Хьюитта. — М.: Энергетика, 1980. — 328 с.
15. Шервуд Т., Пизфорд Р., Уилки Ч. Массопередача: Пер. с англ. — М.: Химия, 1982.— 696 с.

## Література для поглибленого вивчення

### Розділ 1

1. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория : Пер. с фр. — М.: Высш. шк., 1983. — 399 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — 4-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1973. — 848 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды: Учеб. для ун-тов и втузов: [В 2 т.]. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1983. — 1 т. — 528 с.

## **Розділ 2**

1. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 326 с.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел: Учеб. пособ. для студ. вузов. — 2-е изд., доп. — М.: Высш. шк., 1985. — 480 с.

## **Розділ 3**

1. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. — М.: Наука, 1982. — 472 с.

2. Кейс В.М. Конвективный тепло- и массообмен: Пер. с англ. — М.: Энергия, 1972. — 446 с.

3. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 592 с.

## **Розділ 4**

1. Гухман А.А. Введение в теорию подобия: Учеб. пособ. для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1973. — 296 с.

2. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1974. — 328 с.

3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — 10-е изд., доп. — М.: Наука, 1981. — 430 с.

## **Розділ 5**

1. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — 2-е изд., перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 319 с.

2. Романенко П.Н. Гидродинамика и тепломассообмен в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергия, 1974. — 464 с.

3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Пер. с нем. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

## **Розділ 6**

Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967. — 411 с.

## **Розділ 7**

1. Ибрагимов М.Х., Субботин В.И., Боков В.П. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. — М.: Атомиздат, 1978. — 296 с.

2. Кутателадзе С.С. Пристенная турбулентность. — 4-е изд., перераб. и доп. — Новосибирск: Наука. СО, 1973. — 227 с.

3. Турбулентность / П.Брэдшоу, Т.Себиси, Г.-Г.Фернгольц и др: Пер. с англ.; Под ред. У.Фроста и Т.М.Моулдена. — М.: Машиностроение, 1980. — 343 с.

4. Турбулентность. Принципы и применение / Т.Моулден, У.Фрост, А.Гарнер и др.; Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 535 с.

## **Розділ 8**

1. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б.Гебхарт, Й.Джалурия, Р.Мегаджан, Б.Самакия: [В 2-х кн.]: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 1 кн. — 678 с.

2. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б.Гебхарт, Й.Джалурия, Р.Мегаджан, Б.Самакия: [В 2-х кн.]: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 2 кн. — 528 с.

## **Розділ 9**

1. Гимбутис Г. Теплообмен при гравитационном течении пленки жидкости. — Вильнюс: Мокслас, 1988. — 233 с.

2. *Исаченко В.П.* Теплообмен при конденсации. — М.: Энергия, 1977. — 240 с.
3. *Михалевич А.А.* Математическое моделирование массо- и теплопереноса при конденсации. — Минск: Наука и техника, 1982. — 216 с.
4. *Собин В.М.* Тепломассообмен в пленочных течениях при осложненных условиях (приближенные методы расчета). — Минск: Навука і тэхніка, 1994. — 303 с.
5. *Хомяков Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. — М.: Наука, 1990. — 271 с.

#### **Розділ 10**

1. *Дорошук В.Е.* Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 119 с.
2. *Кутепов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г.* Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1983. — 447 с.
3. *Стырикович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В.* Тепломассообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций. — М.: Наука, 1982. — 368 с.
4. *Толубинский В.И.* Теплообмен при кипении. — К.: Наук. думка, 1980. — 316 с.

#### **Розділ 11**

1. *А.Г.Блох, Ю.А.Журавлев, Л.Н.Рыжков.* Теплообмен излучением: Справочник. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 432 с.
2. *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 934 с.
3. *Рубцов Н.А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. — Новосибирск: Наука. СО, 1984. — 277 с.
4. *Спарроу Э.М., Сесс Р.Д.* Теплообмен излучением / Пер. с англ. — Л.: Энергия, 1971. — 294 с.

#### **Розділ 12**

1. *Александров И.А.* Массопередача при ректификации и адсорбции многокомпонентных смесей. — Л.: Химия. ЛО, 1975. — 319 с.
2. *Петлюк Ф.Б., Серафимов Л.А.* Многокомпонентная ректификация: Теория и расчет. — М.: Химия, 1983. — 303 с.
3. *Протодьяконов М.О., Люблинская И.Е.* Гидродинамика и массообмен в системах газ-жидкость. — Л.: Наука. ЛО, 1990. — 349 с.
4. *Рамм В.М.* Адсорбция газов. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Химия, 1976. — 655 с.

Навчальне видання

ВАСИЛЕНКО Сергій Михайлович  
УКРАЇНЕЦЬ Анатолій Іванович  
ОЛІШЕВСЬКИЙ Валентин Вікторович

## **ОСНОВИ ТЕПЛОМАСООБМІНУ**

За редакцією академіка Української академії аграрних наук  
І. С. ГУЛОГО

Редактор В. П. Оровецька  
Художнє оформлення Є. В. Чурія  
Комп'ютерна верстка Н. М. Мініної

Підписано до друку 20.12.04. Формат 70x100/16.  
Обл.-вид. арк. 17,82. Ум. друк. арк. 20,64.  
Наклад 500 пр. Вид. № 276/02. Зам. №

РВЦ НУХТ, 01033, Київ-33, вул. Володимирська, 68  
[www.book.nuht.edu.ua](http://www.book.nuht.edu.ua)  
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК №1786 від 18.05.04 р.

Віддруковано у друкарні концерну «ВД «Ін Юре»  
Україна, 04107 м. Київ, вул. Багговутівська, 17-21