УДК 664.1.054

VOLUME GEOMETRIC MODEL OF SUGAR CRYSTALS IN A CELL SYSTEM: SUGAR CRYSTALS - INTERCRYSTALLINE SOLUTIONS OF SUCROSE - STEAM BUBBLE

T. Pogoriliyy
National University of Food Technologies

Key words:
Cellular model
Sugar crystal
Parallelepiped
Ball
Sphere

Article history:
Received 17.07.2014
Received in revised form 23.07.2014
Accepted 06.08.2014

Corresponding author:
T. Pogoriliyy
E-mail:
taras22@mail.ru

ABSTRACT

The continuation of the nonstationary heat conduction and diffusion mass exchange problem between sucrose and steam bubble cell mathematical model creation in three-dimensional case (on coordinate) is presented. For the mathematical modeling of the process in question, it is necessary to develop and construct a geometric model of cellular simultaneous contact by volume (three-dimensional) case for such a system: sugar crystal of a lower cell - sucrose solution of a lower cell - steam bubble - sucrose solution of a bigger cell — sugar crystal of a bigger cell. For this purpose, a geometric three-dimensional model for bigger and smaller sugar crystal is designed and constructed. The cases of sugar crystals in the form of balls (spheres) and parallelepipeds are analyzed. The difference between the values of the surface area of the crystals and the difference between the values of the volume depending on the choice of form of sugar crystals is determined. The question of the intercrystalline sucrose solution distribution between bigger and smaller sugar crystals is considered. The difference between the values of portioned intercrystalline sucrose solution depending on choice between the ball (sphere) and parallelepiped form of crystal is found.

ОБ'ЄМНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ КРИСТАЛІВ ЦУКРУ В СИСТЕМІ КОМІРОК: КРИСТАЛИ ЦУКРУ-МІЖКРИСТАЛЬНІ РОЗЧИНИ САХАРОЗИ-ПАРОВА БУЛЬБАШКА

Т.М. Погорілий
Національний університет харчових технологій

У статті представлено продовження створення математичної моделі нестаціонарного процесу теплообміну та дифузійного масообміну між комірками сахарози й паровою бульбашкою в тривимірному (по координаті) випадку. Для математичного моделювання процесу, що розглядається, необхідно спочатку розробити й побудувати геометричну комірчасту модель одночасного контакту в об'ємному (тривимірному) випадку для такої системи: кристал цукру меншої комірки-розчин сахарози меншої комірки-парова бульбашка-розчин сахарози більшої комірки-кристал цукру більшої *комірки. Для цього розроблено та побудовано об'ємну геометричну модель більшого й меншого кристалів цукру. Проаналізовано випадки кристалів цукру у формі кулі (сфери) та паралелепіпеда. Встановлено різницю між величинами площі поверхні кристалів і різницю між величинами їх об'ємів залежно від вибору форми моделі кристалів цукру. Розглянуто питання розподілу міжкристального розчину сахарози між більшим і меншим кристалами цукру. Визначено різницю для кількості величини розподіленого міжкристального розчину залежно від вибору форми кристалів у вигляді кулі (сфери) та паралелепіпеда.*

***Ключові слова:** комірчаста модель, кристал цукру, паралелепіпед, куля, сфера.*

Постановка проблеми. Однією з основних проблем у харчовій або хімічній промисловості є математичне моделювання того чи іншого процесу з метою покращення його проходження та зниження енерговитрат на його проведення. В цукровій промисловості найскладнішим, найбільш енергетично ємнісним і таким, що найважче піддається описанню, є процес кристалізації цукру з розчину сахарози при масовому уварюванні утфелів в промислових умовах.

Для створення математичної моделі процесу кристалізації сахарози, яка б найповніше описувала цей процес, передує створення геометричної моделі розглядуваної системи. Цукровий утфель являє собою складну багатофазну дисперсну систему. У пропонованому дослідженні утфель розглядається з точки зору комірчастої моделі в такому вигляді: *кристал цукру меншої комірки-розчин сахарози меншої комірки-парова бульбашка-розчин сахарози більшої комірки-кристал цукру більшої комірки.* Насамперед у цій системі необхідно вибрати форму та створити об'ємну модель кристалів цукру більшої та меншої комірок.

Можна стверджувати, що підхід до створення математичної моделі процесу кристалізації цукру може бути використаний і в будь-якій іншій суміжній галузі, тобто там, де в дисперсній системі, що розглядається, наявні дві або три складові фази. В даному випадку це кристалл-розчин і кристалл-розчин-парова бульбашка. Через складність описання цього процесу при масовій кристалізації сахарози в реальних умовах у дослідженні використано ряд припущень для створення ідеалізованої моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останні дослідження [1, 2, 3] математичних моделей процесу масової кристалізації сахарози підтверджують, що через складність перебігу даного процесу, особливо в промислових умовах, на сьогоднішній день не існує єдиного підходу та не вироблено єдиної загальноприйнятої теорії, яка б дала відповіді на всі питання стосовно процесу кристалізації. Також залишається відкритим питання, які стосуються процесу рекристалізації, який займає вагоме місце в процесі кристалізації сахарози. Необхідно створити математичну модель, яка б описувала цей процес, та визначити особливості його впливу при проходженні процесу масової кристалізації сахарози в промислових умовах.

Мета: розглянути питання створення геометричної моделі комірок кристалів цукру у тривимірному випадку — у формі паралелепіпеда та сфери, кожна з яких відноситься до різних координатних систем (прямокутної (декартової) та сферичної). Варто зауважити, що від вибору форми кристала залежатиме, в якій системі незалежних змінних для наведеної вище системи комірок будуть записані диференціальні рівняння в частинних похідних, що описують нестаціонарні процеси тепло- та масообміну.

Матеріали і результати дослідження. Передусім слід побудувати геометричні моделі різної форми окремо для одиничних кристалів цукру меншої та більшої комірки і визначити їхні особливості. Наступним етапом в створенні геометричної моделі в згаданій вище системі комірок є питання вибору геометричних моделей (форма, розміри) окремо для комірок міжкристальних розчинів сахарози, що оточують, відповідно, менший і більший кристали цукру, та геометрична модель для парової бульбашки. На жаль, через обмеженість об'єму викладення останні два питання виносяться за межі даної статті. Але створення цих моделей (міжкристальний розчин, парова бульбашка) повністю залежатиме від вибору моделі кристала цукру.

Кожен з кристалів цукру більшої та меншої комірок розглянемо окремо. Для побудови геометричної моделі розглядатимемо надалі, наприклад, більший кристал цукру, називаючи його просто *кристал цукру,* не зазначаючи його розмір, якщо це змістовно не вагомо. Хоча, зрозуміло, що всі подальші роздуми стосуються і меншого кристала цукру.

Як відомо, кристали сахарози кристалізуються в клиноромбічній або моноклінічній системі і за формою є досить складними [3]: кристал являє собою комбінацію шести кристалографічних форм, які характеризуються в просторі трьома кристалографічними осями координат *a*, *b*, *c*, що використовуються для визначення положення всіх граней кристала. Вісь *c* розміщена вертикально, вісь *b* — горизонтально і проходить через кристал зліва направо, а вісь *a* нахилена вниз від задньої грані до передньої, тобто перебуває під прямим кутом до осі *b* і нахилена під кутом β =103°30' до осі *c*. Осьові кути α та γ дорівнюють 90°. Кристал сахарози, вирощений у чистому розчині, має 12 граней. Нормальні пропорції кристала сахарози, вирощені в чистому розчині, мають співвідношення довжин осей $a : b : c$ = 1,2595 : 1,0000 : : 0,8782. Слід зазначити, що таке ж відношення розмірів має і молекула сахарози: a = 1,089; b = 0,869; c = 0,777 нм [3].

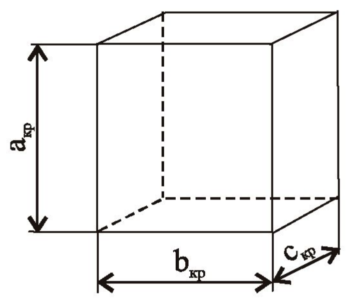

Рис. 1. Тривимірна модель кристала цукру у вигляді паралелепіпеда

У зв'язку зі складністю моделювання (математичного описання) такої форми кристала цукру приймемо такі спрощення: базуючись на тому, що два осьові кути дорівнюють 90°, а третій дещо більший за 90°, але в певній мірі близький до нього, представимо кристал цукру у вигляді паралелепіпеда. Пропорцію сторін, виберемо такою, що відповідає відомим зазначеним вище співвідношенням довжин осей нормального кристала сахарози, який вирощений у чистому розчині. Зображення моделі кристала цукру у вигляді паралелепіпеда з такою пропорцією сторін подано на рис. 1.

Введемо такі позначення для сторін кристала цукру: найбільшу сторону позначимо $a_{кр\,1}$, середню — $b_{кр\,1}$, найменшу — $c_{кр\,1}$. У випадку для згаданої вище системи комірок сторони більшого кристала позначимо, відповідно, через $a_{кр\,1}$, $b_{кр\,1}$ та $c_{кр\,1}$, а сторони меншого - через $a_{кр\,2}$, $b_{кр\,2}$ та $c_{кр\,2}$.

Припустимо, що задалися характерні розміри більшого $l_{кр\,1}$ та меншого $l_{кр\,2}$ кристалів цукру визначені наперед, і що саме ця величина відповідає введеній у розробленій моделі більшій стороні кристала: більша сторона більшого кристала цукру (відповідає вже введеному позначенню через змінну $a_{кр\,1}$) дорівнює $l_{кр\,1}$; розмір більшої сторони меншого кристала (відповідає вже введеному позначенню $a_{кр\,2}$) дорівнює $l_{кр\,2}$. Тоді співвідношення для сторін кристала цукру більшої комірки можна записати у такому вигляді:

$$a_{\text{кр}\,1} = l_{\text{кр}\,1}; \quad b_{\text{кр}\,1} = \frac{1}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}\,1} = \frac{1}{1{,}2595} \cdot a_{\text{кр}\,1};$$

$$c_{\text{кр}\,1} = \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}\,1} = \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot a_{\text{кр}\,1}. \tag{1}$$

Для меншої комірки:

$$a_{\text{кр}\,2} = l_{\text{кр}\,2}; \quad b_{\text{кр}\,2} = \frac{1}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}\,2} = \frac{1}{1{,}2595} \cdot a_{\text{кр}\,2};$$

$$c_{\text{кр}\,2} = \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}\,2} = \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot a_{\text{кр}\,2}. \tag{2}$$

Відразу розрахуємо площу поверхні та об'єм кожного з кристалів при введених пропорціях їх сторін (1)—(2). Це знадобиться в майбутньому для моделювання та визначення кількості міжкристального розчину сахарози.

Отже, площа поверхні більшого кристала цукру $S_{кр\,1}$ визначатиметься на основі виразу (1) з наступного виразу як:

$$S_{\text{кр}\,1} = 2\left(a_{\text{кр}\,1} \cdot b_{\text{кр}\,1} + b_{\text{кр}\,1} \cdot c_{\text{кр}\,1} + c_{\text{кр}\,1} \cdot a_{\text{кр}\,1}\right), \tag{3}$$

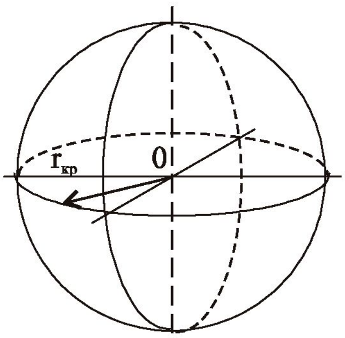

Рис. 2. Тривимірна модель кристала цукру у вигляді кулі

а площа поверхні меншого кристалу цукру $S_{кр\,2}$ визначатиметься на основі виразу (2) як:

$$S_{\text{кр}\,2} = 2\left(a_{\text{кр}\,2} \cdot b_{\text{кр}\,2} + b_{\text{кр}\,2} \cdot c_{\text{кр}\,2} + c_{\text{кр}\,2} \cdot a_{\text{кр}\,2}\right). \tag{4}$$

Відповідно визначатиметься об'єм більшого кристала цукру $V_{кр\,1}$:

$$V_{\text{кр}\,1} = a_{\text{кр}\,1} \cdot b_{\text{кр}\,1} \cdot c_{\text{кр}\,1}, \tag{5}$$

а також об'єм меншого кристала цукру $V_{кр\,2}$:

$$V_{\text{кр}\,2} = a_{\text{кр}\,2} \cdot b_{\text{кр}\,2} \cdot c_{\text{кр}\,2}. \tag{6}$$

Слід зазначити, що іноді дослідники [3, 8] при створенні геометричної моделі кристалів цукру використовували форму кулі (сфери) (рис. 2). Постає питання, яким чином співвідносяться ці дві моделі кристалів цукру і на якій формі зупинити свій вибір при створенні математичної моделі вказаної вище системи комірок. Знайдемо формули для визначення числових значень таких характеристик: як співвідносяться між собою величини об'ємів і величини площі поверхонь для моделей цукру, представлених у вигляді паралелепіпеда (рис. 1) та кулі (рис. 2) для довільних їх розмірів, тобто у найбільш загальному випадку.

З цією метою характерний розмір кристала цукру, представлений у вигляді кулі, величину її діаметра $d_{кр}$, вважатимемо таким, що дорівнює характерному розміру кристала цукру, представленого у вигляді паралелепіпеда, величиною його більшої сторони, яку позначимо через $l_{кр}$. Радіус кристала цукру у вигляді кулі буде визначатися як $r_{кр} = d_{кр} / 2$. На основі цього можна записати таку залежність між радіусом $r_{кр}$ і довжиною $l_{кр}$:

$$r_{кр} = \frac{d_{кр}}{2} = \frac{l_{кр}}{2}, \tag{7}$$

звідки знаходимо, що

$$l_{кр} = 2r_{кр}. \tag{8}$$

Об'єм кристала цукру у вигляді кулі з діаметром $d_{кр} = l_{кр}$ на основі відомих формул і виразу (7) дорівнюватиме:

$$V_{кр,\ куля} = \frac{4}{3}\pi r_{кр}^{3} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{l_{кр}}{2}\right)^{3} = \frac{1}{6}\pi l_{кр}^{3} \approx 0{,}5236 \cdot l_{кр}^{3}. \tag{9}$$

Об'єм кристала цукру у вигляді паралелепіпеда з більшою стороною $a_{кр} = l_{кр}$, та всіма іншими сторонами, що визначаються за формулами (1), визначатиметься на основі виразу (5) без урахування індексу 1 (або ж за формулами (2) та (6) без врахування індексу 2) таким чином:

$$V_{кр,\ парал} = a_{кр} \cdot b_{кр} \cdot c_{кр} = l_{кр} \cdot \frac{1}{1{,}2595} \cdot l_{кр} \cdot$$

$$\cdot \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot l_{кр} = \frac{0{,}8782}{1{,}2595^{2}} l_{кр}^{3} \approx 0{,}5536 \cdot l_{кр}^{3}. \tag{10}$$

Відношення об'єму кристала цукру у вигляді паралелепіпеда $V_{кр,\ парал}$ до об'єму кристала цукру у вигляді кулі $V_{кр,\ куля}$ буде дорівнювати:

$$\frac{V_{кр,\ парал}}{V_{кр,\ куля}} = \frac{\frac{0{,}8782}{1{,}2595^{2}} l_{кр}^{3}}{\frac{1}{6}\pi l_{кр}^{3}} = \frac{6 \cdot 0{,}8782}{\pi \cdot 1{,}2595^{2}} \approx 1{,}0573. \tag{11}$$

На основі отриманого співвідношення (11), за однакових характерних розмірів кристалу цукру у формі паралелепіпеда та формі кулі, отримуємо такий результат: об'єм кристала цукру у вигляді паралелепіпеда більший за об'єм кристала цукру у вигляді кулі приблизно на 5,73 %. Зважаючи на це, геометричні моделі форми кристалів цукру у вигляді кулі та паралелепіпеда можна вважати практично еквівалентними, хоча при створенні об'ємної моделі кристала потрібно віддати належне формі кристала цукру саме у вигляді паралелепіпеда, оскільки ця форма максимально наближена до реальних пропорцій розмірів кристалів цукру.

Площа поверхні кристалу цукру у вигляді кулі з діаметром $d_{кр} = l_{кр}$ за відомими формулами розрахунку площі поверхні сфери (зауважимо, що поверхня кулі ще має назву «поверхня сфери») та виразу (7) дорівнює:

$$S_{\text{кр, сфера}} = 4\pi r_{\text{кр}}^2 = 4\pi\left(\frac{l_{\text{кр}}}{2}\right)^2 = \pi l_{\text{кр}}^2 \approx 3{,}1416 \cdot l_{\text{кр}}^2 . \qquad (12)$$

Площа поверхні кристалу цукру у вигляді паралелепіпеда з більшою стороною $a_{кр} = l_{кр}$, і всіма іншими сторонами, що визначаються за формулами (1), та на основі отриманого виразу (3) без врахування індексу 1 (або ж за формулами (2) та (4) без врахування індексу 2) дорівнює:

$$S_{\text{кр, парал}} = 2\left(a_{\text{кр}} \cdot b_{\text{кр}} + b_{\text{кр}} \cdot c_{\text{кр}} + c_{\text{кр}} \cdot a_{\text{кр}}\right) =$$

$$= 2\left(l_{\text{кр}} \cdot \frac{1}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}} + \frac{1}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}} \cdot \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}} + \frac{0{,}8782}{1{,}2595} \cdot l_{\text{кр}} \cdot l_{\text{кр}}\right) =$$

$$= \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр}}^2 \approx 4{,}0897 \cdot l_{\text{кр}}^2 . \qquad (13)$$

Обчислимо відношення площі поверхні кристала цукру у формі паралелепіпеда $S_{кр,\,парал}$ до площі поверхні кристала цукру у формі кулі $S_{кр,\,сфера}$. У результаті отримаємо:

$$\frac{S_{\text{кр, парал}}}{S_{\text{кр, сфера}}} = \frac{\dfrac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр}}^2}{\pi \cdot l_{\text{кр}}^2} \approx 1{,}3018 . \qquad (14)$$

На основі отриманого співвідношення (14), за однакових характерних розмірів кристала цукру у формі паралелепіпеда й формі кулі, отримуємо такий результат: площа поверхні кристала цукру у вигляді паралелепіпеда більша за площу поверхні кристала цукру у вигляді кулі приблизно на 30,18 %. Отримана величина співвідношення площі поверхні кристалу цукру у формі паралелепіпеда до площі поверхні кристала у формі цукру на перший погляд повинна вагомо вплинути на вибір форми кристала цукру, адже від цього залежатиме розподіл міжкристального розчину між комірками більшого та меншого кристалами цукру. Зупинимось на цьому питання більш детально.

При моделюванні згаданої вище системи комірок наступним етапом буде моделювання міжкристального розчину сахарози. Оскільки в згаданій вище системі розглядається більший і менший кристали цукру, то потрібно визначити кількість міжкристального розчину сахарози, що розподіляється між цими комірками цукру. Як відомо, в комірчастій моделі дисперсної системи, якою є цукровий утфель, міжкристальний розчин сахарози розподіляється пропорційно площі поверхні кристала [3]. З урахуванням цього з'ясуємо, чи зміниться і на яку величину кількість розподіленого міжкристального розчину між комірками більшого та меншого кристалів цукру. Зауважимо, що кристали цукру розглядатимемо формі кулі та паралелепіпеда. При цьому вважатимемо, що розмір більшого кристала відрізняється від розміру меншого кристала на однакову величину, тобто в $k_{проп}$, ($k_{проп}>1$) разів як для випадку кулі, так і для випадку паралелепіпеда.

Отже, введемо два коефіцієнти пропорційності розподілу кількості міжкристального розчину для кулі (сфери): $k_{S_{\text{кр 1, сфера}}}$ — для більшого кристала та $k_{S_{\text{кр 2, сфера}}}$ — для меншого кристала. Вважатимемо що розміри більшого та меншого кристалів цукру, на основі введеного коефіцієнта пропорційності $k_{\text{проп}}$, ($k_{\text{проп}}>1$), пов'язані таким співвідношенням:

$$r_{\text{кр 1}} = k_{\text{проп}} \cdot r_{\text{кр 2}}, \quad \left(k_{\text{проп}} > 1\right). \tag{15}$$

Визначимо площу поверхні кристала цукру у формі кулі (сфери) на основі формули (12). Запишемо її значення для меншого кристала цукру:

$$S_{\text{кр 2, сфера}} = 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2, \tag{16}$$

а також для більшого кристала цукру:

$$S_{\text{кр 1, сфера}} = 4\pi r_{\text{кр 1}}{}^2 = 4\pi\left(k_{\text{проп}} \cdot r_{\text{кр 2}}\right)^2 = 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2 \cdot k_{\text{проп}}^2. \tag{17}$$

На основі отриманих виразів (16)—(17) знайдемо величину коефіцієнта пропорційності розподілу кількості міжкристального розчину для більшого кристала цукру у формі кулі (сфери):

$$k_{S_{\text{кр 1, сфера}}} = \frac{S_{\text{кр 1, сфера}}}{S_{\text{кр 1, сфера}} + S_{\text{кр 2, сфера}}} = \frac{4\pi r_{\text{кр 1}}{}^2}{4\pi r_{\text{кр 1}}{}^2 + 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2} =$$

$$= \frac{4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2 \cdot k_{\text{кр}}^2}{4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2 \cdot k_{\text{проп}}^2 + 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2} = \frac{k_{\text{проп}}^2}{1 + k_{\text{проп}}^2}, \tag{18}$$

та для меншого кристала цукру у формі кулі (сфери):

$$k_{S_{\text{кр 2, сфера}}} = \frac{S_{\text{кр 2, сфера}}}{S_{\text{кр 1, сфера}} + S_{\text{кр 2, сфера}}} = \frac{4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2}{4\pi r_{\text{кр 1}}{}^2 + 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2} =$$

$$= \frac{4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2}{4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2 \cdot k_{\text{проп}}^2 + 4\pi r_{\text{кр 2}}{}^2} = \frac{1}{1 + k_{\text{проп}}^2}. \tag{19}$$

Аналогічно введемо два коефіцієнти пропорційності розподілу кількості міжкристального розчину для кристала у формі паралелепіпеда: $k_{S_{\text{кр 1, парал}}}$ — для більшого кристала та $k_{S_{\text{кр 2, парал}}}$ — для меншого кристала. Вважатимемо, що розміри більшого та меншого кристалів цукру, на основі введеного коефіцієнта пропорційності $k_{\text{проп}}$, ($k_{\text{проп}}>1$), пов'язані таким співвідношенням:

$$l_{\text{кр 1}} = k_{\text{проп}} \cdot l_{\text{кр 2}}, \quad \left(k_{\text{проп}} > 1\right). \tag{20}$$

Ще раз зауважимо, що введений коефіцієнт пропорційності $k_{\text{проп}}$, ($k_{\text{проп}}>1$) між більшим і меншим кристалами цукру у формі паралелепіпеда (15) та у формі сфери (20) рівні між собою.

На основі формули (13) визначимо площу поверхні кристалів цукру у формі паралелепіпеда для більшого та меншого кристалів. Запишемо її значення для меншого кристала цукру:

$$S_{\text{кр 2, парал}} = \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}, \tag{21}$$

та для більшого кристала цукру:

$$S_{\text{кр 1, парал}} = \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 1}}^{\ 2} = \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2}\left(k_{\text{проп}} \cdot l_{\text{кр 2}}\right)^2 = $$
$$= \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2} \cdot k_{\text{проп}}^2. \tag{22}$$

На основі виразів (21)—(22) знайдемо величину коефіцієнта пропорційності розподілу кількості міжкристального розчину для більшого кристала цукру у формі паралелепіпеда:

$$k_{S_{\text{кр 1, парал}}} = \frac{S_{\text{кр 1, парал}}}{S_{\text{кр 1, парал}} + S_{\text{кр 2, парал}}} = \frac{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 1}}^{\ 2}}{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 1}}^{\ 2} + \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}} =$$
$$= \frac{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2} \cdot k_{\text{проп}}^2}{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2} \cdot k_{\text{проп}}^2 + \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}} = \frac{k_{\text{проп}}^2}{1 + k_{\text{проп}}^2}, \tag{23}$$

та для меншого кристала цукру у формі паралелепіпеда:

$$k_{S_{\text{кр 2, парал}}} = \frac{S_{\text{кр 2, парал}}}{S_{\text{кр 1, парал}} + S_{\text{кр 2, парал}}} = \frac{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}}{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 1}}^{\ 2} + \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}} =$$
$$= \frac{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}}{\frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2} \cdot k_{\text{проп}}^2 + \frac{6{,}4875858}{1{,}2595^2} \cdot l_{\text{кр 2}}^{\ 2}} = \frac{1}{1 + k_{\text{проп}}^2}. \tag{24}$$

Таким чином, на основі отриманих виразів (18)—(19) — для випадку кристалів цукру у формі кулі (сфери), (23)—(24) — для випадку кристалів цукру у формі паралелепіпеда, за умови, що коефіцієнти пропорційності k_{npon}, ($k_{npon}>1$), однакових розмірів між більшим і меншим кристалами в зазначених випадках, робимо висновок, *що кількість міжкристального розчину в обох випадках (куля і паралелепіпед) розподіляється однаковим чином.*

Проведене дослідження показує, що в даному випадку вибір форми кристалів цукру не впливає на кількість міжкристального розчину, що буде розподілений між більшою та меншою комірками системи, яка розглядається вище. Однак слід зауважити, що вибір форми кристалів цукру впливатиме на товщину міжкристального розчину, що оточує той чи інший кристали. Але ці дослідження вже стосуються моделювання міжкристального розчину.

На основі проведених розрахунків отримано формули (9)—(14), які знайдено для довільного розміру кристалів цукру, а також вирази (18)—(19) та (23)—(24), які знайдено для однакового коефіцієнта пропорційності $k_{пропn}$, ($k_{пропn}>1$), між більшим та меншим кристалами цукру, що дає всі підстави зупинити вибір об'ємної геометричної моделі кристалу цукру саме у формі паралелепіпеда. До того ж саме ця форма максимально наближена до природної форми кристалу цукру.

Для створення комірчастої моделі кристал цукру меншої комірки-розчин сахарози меншої комірки-парова бульбашка-розчин сахарози більшої комірки-кристал цукру більшої комірки вибираємо форму кристалів цукру у вигляді паралелепіпеда, з пропорцією сторін, що визначаються за формулами (1)—(2).

Отримані величини співвідношень (11) і (14) підтверджують, що площа поверхні кристалу цукру у вигляді паралелепіпеда більша від площі поверхні кристала цукру у вигляді кулі приблизно на 30,18 %, тоді як об'єм такого кристала більший лише на 5,73 %. Що цілком зрозуміло, адже куля (сфера) — єдиний у природі геометричний об'єкт, що займає мінімальну площу зовнішньої поверхні при максимальному внутрішньому об'ємі.

Висновки

У результаті проведеного дослідження визначено, як відрізняються (співвідносяться) величини площ та об'ємів між кристалами цукру у формі кулі (сфери) й паралелепіпеда з однаковими розмірами. Для випадку кристала у формі паралелепіпеда величина становить, відповідно, 130,2% та 105,7% порівняно з кристалом у формі кулі (сфери).

Також досліджено розподіл міжкристального розчину (що розподіляється пропорційно площі поверхні кристалу) між більшим і меншим кристалами, за умови, що форма кристалів має вигляд кулі (сфери) та паралелепіпеда. За умови, що розміри більшого та меншого кристалів мають однаковий коефіцієнт пропорційності $k_{пропn}$, ($k_{пропn}>1$), встановлено, що величини розподіленого міжкристального розчину в обох випадках (куля (сфера) та паралелепіпед) рівні між собою.

Створено об'ємну геометричну модель кристалів цукру більшої та меншої комірки, кожен з яких представлено у формі паралелепіпеда, з пропорцією сторін, що визначаються за формулами (1)—(2).

На основі створеної тривимірної геометричної моделі кристалів цукру в комірчастій моделі системи: кристал цукру меншої комірки-розчин сахарози меншої комірки-парова бульбашка-розчин сахарози більшої комірки-кристал цукру більшої комірки можливо та необхідно продовжити дослідження та моделювання тривимірної геометричної моделі міжкристального розчину сахарози й парової бульбашки.

Література

1. *Современные* технологии и оборудование свеклосахарного производства: В 2-х ч. / В.О. Штангеев, В. Т. Кобер, Л. Г. Белостоцкий и др.; Под. ред. В.О. Штангеева. — К.: «Цукор України», 2004. — Ч. 2. — 320 с.

2. *Тужилкин В.И.* Кристаллизация сахара: Монография. — М.: Издательский комплекс МГУПП, 2007. — 336 с.

3. *Кулинченко В.Р., Мирончук В. Г.* Промышленная кристаллизация сахаристих веществ: Монография. — К.: НУПТ, 2012. — 426 с.

4. *Погорелый Т.М. Мирончук В.Г.* Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10—13 сентября 2012 г. — Том 1, Часть 2. — Минск.: Институт тепло- и массобмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. — С. 761—764.

5. *Погорілий Т. М.* Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку для прямокутної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці НУХТ. — К.: 2014. — Т. 20, № 2. — С. 136—145.

6. *Погорілий Т. М.* Математичне моделювання процесу теплообміну між комірками сахарози на основі аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності з неоднорідними розривними на одній із бічних сторін та неперервними на всіх інших сторонах області граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою // Наукові праці НУХТ. — К.: 2014. — Т. 20, № 4. — С. 165—173.

ОБЪЕМНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИСТАЛЛОВ САХАРА В СИСТЕМЕ ЯЧЕЕК: КРИСТАЛЛЫ САХАРА-МЕЖКРИСТАЛЬНЫЕ РАСТВОРЫ САХАРОЗЫ-ПАРОВОЙ ПУЗЫРЕК

Т.М. Погорелый
Национальный университет пищевых технологий

В статье представлено продолжение создания математической модели нестационарного процесса теплообмена и диффузионного массообмена между ячейками сахарозы и паровым пузырьком в трехмерном (по координате) случае. Для математического моделирования рассмотренного процесса необходимо сначала разработать и построить геометрическую ячеистую модель одновременного контакта в объемном (трехмерном) случае для следующей системы: кристалл сахара меньшей ячейки-раствор сахарозы меньшей ячей-

ки-паровой пузырек-раствор сахарозы большей ячейки-кристалл сахара большей ячейки. С этой целью разработана и построена объемная геометрическая модель большего и меньшего кристаллов сахара. Проанализированы случаи кристаллов сахара в форме шара (сферы) и параллелепипеда. Найдена разница между величинами площади поверхности кристаллов, а также разница между величинами их объемов в зависимости от выбора формы модели кристаллов сахара. Рассмотрен вопрос распределения межкристального раствора сахарозы между большим и меньшим кристаллами сахара. Определена разница для количества величины распределенного межкристального раствора в зависимости от выбора формы кристаллов в виде шара (сферы) и параллелепипеда.

***Ключевые слова:** ячеистая модель, кристалл сахара, паралелепипед, шар, сфера.*