ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Н.Н. ЛУЗИНА/ Илмурадов Д.Д., Сафонов В.М.
– Киев, 1992. – 11 с. – (Препр. /АН Украины. Ин-т математики:92.36)

Рассматривается задача Н.Н. Лузина о существовании примитивной функции и уточняется формулировка решения Е.М. Ландиса этой задачи.

Библиогр. 4 назв.

Рецинзент канд. физ.-мат. наук О.В. Горленко

Утверждено к печати ученым советом
Института математики АН Украины

Уже к концу XIX века многие задачи анализа оказались связанными с различными восприятием понятия "подавляющие большинство точек". Сразу же в теории интеграла таким понятием явилось множество полной меры. Что же касается дифференциальных свойств функций, то оказалось, что им ближе не так мера, как категория. Например, известно [1], что существование частных производных функций многих переменных даже почти всюду не обеспечивает дифференцируемости ее хотя бы в одной точке. С другой стороны, существование таких производных на множестве не первой категории (пусть даже меры нуль) означает [2], что в некоторой подобласти функция будет даже липшицевой, а значит, и дифференцируемой почти всюду в этой области.

Вообще, что касается дифференциальных свойств и того, что может происходить на множестве полной меры, задачи решаются сравнительно легко. Куда сложнее оказываются задачи, связанные с категорией. Недаром вопрос о существовании примитивных на множестве второй категории был решен намного позднее решения его для случая множества полной меры.

Задача нахождения примитивных функций формулируется следующим образом: "Найти функцию $\Phi(x)$, имеющую данную функцию $f(x)$ своей производной".

Вперше Коши решил эту задачу дня непрерывной функции. Однако, его метод решения оказался недостаточным для случая, когда функция $f(x)$ разрывна или неограничена. Возник ряд работ, позволяющих определять примитивную функцию для более широкого класса задаваемых функций $f(x)$.

Задачу отнокания примитивных функций Н.Н. Лузин ставил следующим образом:

1. Найти необходимые и достаточные условия, чтобы $f(x)$. имела примитивную функцию.
2. Зная, что эти условия удовлетворены для $f(x)$. найти примитивную функцию.

Решая задачу 1, Н.Н. Лузин нашел необходимые условия существования примитивной функций и сформулировал следующим образом: для того, чтобы функция $f(x)$. имела примитивную, необходимо, чтобы $f(x)$. была измеримой функцией, конечной почти всюду на $[a,b]$. Он доказал, что эти условия были и достаточными условиями существования примитивной.

Тем самым задачи 1 и 2 были решены для случая множества полной меры. Но это множество оказывается, в общем случае, множеством первой категории. Н.Н. Лузиным был поставлен вопрос "Существует ли $\Phi(x)$, имеющая $f(x)$ своей производной в точках множества второй категории (хотя бы меры нуль)? Решение этого вопроса принадлежит Е.М. Ландису [3].

Мы приведем решение его в других терминах, одновременно уточнив и саму формулировку.

Пусть $\Phi(x)$ - некоторая непрерывная функция на $[a,b]$. Назовем ее *производным числом* в некоторой точке $x \in [a,b]$ число A, для которого существует последовательность $h_n \to 0$ такая, что

$$\frac{\Phi(x+h_n)-\Phi(x)}{h_n} \to A.$$

Множество всех производных чисел $\Phi(x)$ в точке x обозначим через m_x. *Теорема.*

Для того, чтобы $f(x)$ была производной некоторой непрерывной функции $\Phi(x)$ на множестве второй категории, необходимо и достаточно, чтобы на некотором множестве E, второй же категории, ограничение $f|_n$ было непрерывным. При этом, если такая $f(x)$. задана, то функцию $\Phi(x)$ можно предположить $AC-$функцией.

Доказательство. Необходимость.

Пусть $\Phi(x) = f(x)$ на множестве $E_1 \subset [a,b]$ второй категории. Рассмотрим многозначное отображение $x \to m_x$; по обобщенной теореме Бара существует множество $E_x \subset [a,b]$ второй категории точек полунепрерывности сверху этого отображения [4]. Так как на множестве $E = E_1 \cap E_2 \subset [a,b]$, также второй категории, функция $\Phi(x)$ обладает производной $\Phi'(x) = f(x) \quad (m_x)$, то отсюда и следует, что функция $f|_n$ непрерывна.

Доказательство достаточности мы сведем к нескольким леммам.

Лемма 1.

Пусть $f(x) = +00$ на некотором множестве второй категории в $[a,b]$. Тогда существует $AC-$функция, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ также на множестве второй категории.

Доказательство.

Возьмем произвольное множество M плотное на $[a,b]$ типа G_δ и меры нуль; это - множество второй категории на $[a,b]$.

Имеем $M = \prod\limits_n G_n$ где G_n - открытое множество, $G_{n+1} < G_n$ и *mea* $G_n < \dfrac{1}{2^n}$

Положим

$\varphi(x) = n$ на $G_n - G_{n+1}$,

I

$\varphi(x) = 0$ вне G_1,

$\varphi(x) = +00$ на $\prod\limits_n G_n$

функция $\varphi(x)$ суммируема. Действительно,

$\{\varphi(x)$ суммируема $\} \Leftrightarrow \{\Sigma n \; mea\{\varphi \geq n\}$ - сходится $\}$;

в самом деле, $\{\varphi(x) \geq n\} = \bigcup\limits_{m>n} \{\varphi > m\} < 1/2^n + 1/2^{n+1} + \ldots = 1/2^{n-1}$

ряд $\Sigma_1 \, n/2^{n-1} < 00$ сходится и отсюда следует суммируемость функции $\varphi(x)$. Положим, далее,

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(x)dx.$$

Из суммируемости $\varphi(x)$ вытекает существование интеграла и что, $\Phi(x)$ есть $AC-$функция. Каждая точка $x \in M$ является внутренней точкой для множества $\underset{n}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > n]$ при любом n и, следовательно, для этих точек существует $\Phi'(x)$ и равно $+00$. Конечно, ограничение $\Phi'|_M$ есть константа, равная $+00$, а потому в обощенном смысле - непрерывно. Нетрудно, однако показать, что в точках M имеет место непрерывность многозначного отображения $x \to m_x$ относительно всего отрезка $[a,b]$. Очевидно, что в точках множества $M \cap \{f(x) = 00\}$ второй категории на $[a,b]$ также $\Phi' = +00 = f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2.

Пусть $f(x)$ измеримая и ограниченная функция на $[a,b]$ и непрерывная в точках множества $E \subset [a,b]$ второй категории. Тогда существует непрерывная функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве E.

Доказательство.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$$

Ив непрерывности $f(x)$ на E обычным образом легко следует, что в каждой точке $x \in E$ имеем:

$\Phi'(x) = f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 3.

Какова бы ни была $AC-$функция $\Phi(x)$, данная на отрезке $[a,b]$, всегда существует на этом отрезка другая $AC-$ функция $\Phi_0(x)$, , обладающая следующими свойствами:

I

1. $\Phi_0{}'(x) = 0$ на множестве $M \subset [a,b]$ второй категории.

2. $\Phi_0(a)=\Phi(a)$ и $\Phi_0(b)=\Phi(b)$.

3. $|\Phi(x)-\Phi_0(x)|<\varepsilon$ на $[a,b]$, где $\varepsilon>0-$ бесконечно малая величина.

Доказательство.

Рассмотрим сначала на отрезке $[0,1]$ функцию меры (x) и некоторого нигде не плотного на $[0,1]$ совершенного множества p положительной меры в каждой своей порции:

$$\Theta(x)=\int_0^x C_p(t)dt = mea\{p\cap[0,1]\},$$

где $C_p(x)$ - характеристическая функция множества p. Монотонная функция $\Theta(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $\Theta'(x)=0$ во всех точках всюду плотного открытого множества на $[0,1]$, именно, не дополнение к p. Это открытое множество конечно не является множеством всюду второй категории на $[0,1]$.

Разделим отрезок $[a,b]$ точками:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-2}<x_n=b$$

так, чтобы на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ колебание функции $\Phi(x)$ было меньше чем $\varepsilon/2$. Далее на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ определим $AC-$ функцию $\Phi_0(x)$.

Тогда в качества $\Phi_0(x)$ получим

$$\Phi_0(x)=[\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})]\theta((x-x_{k-1})/(x_k-x_{k-1}))+\Phi(x_{k-1}) \qquad (1)$$

Из выполнимости $\Theta'(x)=0$ на множестве второй категорий и выполняется $\Theta'(x)=0$ – на том же множестве. Значит, 1 выполняется для $\Phi_0(x)$. Из (1) видно, что в концах каждого отрезка $[x_{k-1},x_k]$ выполняются и условия: и $\Phi_0(x_{k-1})=\Phi(x_{k-1})$ и $\Phi(x_k)=\Phi(x_k)$ тогда легко видеть выполнимость 2.

Пусть $x\in[a,b]$-- произвольная точка. Тогда найдется отрезок $[x_{k-1},x_k]$, содержащий эту точку, и, учитывая монотонность функции $\Phi_0(x)$, получим:

$$|\Phi(x)-\Phi_0(x)|=|\Phi(x)-\Phi(x)+\Phi(x_k)-\Phi(x_k)+\Phi_0(x_k)-\Phi_0(x_k)|\le$$

$$|\Phi(x)-\Phi(x_k)|+|\Phi_0(x)-\Phi_0(x_k)|+|\Phi(x_k)-\Phi_0(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+0=\varepsilon$$

Лемма доказана.

Лемма 4.

Пусть $\Phi(x)$ $AC-$функция на $[a,b]$ и $\Phi_0'(x)=f(x)$ на множестве второй категории.

Тогда существует $AC-$функция $\Phi(x)$ на $[a,b]$, обладающая свойствами:

1. $\Phi(a)=\Phi(b)=0,$

2. $|\Phi(x)|\le b-a,$

3. $\Phi_0'(x)=f(x)$ на множестве второй категории.

Доказательство.

Берем функцию $\Phi(x)=\Phi_0(x)-\Phi(x),$ где $\Phi_0(x)$-функция, удовлетворяющая условиям леммы 3.

1. По лемме $\Phi_0(a)=\Phi(a)$ и $\Phi_0(b)=\Phi(b);$ тогда

$$\Phi(a)=\Phi(a)-\Phi_0(a)=0;\quad \Phi(b)=\Phi(b)-\Phi_0(b).$$

2. $|\Phi(x)|=|\Phi(x)-\Phi_0(x)|<\varepsilon,$ Б, то подавно $|\Phi(x)|\le b-a.$

Так как в лемме 3 число $\varepsilon>0$ произвольно, то здесь мы можем взять его равным $(b-a);$ тем самым выполним условие 2 леммы.

3. По условию леммы равенство $\Phi_0'(x)=f(x)$ выполняется на некотором множестве $M_1\subset[a,b]$ второй категории. С другой стороны, функция $\Phi_0(x)$ имеет нулевую производную на открытом плотном множестве M_2 на том да отрезке $[a,b]$. Тогда на множестве $M=M_1\cap M_2$ (также второй категории), будем иметь:

$\Phi'(x)=f(x), \Phi'(x)=0$ и потому $\Phi'(x)=\Phi'(x)-\Phi_0'(x)=f(x)$ на M.

Лемма доказана.

Напомним теперь, что по условию теоремы $f|_n$ – непрерывно на множестве E-второй категории. Тогда каждое из множеств

$$E_{+00}=\underset{x}{E}[f=+00], E_{-00}=\underset{x}{E}[f=-00]$$ замкнуто в E. Поэтому существует

система G_1 непересекающихся интервалов, образующих плотное на $[a,b]$ открытое множество, на каждом ив которых множество либо совпадает в некоторой порцией множества E, либо нигде на плотно. Аналогично вводам систему G_2 для E_{-00}.

Рассмотрим открытое множество $G=G_1\cap G_2$. Соберем все составляющие интервалы из G, в которых либо E_{+00}, либо E_{-00}. Тогда по лемме 1 в каждом из этих интервалов мы можем построить $AC-$функцию $\Phi(x),$ которая в точках множества второй категории имеет производную $\Phi'(x)=\pm 00\quad (=f(x)).$

Возьмем теперь произвольный интервал из оставшихся интервалов, принадлежащий G; обозначим его через (α,β). Ясно, что оба множества $E_{+00} \cap (\alpha,\beta)$ - нигде не плотины на (α,β). По нашего условию, ограничение $f\big|_{E\cap(\alpha,\beta)}$ -непрерывно и $E \cap (\alpha,\beta)$ второй категории на (α,β). Поэтому и множество

$$E_{\alpha\beta=}E \cap (\alpha,\beta) \setminus E_{\pm 00}$$

также второй категории на (α,β); тогда ж поданно функция $f\big|_{E_{\alpha,\beta}}$ непрерывна (и конечна).

Обозначим $\varphi = f\big|_{E_{\alpha,\beta}}$; рассмотрим график $B = B(\varphi\big|_{E_{\alpha,\beta}})$ и его замыкание $\overline{B}$ относительно

произведения $[a,b]X\overline{IR}$, где $\overline{IR} = [-00,+00]$. Очевидно, что $np_x B = [a,b]$. Определим функцию $\psi(x')$ $x \in [a,b]$ как самую верхнюю точку пересечения вертикали

$\overline{IR} = [(x,y) : x = x'; -00 \le y < +00]$ с $\overline{B}$.

Легко видеть, что $\psi(x) = \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ x' \to E_{\alpha\beta}}} \varphi(x')$. Из определения следует, что $\psi(x)$

полунепрерывна сверху; в точках, где $\psi(x) = \pm 00$, это означает просто непрерывность (в общем смысле).

Лемма 5.

Функция $\psi(x)$ непрерывна в точках множества $E_{\alpha\beta}$, причем

$$\psi(x)\,|_{E_{\alpha\beta}} = \varphi(= f\,|_{E_{\alpha\beta}}).$$

Доказательство.

Пусть $x_0 \in E_{\alpha\beta}$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $\psi(x)$ в точке $x_0 \in E_{\alpha\beta}$ найдется окрестность $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что для всех $x' \in U_\delta(x_0) \cap E_{\alpha\beta}$ имеем

$$\left|\varphi(x') - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что часть графика функции $\phi = f\,|_{E_{\alpha\beta}})$ над окрестностью $U_\delta(x_0)$ лежит в прямоугольнике $U_\delta(x_0) \times [\varphi(x_0) - \varepsilon; \varphi(x_0) + \varepsilon]$; ясно, что замыкание этой части графика также принадлежит этому прямоугольнику. А это означает непрерывность функции $\psi(x)$ в точке $x_0 \in E_{\alpha\beta}$. Из непрерывности $\psi(x)$ на $E_{\alpha\beta}$ следует, что $\psi\,|_{E_{\alpha\beta}} = \varphi(= f\,|_{E_{\alpha\beta}})$.

Лемма доказана.

Введем множества $E_n = \{n \le \psi \le n+1\}$, $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$; т.к. $\phi(x)$ полунепрерывна сверху, то E_n есть пересечение замкнутого множества $\{n \le \psi\}$ с открытым $\{\psi < n+1\}$, т.е. оно-типа $F \cap G$. Так как $\phi|_{E_{\alpha\beta}}$ – конечная функция, то

$$E_{\alpha\beta} = \underset{n}{U}(E_n \cap E_{\alpha\beta}).$$

Из этого равенства следует существование плотной на (α,β) системы непересекающихся интервалов $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$, в каждом из которых одно из E_{n_m} плотно; т.к. оно - типа $F \cap G$, то пересечение $e_m = E_{n_m} \cap E_{\alpha\beta}$ – второй категории на (α_m, β_m). По лемме 2 строим AC – функцию $\Phi_m(x)$, для которой $\Phi'_m(x) = f(x)$ на e_m. По лемме 4 существует AC – функция $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ на всем отрезке $[\alpha, \beta]$ такая, что на множестве второй категории выполнялось $\Phi'_{\alpha\beta}(x) = f(x)$. Причем, на казнам из интервалов (α_m, β_m) функция $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ является AC – функцией, а на нигде не плотном множестве - дополнении к $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$ – она равна нулю; но тогда функция $\Phi(x)$ – ACG_* – функция на $[\alpha, \beta]$. Интервал (α,β) был частью плотной на (a,b) системы интервалов, где $E_{\pm 00}$ нигде не плотны. Снова применяя лемму 4, мы найдем AC – функцию $\Phi(x), x \in [a,b]$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве второй категории в $[a,b]$ и которая также является ACG_* – функцией. Для завершения доказательства теоремы ми докажем следующую лемму.

Лемма 6 .

Пусть $\varphi(x), x \in [a,b]$, -непрерывная, ограниченной вариации функция (VB -функция). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое всюду плотное на $[a,b]$ множество $G = \{(a_k, b_k)\}$ такое, что сумма вариаций на всех интервалах (a_k, b_k) меньше ε :

$$\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon$$

Доказательство.

Сначала предположим, что $\varphi(x)$ монотонна; в этом случае лемма доказывается легко. Пусть m и M - соответственно минимальное и максимальное значения функции $\varphi(x)$ на $[a,b]$. Выберем на отрезке $[m, M]$ произвольное открытое всюду плотное множество, мера которого меньше ε. Прообраз этого множества на $[a,b]$ есть также всюду плотное открытое множество $G = \{(a_k, b_k)\}$. Очевидно, что

$$\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon$$

Пусть, теперь, $\varphi(x)$ -произвольная VB -функция. Тогда ее можно представить в виде разности двух непрерывных возрастающих функций. Из доказанного нами выше и из соотношений

1. $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f \pm \delta) \le \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} f \pm \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \delta.$

2. $(\alpha,\beta) \supset \overset{\infty}{\underset{k}{U}}(\alpha_k,\beta_k) = \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} f \ge \sum_k \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{V}} f$

легко следует наше утверждение.

В самом деле, пусть $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$; для каждой из этих функций и $\forall \varepsilon > 0$ найдется открытое всюду плотное на $[a,b]$ множество $G_1 = \{(a_k,b_k)\}$ или $G_2 = \{(a_k,b_k)\}$ соответственно, такое, что сумма вариации φ_1 и φ_2 на всех интервалах множеств G_1 и G_2 меньше чем $\varepsilon \setminus 2$, т.е.

$\sum_k \overset{b_q}{\underset{a_q}{V}} \varphi_1 < \varepsilon/2$ и $\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon/2.$

Рассмотрим пересечение $G = G_1 \cap G_2$

Множество интервалов из $G_1 \cap G_2$ принадлежащих (α,β), образует в нем открытое плотное множество $\{(\alpha_q,\beta_q)\}$; тогда

$$\overset{b_q}{\underset{a_q}{V}} \varphi \le \overset{b_q}{\underset{a_q}{V}} \varphi_1 + \overset{b_q}{\underset{a_q}{V}} \varphi_2 \text{ и } \sum_{(\alpha,\beta)\subset\delta_1} \sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi \le \sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_1 + \sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_2) < \varepsilon$$

где $\sum\limits_{(\alpha,\beta)\subset\delta_1}$ понимается как подобное суммирование по всем интервалам (α,β), принадлежащим G_1. Отсюда следует $\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon$ Лемма доказана.

Мы уже доказали что существует ACG_* – функция $\Phi(x)$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве второй категории. При этом имеется открытое всюду плотное на $[a,b]$ множество $G = \{(a_k,b_k)\}$ в каждом интервале которого $\Phi(x)$ есть AC – функция (и $\Phi(a_k) = \Phi(b_k) = 0$). Построим теперь новую функцию $\Phi_0(x)$, которая на всем отрезке $[a,b]$ является абсолютно непрерывной и для которой $\Phi_0(x) = f(x)$ также на множестве второй категории. Для этого берем произвольный интервал $(a_k,b_k)\,G$. По лемме 6 найдем всюду плотную на (a_k,b_k) систему интервалов $\{(\alpha_m^{(k)},\beta_m^{(k)})\}$ таких, что

$$\sum_m \overset{\beta_m^{(k)}}{\underset{\alpha_m^{(k)}}{V}} \Phi \le b_k - a_k$$

Тогда по лемме 4 найдется монотонная AC – функция $\widetilde{\Phi}(x)$ такая, что

$$\sum_k \bigvee_{\alpha_m^{(k)}}^{\beta_m^{(k)}} (\Phi(x) - \widetilde{\Phi}(x)) \le 2(b_k - a_k)$$

Значит,

$$\sum_k \sum_m \bigvee_{\alpha_m^{(k)}}^{\beta_m^{(k)}} (\Phi(x) - \widetilde{\Phi}(x)) \le \sum_k 2(b_k - a_k) = 2(b - a)$$

Тогда обозначая $\Phi_0(x) = \Phi(x) - \widetilde{\Phi}(x)$, получим

$$\bigvee_a^b \Phi_0(x) \le 2(b - a) .$$

Отсюда следует, что $\Phi_0(x)$ – AC – функция, и $\Phi_0{}'(x) = f(x)$ на множестве второй категории. Теорема доказана полностью.

Список литературы..

1. Степанов В. Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale-1925. -32. -0.511 -526.
2. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия монотонности. -М.: Физматгиз, 1963.– 212 с.
3. Лузин Н.Н, Интеграл и тригонометрический ряд. - М.: Из-во иностр. лит., 1951.-545 с.
4. Горденко С.В. Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его продолжение в теории аналитических функций/ / Десятая математическая школа. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. -260-269.