

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В MATHCAD

Д.В. Несвітайло

Національний університет харчових технологій

Однією із областей застосування частинних похідних є розв'язання задач аналітичної геометрії. В будь-якому практикумі з вищої математики є приклади знаходження дотичних площин та нормалей до поверхонь, а також дотичних прямих та нормальних площин до просторових ліній. При наявності готових формул такі задачі є простими з математичної точки зору. Але їх розв'язання пов'язане з підрахунком великої кількості частинних похідних і визначників, тому в обчислювальному плані вони можуть бути вкрай складними. Значну частину роботи при розв'язанні таких задач можна виконати за допомогою математичного пакету MathCad.

Складність задач знаходження рівняння дотичної площини та нормалі залежить від того, в якій формі задається рівняння поверхні. Якщо поверхня описується явним (наприклад, параболоїд $z(x,y) = x^2 + y^2$) або неявним (наприклад, куля $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$) рівнянням, то знайти рівняння дотичної площини та нормалі нескладно. Але задача стає на порядок складнішою, якщо поверхня описується за допомогою системи параболічних рівнянь. Оскільки часто поверхні задаються в параметричній формі, то подібні задачі не є рідкісними. В MathCad параметрична форма описування поверхонь є основною, оскільки така форма дозволяє будувати якісні графіки. Розглянемо задачу: маємо сферу радіусом $R = 5$ з центром в початку координат. Побудувати дотичні площини, які проходять через точки сфери з відповідними значеннями аргументів $x = 2, y = 3$, а також нормалі до поверхні в цих точках.

Рівняння дотичної площини для параметрично заданої поверхні можна знайти, розкривши відповідний визначник і виділивши Z в ліву частину рівності:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки X, Y, Z — змінні рівняння площини; x_0, y_0, z_0 — координати точки, в якій поверхня і площина дотикаються; x_u, y_u, z_u — значення частинних похідних параметричних рівнянь по змінній u в точці дотику, x_v, y_v, z_v — значення частинних похідних параметричних рівнянь по v .

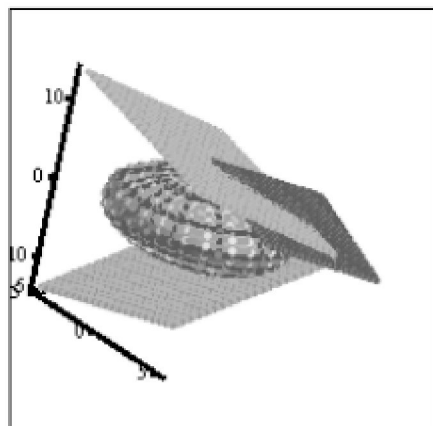
Якщо рівняння дотичної знайдено то далі знаходимо рівняння нормалей. Використовуємо формулу нормалі до параметрично заданої поверхні:

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

де X, Y, Z — змінні рівняння; x_0, y_0, z_0 — координати загальної точки поверхні та нормалі; x_u, y_u, z_u та x_v, y_v, z_v — значення частинних похідних параметричних рівнянь по u та v в точці перетину нормаллю поверхні.

Функція CreateSpace дозволяє в MathCad будувати просторові параметрично задані криві, приймає систему рівнянь, які описують лінію, у вигляді вектора.

Будуємо сферу дотичні площини та нормалі.



$(x, y, z), Z1, Z2, \text{CreateSpace}(na1, -0.5, 0.3, 100)$

Наукові керівники: О.І. Сєдих, С.В. Маковецька, А.С. Богатирчук.