

4. Побудова нелінійних математичних моделей при центральному композиційному плануванні експерименту з довільною кількістю факторів.

Яна Сиволобова, Тетяна Зінченко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Центральне композиційне планування експерименту (ЦКП) набуло широкого розповсюдження, наприклад, при оптимізації рецептур кондитерських виробів. В загальному випадку можна розглядати M - факторний експеримент, для якого необхідно вибрати фізичні характеристики планування – початкові значення всіх факторів та величини інтервалів їх варіювання. Для дослідження зв'язку між кількома змінними факторами та їх впливу на певну якісну ознаку досліджуваного процесу використовують рівняння множинної регресії, параметри яких оцінюють за даними експериментів. Математичні дослідження можна умовно розділити на два етапи: розрахунок рівняння регресії; аналіз рівняння регресії.

Матеріали і методи. Для математичного моделювання багатфакторних досліджень центрального композиційного планування експерименту використовуються методи математичної статистики (теорія кореляції), методи лінійної алгебри (знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь).

Рівняння множинної регресії I порядку (лінійне) має вигляд

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m, \quad (1)$$

де m - кількість факторів. Оцінка параметрів цього рівняння – коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ - виконується за даними вибірки (за результатами N експериментів) $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, y_i, i = 1, 2, \dots, N$, за методом найменших квадратів. В загальному випадку коефіцієнти рівняння регресії (1) обчислюються за формулою [1]:

$$\bar{b} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot \bar{y}, \quad (2)$$

де $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ - вектор оцінок параметрів-коефіцієнтів, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ - вектор значень критерію (досліджуваної якісної ознаки) в N експериментах,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матриця розміром } N \times (m+1). \quad (3)$$

Результати. Для більш точного дослідження сукупного впливу кількох змінних факторів на досліджуваний процес доцільно використовувати рівняння множинної регресії другого порядку. Важливою задачею є обчислення коефіцієнтів такого рівняння. Функція регресії другого порядку у повній формі для m факторів має вигляд:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m + b_{12}X_1X_2 + \dots + b_{(m-1)m}X_{m-1}X_m + b_{11}X_1^2 + \dots + b_{mm}X_m^2, \quad (4)$$

де $b_0, b_1, \dots, b_m, b_{12}, \dots, b_{(m-1)m}, b_{11}, \dots, b_{mm}$ - коефіцієнти рівняння регресії.

Для знаходження коефіцієнтів функції (4) використовують математичну модель (2),(3). (4). Рівняння (4) розглядаємо як лінійне зі змінними $z_j, z_{jk}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}, k \geq j$:

$$z_1 = x_1; z_2 = x_2; \dots z_m = x_m; z_{11} = x_1 \cdot x_1; z_{12} = x_1 \cdot x_2; \dots z_{mm} = x_m \cdot x_m \quad (z_{jk} = z_{kj})$$

Для знаходження коефіцієнтів функції регресії (4) за формулою (2) необхідно розв'язати систему r рівнянь, де

$$r = 1 + m + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{3m}{2} + 1 = \frac{m^2 + 3m + 1}{2}. \quad \text{Для отримання розв'язку}$$

системи за методом Крамера необхідно обчислити відповідну кількість визначників спеціального виду. Для розв'язання цієї задачі за методом математичної індукції були отримані формули обчислення визначників спеціального виду n -го порядку, і за їх допомогою – розв'язки системи (2).

Висновки. Розглянуті математичні моделі (1), (2), (4), (5) можна використовувати для розв'язування технологічних задач, наприклад, визначення оптимального складу інгредієнтів деякого продукту, а також в задачах економічного змісту для дослідження міри впливу кількох факторів на результуючу цільову функцію процесу.

Література.

1. Мартиненко, М.А. Математична статистика: навчальний посібник./ М.А. Мартиненко., О.М.Нещадим, О.І.Радзівєвська, В.М.Сафонов. – К.: Четверта хвиля, 2005. – 208 с.
2. Грачев, Ю.П. Математические методы планирования эксперимента / Ю.П.Грачев, Ю.М. Плаксин. – М.: ДеЛи принт, 2005. - 296 с.
3. Бадрук, В.В. Оптимізація рецептурних композицій кондитерського виробу маршмелоу дієтичного призначення / В.В.Бадрук, Т.В.Зінченко, А.М. Дорохович// Обладнання та технології харчових виробництв. Збірник наукових праць Донецького національного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського. – 2013. – Випуск 30. – С. 320 – 326.