

УДК 517.9

Алла М. Ткачук, к.ф.-м.н., доцент,

Тетяна Добродзій, аспірант.

Дослідження інваріантних множин різницевих рівнянь за допомогою функцій Ляпунова

В даній роботі отримано результат про зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова.

Ключові слова: різницеві рівняння, функція Ляпунова, інваріантна множина, стійкість.

A. M. Tkachuk, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Associate Professor,

A. M. Tkachuk, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Associate Professor,

T. Dobrodziy, PhD student,

Research of invariant sets of difference equations with the help of functions of Lyapunov's

In this work the result about the relation between invariant sets of the systems of differential and corresponding difference equation in terms of the Lyapunov functions of constant signs is investigated it is received.

Key Words: difference equations, Lyapunov's function, invariant set, stability.

*E-mail: tkachukam@ukr.net

Статтю представив член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н. М.О. Перестюк

1 Вступ

В монографії А.М. Самойленка [1] отримано результати про існування інваріантних множин систем диференціальних рівнянь в термінах нулів невід'ємно визначених функцій Ляпунова. В подальшому дані результати узагальнювалися на системи неавтономних диференціальних рівнянь та рівнянь з випадковими збуреннями [2 - 4]. В них доведено, що нулі деякої невід'ємно визначеної функції Ляпунова $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset R^m$ є інваріантною множиною, при умові, що їх проекція на R^n компактна в D , а похідна $V(t, x)$ в силу системи недодатно визначена.

В [5] досліджено наскільки наявність невід'ємно визначеної функції Ляпунова, похідна якої в силу системи недодатно визначена, є необхідною для існування та стійкості інваріантних множин. Тобто фактично отримано обернення теорем А.М.Самойленка аналогічно оберненим теоремам Ляпунова в теорії стійкості (див., наприклад, теорема Персидського [6, с. 254]).

© А.М. Ткачук, Т. Добродзій, 2008

Основною ціллю даної роботи є отримання аналогічного результату для різницевих рівнянь. Також досліджено питання про зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь в термінах нулів додатно визначених функцій Ляпунова.

2 Основні результати

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (1)$$

та відповідна їй система різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + X_n(x_n), \quad (2)$$

де $n \geq 0$, $x \in D \subset R^m$, $h=1$ - крок різницевого

рівняння,

$$x_n = x_n(t_0 + n), \quad x_0(t_0) = x_0.$$

Функція $X_n(x) = X(n, x)$ визначена при $x \in D$, $n \geq 0$, неперервна та ліпшицева по x .

Нехай $M \subset Z^+ \times R^m$, M_{n_0} – переріз M гіперплощиною $n = n_0$, $n_0 \in Z^+$.

Означення 1 Множину $M \subset D$ назовемо додатно інваріантною множиною системи (2), якщо розв'язок $x_n(x)$ системи (2) такий, що

$$x_n(x_0) \in M_{n_0},$$

має властивість:

$$x_n(x) \in M_n \quad \text{для} \quad n \in Z^+.$$

Означення 2 Додатно інваріантну множину M системи (2) назовемо стійкою при $n \geq n_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, що якщо

$$\rho(x_{n_0}, M_{n_0}) < \delta,$$

то

$$\rho(x_n(x), M_n) < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \in Z^+.$$

Нехай D_1 - обмежена область, що міститься в D з деяким своїм оточенням, $\overline{D_1}$ - замикання D_1 .

Означення 3 Функцію $V(x)$, визначену в $\overline{D_1}$, будемо називати знакосталою в D_1 , якщо для всіх $x \in D_1$ ненульові значення функції $V(x)$ мають один і той же знак. Знакосталу в D_1 функцію $V(x)$ назовемо знаковизначеною в D_1 , якщо множина її нулів є непорожньою і компактною в D_1 .

Позначимо через $x_n(n_0, x)$ розв'язок системи (2) такий, що $x_{n_0}(n_0, x) = x$, $x_n(n_0, x) \in D$ для довільного $n \in Z^+$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 Нехай система (2) має при $n \geq 0$, $x \in D$ додатно інваріантний рівномірно стійкий многовид M такий, що $\text{Pr}_{R^m} M$ компактна в D .

Тоді в деякому оточенні D_1 множини M існує послідовність функцій $V_n(x)$ з властивостями:

1) $V_n(x)$ – додатно визначена рівномірно по $n \geq 0$:

$$\inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} V_k(x) = V_\varepsilon > 0 \quad (3)$$

при довільному $\varepsilon > 0$;

2) $\Delta V_n(x)$ – недодатно визначена:

$$\Delta V_n(x) = V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) \leq 0,$$

при $n \geq 0$, $x \in D_1$;

3) множина нулів функції $V_n(x)$ співпадає з M , тобто

$$M = \{(n, x_n) : V_n(x) = 0, n \geq 0, x \in D\}.$$

Доведення. Для доведення розглянемо наступну послідовність функцій

$$V_n(x) = \sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k),$$

де $\rho(x_k(n, x), M_k) = \min_{y \in M_k} \|x_k(n, x), y\|$.

Тоді

$$\begin{aligned} & \inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} V_k(x) = \\ & = \inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} \sup_{n \geq k} \rho^2(x_n(k, x), M_n) \geq \\ & \geq \inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} \rho^2(x, M_k) > \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} V_k(x) = V_\varepsilon > 0,$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Далі

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x) &= V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) = \\ &= \sup_{k \geq n+1} \rho^2(x_k(n, x), M_k) - \\ &- \sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k) \leq 0, \end{aligned}$$

оскільки друга множина містить більше елементів.

Для доведення пункту 3) скористаємося тим, що M - додатно стійкий многовид. Тоді для довільного $k \geq 0$ маємо

$$\rho(x_k(n, x), M_k) = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$V_n(x) = 0.$$

Якщо ж $V_n(x) = 0$, то

$$\sup_{k \geq n} \rho^2(x_k(n, x), M_k) = 0,$$

а тому

$$\sup_{k \geq n} \rho(x_k(n, x), M_k) = 0.$$

Тоді $x_k(n, x) \in M_k$ для довільного $k \geq 0$, а отже M – додатно стійка множина.

Теорему доведено.

Наступні дослідження присвячені вивченню зв'язку між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь. В [5] приведено умови існування та стійкості інваріантної множини системи диференціальних рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова $V_h(x)$ системи різницевих рівнянь.

А саме отримано наступний результат.

Теорема 2 Нехай $V_h(x)$ знаковизначена в D_1 функція, для якої $\Delta V_h(x)$, де

$$\Delta V_n(x) = V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) \leq 0$$

знакостала в D_1 , сім'я функцій $V_h(x)$ рівномірно збігається по x (при $h \rightarrow 0$) до $V(x) \in C^1(D_1)$ та множина нулів $N_0(h)$:

$$V_h(x) = 0, \quad x \in D_1$$

рівномірно відділена по h від границі області ∂D_1 , тобто існують такий крок $h_0 > 0$ та

числове значення $\gamma > 0$, що $\rho(N_0(h), \partial D_1) > \lambda, \quad \forall h \leq h_0$.

Тоді система диференціальних рівнянь має інваріантну множину, якщо знаки $V_h(x)$ та $\Delta V_h(x)$ різні.

В даній роботі розглянемо обернену задачу, тобто отримаємо умови існування та стійкості інваріантної множини системи різницевих рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова системи диференціальних рівнянь.

Отже, нехай маємо автономну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (4)$$

та відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + hX(x_n), \quad (5)$$

де $n \geq 0, x \in D \subset R^m, h > 0$ - крок різницевого рівняння, функція $X(x)$ – обмежена, ліпшицева в D .

Тоді має місце теорема.

Теорема 3 Нехай існує додатно визначена

гладка функція $V = V(x)$ така, що $\frac{\partial V}{\partial x} -$

ліпшицева та

$$\dot{V} = \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} X(x)$$

– недодатно визначена в D функція.

Тоді система (5) має додатно інваріантну стійку множину, якщо знаки функцій $V(x)$ та $\dot{V}(x)$ різні.

Доведення. Нехай маємо, що $V(x) \geq 0$ та $\dot{V}(x) \leq 0$ для $x \in \overline{D_1}$. Із [1, с.68] випливає, що множина

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1$$

є додатно інваріантною множиною системи (4).

Оскільки $V(x)$ – додатно визначена, то множина її нулів непорожня та компактна.

Множина нулів функції $\dot{V}(x)$ є також

непорожньою та компактною, оскільки $\dot{V}(x)$ – недодатно визначена в D .

Розглянемо наступну функцію

$$V_h(x) = \begin{cases} V(x), & \dot{V}(x) < 0; \\ 0, & \dot{V}(x) = 0. \end{cases}$$

Множину нулів функції $V_h(x)$ позначимо через

$$N_0^h = \{x : V_h(x) = 0\}.$$

Враховуючи вигляд функції $V_h(x)$ маємо, що

множина N_0^h виглядає наступним чином:

$$N_0^h = \{x : V(x) = 0\} \cup \{x : \dot{V}(x) = 0\}.$$

За наслідком [1, с.66] маємо, що

$$N_0^h = \{x : V_h(x) = 0\} = \{x : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Оскільки $V(x) \in C^1(D_1)$, то для неї існує похідна за довільним напрямом у будь-якій точці:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \leq 0,$$

для будь-якого $x \in D_1$.

Це означає, що існує такий крок $h_0 > 0$, що для довільного $h < h_0$ виконується нерівність

$$\Delta V(x) = V(x + hX(x)) - V(x) \leq 0.$$

Відмітимо також, що справедлива поточкова збіжність, а саме

$$\frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \rightarrow \dot{V}(x),$$

при $h \rightarrow 0$.

Покажемо, що крок h_0 не залежить від x .

Позначимо через

$$f_h(x) = \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h}.$$

Враховуючи, що функція $V(x)$ – ліпшицева, а

$X(x)$ – обмежена, отримаємо оцінку для $|f_h(x)|$,

а саме

$$\begin{aligned} |f_h(x)| &= \left| \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} \right| = \\ &= \frac{1}{h} |V(x + hX(x)) - V(x)| \leq |X(x)| \leq C. \end{aligned}$$

Далі, із того, що $\frac{\partial V}{\partial x}$ – ліпшицева, а $X(x)$ –

обмежена, матимемо оцінку

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left[\frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} \left(E + h \frac{\partial X}{\partial x} \right) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + h \frac{\partial V(x + hX(x))}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \right] \leq C_1. \end{aligned}$$

За рахунок малості h можемо стверджувати, що $x + hX(x) \in D$ для $x \in D$.

Будемо розглядати функцію $f_h(x)$, для якої виконуються умови Ліпшиця, поточкова збіжність та рівностепенна неперервність. Тоді можемо стверджувати, що буде справедливою рівномірною збіжністю функції $f_h(x)$:

$$f_h(x) \rightarrow f(x), \text{ при } h \rightarrow 0,$$

тобто буде виконуватися

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D:$$

$$|f_{h_n}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Припустимо, що це не вірно. Це означає, що існує $\varepsilon > 0$ та послідовність x_n така, що $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, що буде виконуватися

$$|f_{h_n}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

З іншої сторони маємо:

$$\begin{aligned} |f_{h_n}(x_n) - f(x_n)| &= \\ &= |f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0) + f_{h_n}(x_0) - f(x_0) + \\ &\quad + f(x_0) - f(x_n)| \leq |f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0)| + \\ &\quad + |f_{h_n}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_n) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Оцінимо доданки в останній нерівності. Оскільки $f_h(x)$ – ліпшицева, а $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$, то

$$|f_{h_n}(x_n) - f_{h_n}(x_0)| \leq L|x_n - x_0| \rightarrow 0.$$

Аналогічно отримаємо, що

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq L|x_n - x_0|.$$

Із поточної збіжності випливає, що другий доданок прямує до нуля. Прийшли до протиріччя.

Отже із [7] випливає, що система (5) має додатно інваріантну стійку множину.

Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. 1987. -304 с.
2. *Игнатьев А.О.* О существовании функции Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств// Укр. мат. журн. т.45, № 7 (1993), с. 932 – 941.
3. *Станжицький О. М.* Дослідження інваріантних множин систем з випадковими збуреннями за допомогою функцій Ляпунова// Укр. мат. журн. т.50, № 2 (1998), с. 309 - 312.
4. *Ateiwi A. M.* To the problem on periodic solutions of one class of systems of difference equations // Укр. мат. журн. т. 49, № 2 (1997), с. 309 – 314
5. *Ткачук А. М.* Зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь// Нелінійні коливання. т. 9, № 2 (2006), с. 280 - 285.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. – 472 с.
7. *Ткачук А. М.* Инваріантні множини різницевих систем та їх стійкість//

Нелінійні коливання. Т. 8, № 2 (2005), с.
258 - 264.