МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-МЕТОДИЧНА ІНТЕРНЕТ-КОНФЕРЕНЦІЯ

АКТУАЛЬНІ НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Конференція присвячена 90-річчю заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.

26-27 травня 2020 р.

КИЇВ НУХТ 2020

УДК 510

Знаходження екстремуму функції

Олександр Рибальченко, Петро Зінькевич, Олексій Зінькевич

Національний університет харчових технологій

Вступ. У багатьох геометричних, фізичних, економічних і технічних задачах необхідно знайти найбільше або найменше значення величини (найбільше і найменше значення називають також абсолютними екстремумами величини (функції)), пов'язаної функціональною залежністю з іншою величиною.
Традиційний підхід до знаходження найбільшого чи найменшого значень функції за допомогою похідної може ускладниться уже при знаходженні похідної. Цю складність можна обійти, якщо застосувати інші підходи.
Матеріали і методи. Виходячи із умови задачі, вибирають незалежну змінну і виражають досліджувану величину через цю змінну.
Результати.

Приклад 1. Одна із сторін прямокутної ділянки землі примикає до берега каналу, а три інші огороджуються огорожею. Якими мають бути розміри цієї ділянки, щоб його площа дорівнювала S, а довжина огорожі була найменша?

Розв'язання. Нехай x і y відповідно ширина і довжина огорожі. Тоді периметр $p=2x+y$. Виберемо за незалежну змінну x – ширину ділянки.

Враховуючи, що $S=xy$, $y=\dfrac{S}{x}$ маємо

$$p(x)=2x+\frac{S}{x}.$$

Знайдемо мінімум $p(x)$ без використання похідної. Помноживши останню рівність на x і після алгебраїчних перетворень можна отримати квадратне рівняння

$$2x^2-x\cdot p(x)+S=0$$

відносно змінної x, а $p(x)$ називають функцією (параметром) від змінної x.

Знайдемо дискримінант рівняння: $D=p^2-8S$.

Можливі випадки:

$$1)\ D<0;$$
$$2)\ D=p^2-8S>0;$$
$$3)\ D=p^2-8S=0.$$

В першому випадку рівняння не має дійсних коренів.

Порівнюючи 2) і 3) можна зробити висновок, що $p(x)$ набуває меншого значення в випадку 3) ніж в 2).

Зауважимо, що рівняння має єдиний дійсний розв'язок, якщо $p^2-8S=0$, $p^2=8S$ (якщо серед усіх периметрів огорожі існує найменший, то він має бути єдиним).

Отже,

$$p_{\text{найм.}} = 2\sqrt{2S},$$

при цьому розміри цієї ділянки такі: $x = \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2S}}{2}$, $y = \frac{S}{x} = \sqrt{2S}$.

Загалом, якщо функціональна залежність має вигляд $b(x) = ax + \frac{c}{x}$, $ax^2 - x \cdot b(x) + c = 0$, то маємо такий вираз $b^2 - 4ac = 0$ для знаходження найменшого (найбільшого) значення відповідного параметра (функції) $b(x)$.

Обчислення змінної x, при якому функція набуває найменшого (найбільшого) значення виконується за формулою

$$x = \frac{b}{2a}.$$

Приклад 2. Із куска жесті, який має форму півкола радіусу R, вирізати прямокутник із найбільшою площею.

Розв'язання. Позначимо через x і y відповідно ширину і довжину прямокутника, тоді $S = xy$.

Враховуючи, що $R^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$ знайдемо $y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Отже, $S = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Після алгебраїчних перетворень останнього виразу будемо мати біквадратне рівняння

$$4x^4 - 4R^2x^2 + S^2 = 0.$$

Дискримінант відповідного квадратного рівняння буде $D = 16R^4 - 16S^2$. Рівняння має єдиний дійсний розв'язок, якщо

$$16R^4 - 16S^2 = 0.$$

Отже, $$S_{\text{найб.}} = R^2,\ x = \frac{\sqrt{2}R}{2},\ y = \sqrt{2}R.$$

Висновок.

Якщо функціональна залежність має вигляд

$ax^2 - x \cdot b(x) + c = 0$ або $4x^4 - 4\alpha^2(x)x^2 + \beta^2 = 0$, або $4x^4 - 4\alpha^2x^2 + \beta^2(x) = 0$,

то маємо відповідно такі вирази

$$b^2(x) - 4ac = 0,\ \alpha^4(x) - \beta^2 = 0,\ \alpha^4 - \beta^2(x) = 0$$

для знаходження найменшого (найбільшого) значення відповідного параметра (функції) $b(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$.