2. МІШАНІ ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Андрій Улітко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Михайло Мартиненко
Національний університет харчових технологій

Вступ. В результаті експлуатації реальних конструкційних методів в них завжди виникають внутрішні просторові тріщини. Дати оцінку надійності і міцності таких чинників конструкцій можна через розв'язок задач математичної теорії пружності для тіл, які послаблені відповідними математичними розрізами.

Основна частина. Нехай пружній простір послаблений математичним розрізом, який співпадає з частиною координатної поверхні S ($\xi = \xi_0,\ 0 \le \eta \le \eta_0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$), де ξ, η, φ ізометричні координати обертання.

Пружний простір розбиваємо на внутрішню V_1 і зовнішню V_2 області по відношенні до поверхні S. Вектор переміщень $\vec{u}$ в однорідному ізометричному середовищі задовольняє рівняння [1].

$$2\frac{m-1}{m-2} grad\, div\, \vec{u} - rotrot\, \vec{u} = 0 \tag{1}$$

де $m-$ число Пуассона.

На поверхні тіла виконується умова (1)

$$2G\left[\vec{n}\frac{div\vec{u}}{m-2} + \left(\vec{n}\cdot grad\right)\vec{u} + 0,5\left(\vec{n}\times rot\vec{u}\right)\right]_S = \vec{F}_n \tag{2}$$

де G – модуль зсуву матеріалу, $\vec{n}-$ орт зовнішньої нормалі до поверхні S, $\vec{F}_n$ - заданий вектор зовнішніх зусиль на поверхні S.

Інтегрування рівняння (1) проводимо в ізотермічних координатах, які вводимо за допомогою наступних рівностей

$$z + i\rho = \alpha\left(\xi,\eta\right) + i\beta\left(\xi,\eta\right); \quad \varphi = \varphi, \tag{3}$$

функції $\alpha\left(\xi,\eta\right), \beta\left(\xi,\eta\right)$ пов'язані співвідношенням Коші-Рімана.

Якщо ввести

$$div\vec{u} = 2\frac{m-2}{m}\theta\left(\xi,\eta\right); \quad rot\vec{u} = 4\frac{m-1}{m}\vec{e}_\varphi\omega\left(\xi,\eta\right), \tag{4}$$

то після відповідних перетворень отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h_\varphi\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_\varphi\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right) = 0; \quad h_\varphi = \beta\left(\xi,\eta\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\left(\omega h_\varphi\right)}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_\varphi\frac{\partial\left(\omega h_\varphi\right)}{\partial\eta}\right) = 0\,. \tag{5}$$

Розв'язки рівнянь (5) можна записати у вигляді розкладів $\theta\left(\xi,\eta\right)$, $\omega\left(\xi,\eta\right)$ через власні функції дискретного або неперервного спектрів. Циліндричні проекції вектори переміщень знаходяться із взаємопов'язаної системи диференціальних рівнянь в частинах похідних

$$\frac{\partial u_z}{\partial\xi} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\left(u_\rho h_\varphi\right)}{\partial\eta} = 2\frac{m-2}{m}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\Theta + 4\frac{m-1}{m}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\omega; \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\left(u_\rho h_\varphi\right)}{\partial \xi} = 2\frac{m-2}{m}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\Theta - 4\frac{m-1}{m}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\omega.$$

Однорідна система (6) зводиться до рівнянь (5), а частинний розв'язок отриманий у вигляді

$$u_\rho^* = \frac{3m-4}{m}\beta(\xi,\eta)\Theta(\xi,\eta) + 4\frac{m-1}{m}\alpha(\xi,\eta)\omega(\xi,\eta)$$

$$u_z^* = -4\frac{m-1}{m}\alpha(\xi,\eta)\Theta(\xi,\eta) + \frac{3m-4}{m}\beta(\xi,\eta)\omega(\xi,\eta). \tag{7}$$

Відповідно до принципу Бюкнера [2] граничні умови мають вигляд

$$\vec{F}_\xi^{(1)} = -\vec{F}_\xi^{(2)} = \vec{f}(\xi,\eta), \quad (\xi = \xi_0,\, \eta < \eta_0). \tag{8}$$

$$\vec{u}_1(\xi,\eta) = \vec{u}_2(\xi,\eta),\ \vec{F}_\xi^{(1)} = -\vec{F}_\xi^{(2)}, \quad \left(\xi = \xi_0,\, \eta > \eta_0\right).$$

де $\vec{F}_\xi^{(1)}, \vec{F}_\xi^{(2)}, \vec{u}_1(\xi,\eta), \vec{u}_2(\xi,\eta)$ вектор зусиль на поверхні $\xi = \xi_0$ і вектор переміщень в областях V_1 , V_2 .

Представляючи поля переміщень і зусиль через власні функції неперервного або дискретного спектрів запропонований клас задач зведений до мішаних задач математичної теорії пружності.

Висновки. В роботі запропонований метод оцінки міцності і надійності елементів конструкцій з внутрішніми неплоскими тріщинами через клас мішаних задач теорії пружності для тіл послаблених математичними розрізами по частинам поверхонь другого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улито – К.: Наук думка, 1979. – 264с.

2. Мартиненко, М.А. Мішані просторові задачі математичної теорії пружності: монографія / М.А. Мартиненко. – К.: Освіта України, 2012. – 376с.