ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Олег МАЗУР — старший викладач кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій;
Алла ТКАЧУК — доцент кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій, кандидат фізико-математичних наук

Анотація. У статті розглянуто типи логарифмічних нерівностей та способи їх розв'язування і наведено варіанти для самостійного опрацювання.
Ключові слова: нерівність, логарифм, область визначення.

Мазур Олег, Ткачук Алла. Логарифмические неравенства
Аннотация. В статье рассматриваются типы логарифмических неравенств и способы их решения и приводятся варианты для самостоятельной работы.
Ключевые слова: неравенство, логарифм, область определения.

Mazur Oleg, Tkachuk Alla. Logarithmic inequality.
Summary. The article describes the types of logarithmic inequalities and their solutions, and provides options for independent analysis.
Keywords: inequality, logarithm, the domain of definition.

I. Логарифмічні нерівності

Найпростішими логарифмічними нерівностями є нерівності $\log_a x > b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x \leq b$ $(x > 0,\ 0 < a \neq 1)$ (1).

Розв'язання найпростіших логарифмічних нерівностей базується на властивостях монотонності логарифма.

Логарифмічна функція $\log_a x$ при $a > 1$ монотонно зростаюча, тобто при основі, більшій ніж одиниця, більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента і, навпаки, — меншому значенню аргумента відповідає менше значення функції, а при $0 < a < 1$ — монотонно спадна, тобто при основі, що змінюється від нуля до одиниці, більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента і, навпаки, — меншому значенню аргумента відповідає більше значення функції.

Приклад 1. Розв'язати подвійну нерівність $\alpha < \log_a x < \beta$ $(0 < a \neq 1)$ (2).

Розв'язання. Логарифмічна функція $\log_a x$ при $a > 1$ монотонно зростаюча, а при $0 < a < 1$ — монотонно спадна. Отже, при $a > 1$ подвійна нерівність (2) має розв'язок $a^\alpha < x < a^\beta$, а при $0 < a < 1$ — розв'язок $a^\alpha > x > a^\beta$.

Відповідь. При $a > 1$ $x \in (a^{\alpha}; a^{\beta})$; при $0 < a < 1$ $x \in (a^{\beta}; a^{\alpha})$.

1. Нерівності виду $\log_a x > b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \ge b$, $\log_a x \le b$.

Нерівність $\log_a x > b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x > a^b, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < a^b, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \ge b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x \ge a^b, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \le a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a x < b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x < a^b, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > a^b, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \le b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x \le a^b, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

У даних переходах від найпростішої логарифмічної нерівності до еквівалентних систем нерівностей, що не містять знака логарифма, врахована область допустимих значень вихідної нерівності.

Розв'язання будь-якої нестрогої логарифмічної нерівності відрізняється від розв'язання відповідної строгої логарифмічної нерівності тільки включенням у множину всіх її розв'язків множини коренів логарифмічного рівняння.

Частинні випадки.

Нерівність $\log_a x > -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} x > \frac{1}{a}, \\ a > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{a}, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a x \ge -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{a}, \\ a > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{a}, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a x < -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{a}, \\ a > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{a}, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a x \le -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{a}, \\ a > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge \frac{1}{a}. \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a x > 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x > 1, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \ge 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x \ge 1, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a x < 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \le 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a x > 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x > a, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < a, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \ge 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} x \ge a, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \le a, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a x < 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x < a, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a x \le 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases} 0 < x \le a, \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge a, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a^2 x > 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ 0 < a \ne 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a^2 x \ge 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < a \ne 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a^2 x < 0$ при $x > 0$ і $0 < a \ne 1$ розв'язків не має, а нерівність $\log_a^2 x \le 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} x = 1, \\ 0 < a \ne 1. \end{cases}$

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\log_{\log_3 5 - \log_2 3} x > 125.$$

Розв'язання. З'ясуємо знак числа $\log_3 5 - \log_2 3$, тобто порівняємо $\log_2 3$ і $\log_3 5$. Спробуємо підібрати таке раціональне число n, яке б розділило дані числа, тобто було б більше ніж одне з них, але менше ніж інше. Зауважимо, що обидва логарифми більші ніж 1 і менші ніж 2.

Спробуємо порівняти їх з $\frac{3}{2}$. Виявляється, $\log_2 3 > \frac{3}{2}$, оскільки $3 > 2^{\frac{3}{2}}$, $3^2 > 2^3$, а $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, оскільки $5^2 < 3^3$. Отже, $\log_2 3 > \log_3 5$, а $\log_3 5 - \log_2 3 < 0$ і задана нерівність в області дійсних чисел розв'язку не має.

Відповідь. $x \in \varnothing$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{7^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 7}}} x \le 1$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c$, де $c > 0$, $0 < a \ne 1$, $0 < b \ne 1$, і основну логарифмічну тотожність $a^{\log_a N} = N$, де $N > 0$ і $0 < a \ne 1$, маємо $7^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 7}} = 7^{\log_7 \lg 2} = \lg 2$. Тоді початкова нерівність набуде вигляду $\log_{\lg 2} x \le 1$, звідки, оскільки $0 = \lg 1 < \lg 2 < \lg 10 = 1$, знаходимо $x \ge \lg 2$.

Відповідь. $x \in [\lg 2; +\infty)$.

2. Нерівність $\log_x a > b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\0<a<x^b,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\a>x^b\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x>a^{\frac{1}{b}},\\a>0,\\b\ne 0,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x<a^{\frac{1}{b}},\\b\ne 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

а нерівність $\log_x a \ge b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\0<a\le x^b,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\a\ge x^b\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x\ge a^{\frac{1}{b}},\\a>0,\\b\ne 0,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x\le a^{\frac{1}{b}},\\b\ne 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Нерівність $\log_x a < b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\a>x^b,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\0<a<x^b\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x<a^{\frac{1}{b}},\\b\ne 0,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x>a^{\frac{1}{b}},\\a>0,\\b\ne 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

а нерівність $\log_x a \le b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\a\ge x^b,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\0<a\le x^b\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x\le a^{\frac{1}{b}},\\b\ne 0,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x\ge a^{\frac{1}{b}},\\a>0,\\b\ne 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Частинні випадки.

Нерівність $\log_x a > -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases}0<x<1,\\x<\frac{1}{a},\\a>0\end{cases} \quad \begin{cases}x>1,\\x>\frac{1}{a},\\a>0,\end{cases}$$

а нерівність $\log_x a \ge -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases}0<x<1,\\x\le\frac{1}{a},\\a>0\end{cases} \quad \begin{cases}x>1,\\x\ge\frac{1}{a},\\a>0.\end{cases}$$

Нерівність $\log_x a < -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases}0<x<1,\\x>\frac{1}{a},\\a>0\end{cases} \quad \begin{cases}x>1,\\x<\frac{1}{a},\\a>0,\end{cases}$$

а нерівність $\log_x a \le -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases}0<x<1,\\x\ge\frac{1}{a},\\a>0\end{cases} \quad \begin{cases}x>1,\\x<\frac{1}{a},\\a>0.\end{cases}$$

Нерівність $\log_x a > 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}0<a<1,\\0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}a>1,\\x>1,\end{cases}$ а нерівність $\log_x a \ge 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}0<a\le 1,\\0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge 1,\\x>1.\end{cases}$

Нерівність $\log_x a < 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}a>1,\\0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}0<a<1,\\x>1,\end{cases}$ а нерівність $\log_x a \le 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}a\ge 1,\\0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}0<a\le 1,\\x>1.\end{cases}$

Нерівність $\log_x a > 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}0<a<x,\\ 0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}a>x,\\ x>1,\end{cases}$ а нерівність $\log_x a \geq 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}0<a\leq x,\\ 0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}a\geq x,\\ x>1.\end{cases}$

Нерівність $\log_x a < 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}a>x,\\ 0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}0<a<x,\\ x>1,\end{cases}$ а нерівність $\log_x a \leq 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей $\begin{cases}a\geq x,\\ 0<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}0<a\leq x,\\ x>1.\end{cases}$

Нерівність $\log_x^2 a>0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases}0<a\neq 1,\\ 0<x\neq 1,\end{cases}$ а нерівність $\log_x^2 a\geq 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases}a>0,\\ 0<x\neq 1.\end{cases}$

Нерівність $\log_x^2 a<0$ при $a > 0$ і $0 < x \neq 1$ розв'язків не має, а нерівність $\log_x^2 a\leq 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases}a=1,\\ 0<x\neq 1.\end{cases}$

Приклад 4. Розв'язати нерівність
$\log_x(\log_2 5 \cdot \log_5 10 \cdot \log_{10} 16) >$
$> \sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо
$\log_2 5 \cdot \log_5 10 \cdot \log_{10} 16$ та
$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Маємо:

$\log_2 5 \cdot \log_5 10 \cdot \log_{10} 16 = \log_2 5\cdot\frac{\log_2 10}{\log_2 5}\times$
$\times\ \frac{\log_2 16}{\log_2 10}=\log_2 16=4$.

Нехай $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=a$. Піднесемо до куба обидві частини цієї рівності. Одержимо $\left(20+\sqrt{392}\right)+3\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^2\times$
$\times\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^2+$
$+\left(20-\sqrt{392}\right)=a^3$, або

$40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\ \times$
$\times\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)=a^3$, де
$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=a$.

Таким чином, $40+3\sqrt[3]{20^2-\left(\sqrt{392}\right)^2}\cdot a=a^3$, $40 + 6a = a^3$, $a^3 - 6a - 40 = 0$, $(a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0$, $a = 4$ $(a^2 + 4a + 10 > 0$ $(D < 0))$.

Отже, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$.

Після цього початкова нерівність набуває вигляду $\log_x 4 > 4$. Вона еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}x>1,\\ x<4^{\frac{1}{4}}\end{cases}$ $\begin{cases}0<x<1,\\ x>4^{\frac{1}{4}}.\end{cases}$

З першої системи знаходимо $x\in\left(1;\sqrt{2}\right)$. Друга система розв'язків не має.

3. Нерівності виду $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) \geq b$, $\log_a f(x) \leq b$, де f — деяка функція.

Нерівність $\log_a f(x) > b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}f(x)>a^b,\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}0<f(x)<a^b,\\ 0<a<1,\end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \geq b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}f(x)\geq a^b,\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}0<f(x)\leq a^b,\\ 0<a<1.\end{cases}$

Нерівність $\log_a f(x) < b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}0<f(x)<a^b,\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)>a^b,\\ 0<a<1,\end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \leq b$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}0<f(x)\leq a^b,\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)\geq a^b,\\ 0<a<1.\end{cases}$

Частинні випадки.

Нерівність $\log_a f(x) > -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}f(x)>\frac{1}{a},\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}0<f(x)<\frac{1}{a},\\ 0<a<1,\end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \geq -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}f(x)\geq\frac{1}{a},\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}0<f(x)\leq\frac{1}{a},\\ 0<a<1.\end{cases}$

Нерівність $\log_a f(x) < -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}0<f(x)<\frac{1}{a},\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)>\frac{1}{a},\\ 0<a<1,\end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \leq -1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$\begin{cases}0<f(x)\leq\frac{1}{a},\\ a>1,\end{cases}$ $\begin{cases}f(x)\geq\frac{1}{a},\\ 0<a<1.\end{cases}$

Нерівність $\log_a f(x) > 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)>1, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0<f(x)<1, \\ 0<a<1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \geq 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)\geq 1, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0<f(x)\leq 1, \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a f(x) < 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)>1, \\ 0<a<1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \leq 0$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0<f(x)\leq 1, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)\geq 1, \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a f(x) > 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)>a, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0<f(x)<a, \\ 0<a<1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \geq 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)\geq a, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0<f(x)\leq a, \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a f(x) < 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0<f(x)<a, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)>a, \\ 0<a<1, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \leq 1$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} 0<f(x)\leq a, \\ a>1, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)\geq a, \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a^2 f(x)>0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1, \end{cases}$ а нерівність $\log_a^2 f(x)\geq 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} f(x)>0, \\ 0<a\neq 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a^2 f(x)<0$ при $f(x) > 0$ і $0 < a \neq 1$ розв'язків не має, а нерівність $\log_a^2 f(x)\leq 0$ еквівалентна змішаній системі $\begin{cases} f(x)=1, \\ 0<a\neq 1. \end{cases}$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_5 (x^2 - 11x + 43) < 2$.

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна системі нерівностей $x^2 - 11x + 43 < 25$, $x^2 - 11x + 43 > 0$. Розв'язком першої нерівності є інтервал $2 < x < 9$, другої — $x \in R$ $(D < 0)$. Перетин множин розв'язків дає відповідь.

Відповідь. $x \in (2; 9)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_2\left(x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right)\geq 3.$$

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна нерівності $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\geq 8$. Маємо

$$x^2+2x\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\frac{x}{x-1}-8\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8\geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8\geq 0$. Покладаючи $\frac{x^2}{x-1}=t$, одержуємо нерівність $t^2 - 2t - 8 \geq 0$, звідки знаходимо $\left[\begin{array}{l} t\geq 4, \\ t\leq -2. \end{array}\right.$

Таким чином, початкова нерівність еквівалентна об'єднанню нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x-1}\geq 4, \\ \frac{x^2}{x-1}\leq -2. \end{array}\right.$$

З першої нерівності знаходимо $x > 1$, а з другої $x\leq -1-\sqrt{3}$ та $-1+\sqrt{3}\leq x<1$.

Виходить, розв'язками цього об'єднання, а отже, і початкової нерівності є проміжки $-\infty<x\leq -1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}\leq x<1$, $1 < x < +\infty$.

Відповідь.

$$x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[-1+\sqrt{3};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Приклад 7. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x\right)>-1.$$

Розв'язання. Оскільки основа логарифма $0<\frac{1}{2}<1$, то задана нерівність еквівалентна подвійній нерівності $0 < x^3 + x < 2$ або системі нерівностей

$$\begin{cases} x^3+x>0, \\ x^3+x-2<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\left(x^2+1\right)>0, \\ (x-1)\left(x^2+x+2\right)<0. \end{cases}$$

Оскільки $x^2 + 1 > 0$ при $x \in R$ і $x^2 + x + 2 > 0$ $(D < 0)$, то маємо $x > 0$ і $x - 1 < 0$, звідки $0 < x < 1$.

Відповідь. $x \in (0; 1)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність

$$\log_2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}\right)<-1.$$

Розв'язання. Основа логарифма 2 > 1; тому задана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}>0,\end{cases}$$

тобто системі $\begin{cases}\frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x-2)}<0,\\ \frac{x^2-7x+2}{(x+1)(x-2)}<0\end{cases}$

або $\begin{cases}\frac{\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{6}\right)\right)}{(x+1)(x-2)}<0,\\ \frac{\left(x-\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)}{(x+1)(x-2)}<0.\end{cases}$

З першої нерівності останньої системи знайдемо $x\in\left(-1;2-\sqrt{6}\right)\cup\left(2;2+\sqrt{6}\right)$, а з другої —

$x\in\left(-1;\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)\cup\left(2;\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)$.

Перетин множин розв'язків кожної з нерівностей системи є об'єднання проміжків $-1<x<2-\sqrt{6}$ та $2<x<2+\sqrt{6}$, яка і є множиною всіх розв'язків вихідної нерівності.

Відповідь. $x\in\left(-1;2-\sqrt{6}\right)\cup\left(2;2+\sqrt{6}\right)$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right)\geq 0$.

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна подвійній нерівності $0<\log_4(x^2-5)\leq 1$, яка в свою чергу еквівалентна подвійній нерівності $1<x^2-5\leq 4$ або $6<x^2\leq 9$. Звідси маємо систему

$$\begin{cases}-3\leq x\leq 3,\\ \left[\begin{array}{l}x>\sqrt{6},\\ x<-\sqrt{6},\end{array}\right.\end{cases}$$

з якої знаходимо $-3\leq x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x\leq 3$.

Відповідь. $x\in\left[-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right]$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність

$\log_2(4^x-5\cdot 2^x+4)<0$.

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна подвійній нерівності $0<4^x-5\cdot 2^x+4<1$, тобто системі нерівностей

$$\begin{cases}2^{2x}-5\cdot 2^x+4>0,\\ 2^{2x}-5\cdot 2^x+3<0.\end{cases}$$

Розв'язуючи першу нерівність системи як квадратну відносно 2^x, отримаємо $(2^x-4)(2^x-1)>0$, звідки знайдемо $x<0$, $x>2$, а з другої нерівності аналогічно знайдемо $\frac{5-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Перетинаючи множину розв'язків кожної з нерівностей системи, знайдемо відповідь:

$x\in\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2};0\right)\cup\left(2;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність

$\log_2(34-5(x-2)^2-3x^2(x-4)^2)>1$ (3).

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна нерівності $34-5(x-2)^2-3x^2(x-4)^2)>2$. Після перетворень одержуємо нерівність $3x^4-24x^3+53x^2-20x-12<0$ (4), рівносильну нерівності (3). Числа 1, 3, $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ і $2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ є коренями рівняння $3x^4-24x^3+53x^2-20x-12=0$; тому нерівність (4) рівносильна нерівності

$$(x-1)(x-3)\left(x-\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right)<0,$$

або, оскільки $2-\frac{4\sqrt{3}}{3}<1<3<2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$, нерівності

$$\left(x-\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right)(x-1)(x-3)\left(x-\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right)<0 \quad (5).$$

Застосовуючи метод інтервалів, одержуємо розв'язок нерівності (5), а отже, і нерівності (3) — множина $\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3};1\right)\cup\left(3;2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Відповідь. $x\in\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3};1\right)\cup\left(3;2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Приклад 12. Розв'язати нерівність

$\log_2\left(\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|+1\right)\leq 1$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна нерівності

$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|+1\leq 2$ або нерівності $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$,

яка рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\leq 1,\\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\geq -1.\end{cases}$$

Перша нерівність системі рівносильна нерівності $\frac{x-\frac{8}{5}}{(x-2)(x+2)}\geq 0$. Застосовуючи метод інтервалів, знаходимо її розв'язки — всі числа з проміжків $-2<x\leq\frac{8}{5}$ та $2<x<+\infty$, тобто множина $\left(-2;\frac{8}{5}\right]\cup(2;+\infty)$.

Друга нерівність системи рівносильна нерівності $\frac{x\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x+2)(x-2)}\geq 0$ і, застосовуючи знову метод інтервалів, знаходимо множину її розв'язків яка складається з об'єднання трьох проміжків:

$$(-\infty;-2)\cup[0;\,2)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right).$$

Перетин отриманих двох множин складає множину розв'язків початкової нерівності, тобто множину $\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Відповідь. $x\in\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

4. Нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \leq$ $\leq \log_a g(x)$, де f і g — деякі функції.

Нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ a>1, \\ g(x)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)<g(x), \\ 0<a<1, \\ f(x)>0, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ a>1, \\ g(x)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)\leq g(x), \\ 0<a<1, \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ a>1, \\ f(x)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)>g(x), \\ 0<a<1, \\ g(x)>0, \end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ еквівалентна об'єднанню двох систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x)\leq g(x), \\ a>1, \\ f(x)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ 0<a<1, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Частинні випадки.

Нерівності $\log_a f(x) > \log_a f(x)$ та $\log_a f(x) <$ $< \log_a f(x)$ на множині $f(x) > 0$ і при $0 < a \neq 1$ розв'язків не мають, а нерівності $\log_a f(x) \geq$ $\geq \log_a f(x)$ та $\log_a f(x) \leq \log_a f(x)$ еквівалентні змішаній системі $\begin{cases} f(x)>0, \\ 0<a\neq 1. \end{cases}$

Нерівність $\log_a f(x) > \log_{f(x)} a$. Ця нерівність еквівалентна змішаній системі

$$\begin{cases} \log_a f(x)>\dfrac{1}{\log_a f(x)}, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо її.

Маємо:

$$\begin{cases} \log_a f(x)>\dfrac{1}{\log_a f(x)}, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x)-\dfrac{1}{\log_a f(x)}>0, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_a^2 f(x)-1}{\log_a f(x)}>0, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(\log_a f(x)-1)(\log_a f(x)+1)}{\log_a f(x)}>0, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_a f(x)-1)(\log_a f(x)+1)\log_a f(x)>0, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1<\log_a f(x)<0, \\ \log_a f(x)>1, \end{array}\right. \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1<\log_a f(x)<0, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_a f(x)>1, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a\neq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<f(x)<\dfrac{1}{a}, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a<1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{a}<f(x)<1, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ a>1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<a, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ 0<a<1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)>a, \\ 0<f(x)\neq 1, \\ a>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<f(x)<\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{a}<f(x)<1,\\a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<f(x)<a,\\0<a<1,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>a,\\a>1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, нерівність $\log_a f(x) > \log_{f(x)} a$ еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей

$$\begin{cases}1<f(x)<\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{a}<f(x)<1,\\a>1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<f(x)<a,\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}f(x)>a,\\a>1.\end{cases}$$

А нерівність $\log_a f(x) \ge \log_{f(x)} a$ еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей

$$\begin{cases}1<f(x)\le\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{a}\le f(x)<1,\\a>1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<f(x)\le a,\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}f(x)\ge a,\\a>1.\end{cases}$$

Аналогічно, нерівність $\log_a f(x) < \log_{f(x)} a$ еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей

$$\begin{cases}f(x)>\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases} \begin{cases}0<f(x)<\frac{1}{a},\\a>1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<f(x)<1,\\0<a<1,\end{cases} \begin{cases}1<f(x)<a,\\a>1,\end{cases}$$

а нерівність $\log_a f(x) \le \log_{f(x)} a$ еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей

$$\begin{cases}f(x)\ge\frac{1}{a},\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}0<f(x)\le\frac{1}{a},\\a>1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\le f(x)<1,\\0<a<1,\end{cases} \quad \begin{cases}1<f(x)\le a,\\a>1.\end{cases}$$

Приклад 13. Розв'язати нерівність

$$\log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right)>\log_3\left(x^2-2\right).$$

Розв'язання. Оскільки основа логарифмів $3 > 1$, то задана нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases}\frac{3}{2}|x|-1>x^2-2,\\x^2-2>0,\end{cases}$ яку, враховуючи, що $x^2 = |x|^2$, можна переписати у вигляді

$$\begin{cases}\frac{3}{2}|x|-1>|x|^2-2,\\|x|^2-2>0.\end{cases}$$

Покладемо $|x| = t$, звідси отримуємо систему (відносно t)

$$\begin{cases}t\ge 0,\\t^2-2>0,\\2t^2-3t-2<0;\end{cases} \quad \begin{cases}t\ge 0,\\\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)>0,\\2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\ge 0,\\t-\sqrt{2}>0,\\t-2<0;\end{cases} \quad \sqrt{2}<t<2.$$

Отже, початкова нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{2}<|x|<2$, звідки випливає, що множина всіх розв'язків початкової нерівності складається з проміжків $-2<x<-\sqrt{2}$ та $\sqrt{2}<x<2$.

Відповідь. $x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$.

Приклад 14. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6\right)+\log_9 x^2\ge 0 \qquad (6).$$

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності (6) визначається умовами $x^2 - 6 > 0$ і $x^2 > 0$, тобто $x\in\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$ (7).

Оскільки $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6\right)=-2\log_9\left(x^2-6\right)$, то нерівність (6) еквівалентна нерівності $\log_9 x^2 \ge 2\log_9(x^2-6)$ або нерівності $\log_9 x^2 \ge \log_9(x^2-6)^2$, яка, враховуючи, що основа логарифмів $9 > 1$, рівносильна нерівності $x^2 \ge (x^2-6)^2$, або біквадратній нерівності $x^4 - 13x^2 + 36 \le 0$, з якої знаходимо $4 \le x^2 \le 9$, або $x \in [-3; -2] \cup [2; 3]$. Враховуючи ОДЗ (7), маємо відповідь: $x\in\left[-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right]$.

Приклад 15. Розв'язати нерівність

$$\lg\sqrt{5x^2+10x+1}\ge\lg\left(7-x^2-2x\right) \ (8).$$

Розв'язання. Нерівність (8) еквівалентна системі нерівностей

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-x^2-2x,\\7-x^2-2x>0.\end{cases}$$

Зробивши заміну $x^2 + 2x = y$, одержимо відносно змінної y нерівність $\sqrt{5y+1}\ge 7-y$ (9). Нерівність (9) рівносильна системі нерівностей $\begin{cases}7-y>0,\\5y+1\ge(7-y)^2,\end{cases}$ тобто системі $\begin{cases}y<7,\\y^2-19y+48\le 0,\end{cases}$ з якої знайдемо $3 \le y < 7$.

Повертаючись до змінної x, одержуємо $3 \le x^2 + 2x < 7$, або $x^2 + 2x - 3 \ge 0$ і $x^2 + 2x - 7 < 0$, звідки знаходимо $-1-2\sqrt{2} < x \le -3$ і $1 \le x < -1+2\sqrt{2}$.

Відповідь. $x \in \left(-1-2\sqrt{2}; -3\right] \cup \left[1; -1+2\sqrt{2}\right)$.

Приклад 16. Розв'язати нерівність
$\log_{\pi}(2 \cos 2x + \sin 2x) > \log_{\pi} \operatorname{tg} x$ (10).

Розв'язання. Оскільки основа логарифмів $\pi > 1$, то задана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} 2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

Зробимо універсальну раціоналізуючу підстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тоді система нерівностей набуває вигляду

$$\begin{cases} 2\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2} > t, \\ t > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{t^3+2t^2-t-2}{1+t^2} < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (11).$$

Оскільки $1 + t^2 > 0$ при будь-яких t, то отримана дробова нерівність системи (11) еквівалентна нерівності $t^3 + 2t^2 - t - 2 < 0$ або $(t - 1)(t + 1)(t + 2) < 0$ (12). Розв'язками нерівності (12) є значення t з проміжків $t < -2$, $-1 < t < 1$. Врахувавши значення $t > 0$, маємо розв'язок системи (11): $0 < t < 1$.

Таким чином, нерівність (10) еквівалентна подвійній нерівності $0 < \operatorname{tg} x < 1$, звідки знаходимо $\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. (Избранные вопросы элементарной математики). — М., 1973. — 528 с.

2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы /В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др. // Под ред. М. И. Сканави. — Мн.: Высш. шк., 1990. — 528 с.

3. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. // Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 240 с.

4. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. // Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 432 с.

5. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение. 1991. — 325 с.

6. Математика. Тести. 5 — 12 класи: Посібник /В. І. Лагно, О. А. Москаленко, В. О. Марченко та ін. — 2-ге вид., стер. — К.: Академвидав, 2009. — 320 с.

7. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие // П. Т. Дыбов, А. И. Забоев, А. С. Иванов и др. // Под ред. А. И. Прилепко. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 1989. — 271 с.

8. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1991. — 384 с.

9. Шарыгин И. Ф. Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение, 1994. — 252 с.

10. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 576 с.

Далі буде