2015

НАУКОВІ ПРАЦІ

НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Том 21 № 6

Журнал
«Наукові праці Національного університету харчових технологій»
засновано в 1993 році

КИЇВ ✧ НУХТ ✧ 2015

UDC 663/664

Articles with the results of fundamental theoretical developments and applied research in the field of technical and economic sciences are published in this journal. The scripts of articles are reviewed beforehand by leading specialists of corresponding branch.

The journal was designed for professors, tutors, scientists, post-graduates, students of higher education establishments and executives of the food industry.

Journal "Scientific Works of National University of Food Technologies" is included into the list of professional editions of Ukraine of technical and economic sciences (Ballot-paper of Higher Attestation Commission of Ukraine #1, 2010), where the results of dissertations for scientific degrees of PhD and candidate of science can be published.

The Journal "Scientific Works of National University of Food Technologies" is indexed by the following scientometric databases:

- Index Copernicus
- EBSCOhost
- CABI Full Text
- Universal Impact Factor
- Google Scholar
- The Journal is recommended for publication of research results by the Ministry of Science and Higher Education of Poland.

Editorial office address:

National University
of Food Technologies
Volodymyrska str., 68
Ukraine, Kyiv 01601

Recommended for publication by the Academic Council of the National University of Food Technologies. *Minutes of meeting # 4 of September 24, 2015*

УДК 663/664

У журналі публікуються статті за результатами фундаментальних теоретичних розробок і прикладних досліджень у галузі технічних та економічних наук. Рукописи статей попередньо рецензуються провідними спеціалістами відповідної галузі.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, докторантів і студентів вищих навчальних закладів, керівників підприємств харчової промисловості.

Журнал «Наукові праці Національного університету харчових технологій» включено в перелік наукових фахових видань України з технічних та економічних наук (Бюлетень ВАК України № 1, 2010 р.), в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук.

Журнал «Наукові праці Національного університету харчових технологій» індексується наукометричними базами:

- Index Copernicus
- EBSCOhost
- CABI Full Text
- Universal Impact Factor
- Google Scholar
- Журнал рекомендовано Міністерством науки та вищої освіти Польщі для публікації результатів наукових досліджень.

Адреса редакції:

Національний університет
харчових технологій
вул. Володимирська, 68
Київ 01601

Рекомендовано вченою радою Національного університету харчових технологій. Протокол № 4 від 24 вересня 2015 року

ЗМІСТ / CONTENTS

УДК 681.513.5

MINIMAX CONTROL IN LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

A. Lobok, B. Goncharenko, N. Savitska
National University of Food Technologies

Key words:
Minimax control
Point boundary controls
Sobolewski spaces
Perturbation theory
Rayleigh inequality
Bilinear form

Article history:
Received 12.08.2015
Received in revised form 29.08.2015
Accepted 16.09.2015

Corresponding author:
A. Lobok
E-mail:
apl_apl@mail.ru

ABSTRACT

This paper considers the problem of synthesis of optimal control systems that operate under the uncertain information and describes the generalized equations in partial derivatives of parabolic type. The control is in the form of feedback from observed measurements, for implementation of which the integral-differential equation of Riccati type should be solved. The distributed and point boundary controls were constructed, and the recursive algorithm for determining the optimal control of changes in the number of observations was developed. An algorithm was created, which determines the required number of point regulators and their optimal location on the boundary at which the performance criterion does not exceed a given threshold.

МІНІМАКСНЕ УПРАВЛІННЯ В ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, Н.М. Савіцька
Національний університет харчових технологій

У статті розглянуто задачі синтезу оптимального управління системами, що функціонують в умовах невизначеної інформації й описуються узагальненими рівняннями в частинних похідних параболічного типу. Управління має вигляд зворотного зв'язку від спостережуваних вимірів, для реалізації якого необхідно розв'язати інтегро-диференціальне рівняння типу Ріккаті. Окремо побудовано розподілені та зосереджені граничні регулятори, а також наведено рекурентний алгоритм визначення оптимального управління стосовно зміни числа спостережень. Розроблено алгоритм визначення необхідної кількості точкових регуляторів та їх оптимальне розташування на границі області, при яких критерій якості не перевищує заданого порогового значення.

Ключові слова: *мінімаксне управління, точкові граничні регулятори, соболевські простори, теорія збурень, нерівність Релея, білінійна форма.*

Постановка проблеми. Для забезпечення високої якості систем регулювання виникає необхідність використання більш точних математичних моделей об’єктів управління, які враховують не тільки часову, але й просторові координати, тобто систем із розподіленими параметрами. Для цього необхідно розглянути задачі побудови регуляторів для класу систем з розподіленими параметрами параболічного типу, що функціонують в умовах невизначеності, знайти конструктивний розв’язок задачі синтезу мінімаксного граничного розподіленого й точкового управління, а також знайти алгоритм визначення кількості й оптимального розташування точкових регуляторів.

Аналіз останніх досліджень. Задачі мінімаксного управління для систем з зосередженими параметрами, що функціонують в умовах невизначеності, розглядались у [1, 2]. Використовуючи методи теорії збурень, в [3, 4] одержано розв’язок цих задач для систем із розподіленими параметрами з більш загальними функціоналами вартості.

Подальший розвиток теорії мінімаксного управління стосовно систем з розподіленими параметрами, які описуються узагальненими рівняннями параболічного типу та базуються на ідеях, висловлених у [5, 6].

Метою дослідження є синтез мінімаксних граничних розподілених і точкових регуляторів від спостережуваних величин, визначення кількості й оптимального розташування точкових регуляторів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для формулювання математично коректної постановки задачі введемо такі позначення: $\Omega \subset R^n$ — обмежена відкрита область з кусково-гладкою границею Γ; $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$, $S_T = \{(x,t): x \in \Gamma,\ 0 < t < T\}$, де $T < \infty$; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ($\langle \cdot,\cdot \rangle_\Gamma$) — скалярний добуток у гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$ ($L_2(\Gamma)$); $(\cdot,\cdot)$ — евклідів скалярний добуток; “T” — операція транспонування; “$*$” — операція спряження операторів; $H^k(\Omega)$, $H^{k,k}(Q_T)$ — соболевські простори [7];

$$L_2(V, R^N) = \left\{ f : f = [f_1, f_2, \ldots, f_N]^T,\ \int_V \| f(x) \|_{R^N}^2 \, dx < \infty \right\};$$

$L(V,H)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють з гільбертового простору V у гільбертовий простір H; $A(t)$ — еліптичний оператор другого порядку виду:

$$A(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - a_0(x,t), \tag{1}$$

де $a_0(x,t)$, $a_{i,j}(x,t)$ — функції, які задані в циліндрі Q_T та задовольняють такі умови: $a_0 \in C(Q_T)$, $a_{i,j} \in C^1(Q_T)$, $a_0 \ge 0$ майже всюди в Q_T, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\alpha > 0$ $\forall \xi_i \in R^1$ майже всюди в Q_T; $\partial/\partial \nu_A$ —

відповідний оператору $A(t)$ оператор конормальної похідної $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i)$, де $\cos(\vec{n},x_i)$ — це i-й направляючий косинус зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до границі Γ області Ω.

Нехай стан системи описується функцією $\varphi(x,t)$, яка задовольняє рівняння:

$$\int_0^T \left\langle \varphi(t), W^*(t)\eta(t) \right\rangle dt = \int_0^T b(t;u(t),\eta(t))dt + m(f,\eta(0)) \quad \forall\eta(t)\in\Phi_T, \tag{2}$$

де $W(t) = \partial/\partial t - A(t)$; $m(f,\eta(0))$, $b(t;u(t),\eta(t))$ — неперервні білінійні форми; Φ_T — простір "пробних" функцій $\eta(t)$ виду $\Phi_T = \left\{\eta:\ \eta\in H^{2,1}(Q_T),\ \eta\big|_{S_T} = 0;\ \eta(x,T) = 0,\ x\in\Omega\right\}$; $u\in U$ — функція управління ($U = L_2(S_T)$ для розподіленого граничного управління, $U = L_2(S_T;R^N)$ — для зосередженого; $f\in L_2(\Omega)$ — невідомі функції, що належать області

$$S_f = \left\{ f : f\in L_2(\Omega),\ h(f,f)\le 1 \right\}, \tag{3}$$

де $h(f,f)$ — симетрична додатньо визначена квадратична форма.

Слід зазначити, що при зроблених припущеннях для кожного управління $u\in U$ розв'язок рівняння (2) існує та єдиний у просторі $L_2(Q_T)$ [8].

Нехай при деякій реалізації зовнішніх збурень $f\in S_f$ відбуваються такі виміри стану системи (2):

$$z_i(t) = l_i(t;\varphi(t)) = \left\langle l_i(t),\varphi(t)\right\rangle,\ z_i(t)\in L_2(0,T),\ i = 1,2,...,k, \tag{4}$$

де $l_i(t)\in L_2(Q_T)$, $i = 1,2,...,k$ — лінійно незалежні функції.

Завдання полягає в тому, щоб знайти управління $u(t)$ у вигляді лінійного зворотного зв'язку від спостережуваних сигналів $z(t) = \left[z_1(t), z_2(t),..., z_k(t)\right]^T$, тобто у такому вигляді:

$$u(t) = R(t)z(t),\ R(t)\subset L\left(L_2(0,T;R^k),U\right), \tag{5}$$

яке на розв'язках рівняння (2) мінімізує такий функціонал:

$$I(u) = \sup_{f\in S_f}\left[q(\varphi(T),\varphi(T)) + \int_0^T \left(p(t;\varphi(t),\varphi(t)) + d(t;u(t),u(t))\right) dt \right]. \tag{6}$$

У (6) введені такі позначення $q(\varphi(T),\varphi(T))$, $p(t;\varphi(t),\varphi(t))$ — симетричні невід'ємно визначені квадратичні форми, $d(t;u(t),u(t))$ — симетрична додатньо визначена квадратична форма.

Сформульовану задачу будемо називати оптимізаційною задачею мінімаксного управління, а функцію $u(t)\in U$, що доставляє інфімум функціоналу (6), — оптимальним мінімаксним управлінням.

Позначимо через $M, B(t), H, Q, P(t), D(t)$ оператори, що породжені білінійними та квадратичними формами $m(f,\eta)$, $b(t;u(t),\eta(t))$, $h(f,f)$, $q(\varphi(T),\varphi(T))$, $p(t;\varphi(t),\varphi(t))$, $d(t;u(t),u(t))$ відповідно.

Основні результати проведенного дослідження представимо у вигляді теорем 1, 2, 3.

Теорема 1. А) Розв'язок задачі мінімаксного управління (2), (5), (6) не єдиний, причому оптимальне мінімаксне управління, що задовольняє необхідні умови оптимальності, визначається співвідношенням (5), в якому оператор зворотного зв'язку $R(t)$ задовольняє рівняння:

$$\int_0^T \Big(d(t;R(t)L(t)\psi(t),\Theta(t)L(t)\psi(t)) + b(t;\Theta(t)L(t)\psi(t),K(t)\psi(t)) \Big) dt = 0 \qquad (7)$$

$$\forall\ \Theta(t) \in L\Big(L_2(Q_T;R^k),U\Big),$$

де $L(t) \in L\Big(L_2(Q_T), L_2(Q_T, R^k)\Big)$ — оператор виду $L(t) = \langle l(t),\cdot\rangle$, що діє за правилом $L(t)\eta(t) = \langle l(t),\cdot\rangle \eta(t) = \langle l(t),\eta(t)\rangle$; $\psi(t)$ — розв'язок рівняння:

$$\int_0^T \Big\langle \psi(t), W^*(t)\eta(t) \Big\rangle dt = \int_0^T b(t;R(t)L(t)\psi(t),\eta(t))dt + m(l_{\max}(V),\eta(0))$$

$$\forall\ \eta(t) \in \Phi_T, \qquad (8)$$

$l_{\max}(V) \in L_2(\Omega)$ — власна функція, що відповідає максимальному власному значенню $\lambda_{\max}(V)$ оператора $V = H^{-1}M^*K(0)M$; $K(t)$ — самоспряжений додатньо визначений оператор, що задовольняє рівняння:

$$\int_0^T \langle K(t)\eta(t), W(t)\zeta(t)\rangle dt + \int_0^T \langle K(t)\zeta(t), W(t)\eta(t)\rangle dt = \int_0^T b(t;R(t)L(t)\zeta(t),K(t)\eta(t))dt +$$

$$+\int_0^T b(t;R(t)L(t)\eta(t),K(t)\zeta(t))dt + \int_0^T d(t;R(t)L(t)\eta(t),R(t)L(t)\zeta(t))dt +$$

$$+\int_0^T p(t;\eta(t),\zeta(t))dt + q(\eta(T),\zeta(T)) \qquad \forall\ \eta(t),\zeta(t) \in \Phi_0, \qquad (9)$$

де $\Phi_0 = \Big\{\eta : \eta \in H^{2,1}(Q_T),\ \eta\big|_{S_T} = 0,\ \eta(x,0) = 0,\ x \in \Omega\Big\}$.

При цьому значення функціоналу (6) на оптимальному управлінні (5), (7) може бути представлено у такому вигляді:

$$I(u) = \lambda_{\max}(V) = \lambda_{\max}(H^{-1}M^*K(0)M). \qquad (10)$$

Б) Один із розв'язків оптимізаційної задачі (2), (5), (6), що задовольняє необхідні умови оптимальності, визначається співвідношеннями:

$$u_0(t) = R_0(t)z(t),\ R_0(t) = -D^{-1}(t)B^*(t)K(t)l^T(t)\Big\langle l(t), l^T(t)\Big\rangle^{-1}, \qquad (11)$$

де $l(t) = \left[l_1(t), l_2(t), ..., l_k(t)\right]^T$, $\left\langle l(t), l^T(t)\right\rangle = \left\{\left\langle l_i(t), l_j(t)\right\rangle\right\}_{i,j=1}^{k}$ — матриця Грамма [8], $K(t)$ — розв'язок рівняння:

$$\int_0^T \left\langle K(t)\eta(t), W(t)\zeta(t)\right\rangle dt + \int_0^T \left\langle K(t)\zeta(t), W(t)\eta(t)\right\rangle dt - q(\eta(T), \zeta(T)) =$$

$$= -\int_0^T \left\langle B(t)D^{-1}(t)B^*(t)K(t)\eta(t), K(t)\zeta(t)\right\rangle dt + \int_0^T p(t;\eta,\zeta)dt \quad \forall\ \eta(t),\zeta(t) \in \Phi_0 . \quad (12)$$

Значення критерію (6) на мінімаксному управлінні (11) також визначається за формулою (10), де $K(t)$ в цьому випадку — розв'язок рівняння (12).

Доведення теореми не наводиться. Відзначимо лише, що воно базується на ідеях, висловлених у [9], і передбачає використання нерівностей Релея та методів теорії збурень [10].

Зауваження 1. Якщо збурення діють на систему (2) не тільки в початковий момент часу, але й впливають протягом усього часу регулювання, то розглянута вище задача не має розв'язку.

Зауваження 2. Нехай білінійні форми $b(t;u,\eta)$ та $d(t;u,u)$ мають такий вигляд:

$$b(t;u,\eta) = \begin{cases} -\int_\Gamma\int_\Gamma B(x,y,t)u(y,t)\dfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial\nu_{A_x^*}}dxdy, & \text{якщо } U = L_2(S_T), \\ -\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\int_\Gamma b_i(x,t)\dfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial\nu_{A_x^*}}dx, & \text{якщо } U = L_2(S_T;R^N), \end{cases} \quad (13)$$

$$d(t;u,u) = \begin{cases} -\int_\Gamma\int_\Gamma D(x,y,t)u(x,t)u(y,t)dxdy, & \text{якщо } U = L_2(S_T), \\ \left(D(t)u(t),u(t)\right), & \text{якщо } U = L_2(S_T;R^N), \end{cases} \quad (14)$$

де $B(x,y,t)$, $D(x,y,t) \in L_2(0,T;L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma))$, причому $D(x,y,t)$ — симетрична додатньо визначена функція; $D(t)$ — симетрична додатньо визначена матриця, елементи якої належать простору $L_2(0,T)$; $b_i(x,t) \in L_2(S_T)$; $u(t) = \left[u_1(t), u_2(t), ..., u_N(t)\right]^T$; $u_i(t) \in L_2(0,T)$.

Застосувавши формально другу формулу Гріна, рівняння (2) можна інтерпретувати як крайову задачу Діріхле з граничним управлінням

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = A(t)\varphi(t) \quad \text{в області } Q_T, \\ \varphi(0) = Mf \quad \text{в області } \Omega, \quad \varphi(t) = B(t)u(t) \quad \text{в області } S_T, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$B(t)u(t) = \begin{cases} \int_\Gamma B(x,y,t)u(y,t)dy, & \text{якщо } U = L_2(S_T), \\ \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)u_i(t), & \text{якщо } U = L_2(S_T;R^N). \end{cases} \quad (16)$$

Зауваження 3. Якщо білінійні форми $b(t;u,\eta)$ та $d(t;u,u)$ задовольняють співвідношення (13), (14), то ядро $K(x,y,t)$ оператора $K(t)$, який є розв'язком рівняння (12), формально задовольняє інтегро-диференціальне рівняння типу Ріккаті:

$$\frac{\partial K(x,y,t)}{\partial t} = -A_x^*(t)K(x,y,t) - A_y^*(t)K(x,y,t) +$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial K(x,\xi,t)}{\partial \nu_{A_\xi^*}} G(\xi,\eta,t) \frac{\partial K(y,\eta,t)}{\partial \nu_{A_\eta^*}} d\xi d\eta - P(x,y,t) \tag{17}$$

з початковими та крайовими умовами виду

$$\begin{cases} K(x,y,T) = Q(x,y), & (x,y) \in \Omega_x \times \Omega_y; \\ K(x,y,t) = 0, & (x,y,t) \in \Gamma_x \times \Omega_y \times (0,T); \\ K(x,y,t) = 0, & (x,y,t) \in \Omega_x \times \Gamma_y \times (0,T), \end{cases}$$

де

$$G(x,y,t) = \begin{cases} \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} B(x,\xi,t) D^{-1}(\xi,\eta,t) B(y,\eta,t) d\xi d\eta, & \text{якщо} \quad U = L_2(S_T), \\ B^T(x,t) D^{-1}(t) B(y,t), & \text{якщо} \quad U = L_2(S_T;R^N), \end{cases} \tag{18}$$

$Q(x,y)$, $P(x,y,t)$, $D^{-1}(x,y,t)$ — ядра операторів Q, $P(t)$ і $D^{-1}(t)$ відповідно; $B(x,t) = \left[b_1(x,t), b_2(x,t), \ldots, b_N(x,t)\right]^T$; індекси в операторів $A(t)$, $\partial/\partial\nu_A$ вказують, по якій змінній діють ці оператори.

Позначимо через $u^k(t)$ оптимальне мінімаксне управління (11), одержане при k вимірах (4), і розглянемо задачу побудови рекурентного алгоритму визначення оптимального управління вихідної оптимізаційної задачі відносно зміни числа спостережень k. Розв'язок цієї задачі можливий за теоремою 2.

Теорема 2. Оптимальне мінімаксне управління $u^k(t)$ знаходиться за такою рекурентною процедурою:

$$\begin{cases} u^k(t) = u^{k-1}(t) + h_{k-1}^{-1}(t) F(t) V_{k-1}(t) l_k(t) \Big(z_k(t) - l_k(t; F^+(t) u^{k-1}(t)) \Big), \\ u^0(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{19}$$

де $F(t) = -D^{-1}(t) B^*(t) K(t)$, $h_{k-1}(t) = \langle l_k(t), V_{k-1}(t) l_k(t) \rangle$, "$+$" — операція псевдообернення операторів [10], $V_k(t) \in L\big(L_2(Q_T), L_2(Q_T)\big)$ — самоспряжений оператор, що задовольняє таке рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} V_k(t) = V_{k-1}(t) - h_{k-1}^{-1}(t) V_{k-1}(t) l_k(t) \langle V_{k-1}(t) l_k(t), \cdot \rangle, \\ V_0(t) = E, \end{cases} \tag{20}$$

де E — тотожний оператор.

Доведення теореми здійснюється шляхом використання формул обернення блочних матричних операторів [7, 10].

Зауваження 4. Якщо $l_i(t)$, $i = 1, 2, ..., k$ — лінійно незалежна ортонормована в просторі $L_2(\Omega)$ система функцій, тобто $\langle l_i(t), l_i(j) \rangle = \delta_{ij}$, де δ_{ij} — символ Кронекера, то оптимальне управління $u^k(t)$ задовольняє таке рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} u^k(t) = u^{k-1}(t) + F(t) l_k(t) z_k(t), \qquad k = 1, 2, 3, ..., \\ u^0(t) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Оскільки ефективність управління визначається значенням критерію якості на даному управлінні, то доцільно більш детально розглянути значення функціоналу (6) на оптимальному управлінні (11). Згідно з теоремою 1, воно визначається таким виразом:

$$I(u_0) = \lambda_{\max}(H^{-1} M^* K(0) M), \tag{22}$$

де оператор $K(t)$ задовольняє рівняння (12). Очевидно, що обчислити $I(u_0)$ в загальному випадку досить важко, оскільки для цього треба розв'язати дві дуже складні задачі: перша задача — розв'язання рівняння типу Ріккаті (12), друга — визначення максимального власного значення нескінченно вимірного оператора. Зупинимось на окремих випадках, коли значення $I(u_0)$ обчислюється порівняно просто.

1. Розглянемо випадок розподіленого граничного управління, тобто випадок, коли білінійна форма $b(t; u(t), \eta(t))$ задається формулою (13) при $U = L_2(S_T)$, в якій $B(x, y, t) = b(x)\delta(x - y)$, де $\delta(x - y)$ — дельта-функція Дірака. Білінійні та квадратичні форми $m(f, \eta)$, $h(f, f)$, $q(\varphi(T), \varphi(T))$, $p(t; \varphi, \varphi)$, $d(t; u, u)$ визначимо таким чином:

$$m(f, \eta) = \int_\Omega m(x) f(x) \eta(x) dx,$$

$$h(f, f) = \int_\Omega h(x) f^2(x) dx,$$

$$d(t; \varphi, \varphi) = \int_\Gamma d(x) u^2(x, t) dx,$$

$$q(\varphi(T), \varphi(T)) = \int_\Omega q(x) \varphi^2(x, T) dx,$$

$$p(t; \varphi, \varphi) = \int_\Omega p(x) \varphi^2(x, t) dx,$$

де $q(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0$, $h(x) > 0$, $d(x) > 0$.

Тоді в припущенні, що $A(t)$ — самоспряжений, не залежний від часу t оператор, тобто $A(t) = A = A^*$, можна показати, що значення функціонала (22) дорівнює $I(u_0) = \max\limits_{1 \leq i < \infty} \frac{m_i^2}{h_i} k_i$, де

$$k_i = \alpha_i^{-1}\left[\mu_i \frac{p_i\alpha_i - \lambda_i + \mathrm{th}(\mu_i T)}{(p_i\alpha_i - \lambda_i)\mathrm{th}(\mu_i T) + \mu_i} + \lambda_i\right], \ \mu_i = \sqrt{\lambda_i^2 + \alpha_i q_i} \ ,$$

$$\begin{pmatrix} m_i \\ h_i \\ q_i \\ p_i \end{pmatrix} = \int\limits_\Omega \begin{pmatrix} m(x) \\ h(x) \\ q(x) \\ p(x) \end{pmatrix} \omega_i^2(x)dx \ , \ \alpha_i = \int\limits_\Gamma \frac{b^2(x)}{d(x)}\left(\frac{\partial\omega_i(x)}{\partial\nu_{A_x}}\right)^2 dx \ .$$

В останніх формулах позначено: $\mathrm{th}(\cdot)$ — гіперболічной тангенс, λ_i та $\omega_i(x) \in L_2(\Omega)$ — власні значення та відповідні ортонормовані в просторі $L_2(\Omega)$ власні функції оператора A, які задовольняють рівняння:

$$\begin{cases} \langle \omega_i, A\eta \rangle = \lambda_i \langle \omega_i, \eta \rangle & \forall \ \eta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \omega_i(x) = 0, \ x \in \Gamma; \quad \lambda_i \to -\infty \ \text{при} \ i \to \infty. \end{cases} \tag{23}$$

2. Нехай тепер білінійна форма $b(t;u(t),\eta(t))$ визначається співвідношенням (13), в якому множина допустимих управлінь $U = L_2(S_T;R^N)$, тобто розглянемо випадок граничних зосереджених управлінь. Стосовно квадратичних форм $q(\varphi(T),\varphi(T))$, $p(t;\varphi(t),\varphi(t))$, $d(t;u(t),u(t))$ припустимо, що

$$q(\varphi(T),\varphi(T)) = \langle q, \varphi(T) \rangle^2 \, , \ p(t;\varphi(t),\varphi(t)) = 0 \, , \ d(t;u(t),u(t)) = \sum_{i=1}^N d_i(t) u_i^2(t) \, ,$$

де $q \in L_2(\Omega)$; $d_i(t) \in L_2(0,T)$, $d_i(t) > 0$.

Тоді, використовуючи результати, наведені у [6, 9], можна показати, що значення функціонала (22) дорівнює

$$I(u_0) = \lambda_{\max}\Big(\nu(0) H^{-1} M^* r(0) \langle M^* r(0), \cdot \rangle\Big) = \nu(0) \langle H^{-1} M^* r(0), M^* r(0) \rangle, \tag{24}$$

де

$$\nu(t) = \left(1 + \int\limits_t^T \alpha(\tau)d\tau\right)^{-1}, \ \alpha(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i(t)} \left\langle b_i(t), \frac{\partial r(t)}{\partial \nu_A} \right\rangle_\Gamma^2 ,$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^\infty e^{\lambda_i (T-t)} \langle q, \omega_i \rangle \omega_i \ , \tag{25}$$

а λ_i та ω_i — власні значення та відповідні їм власні функції оператора A, які задовольняють рівняння (23).

Розглянемо точкове граничне управління $u(t) \in U = L_2(S_T;R^N)$. Для цього в (13) введемо $b_i(x,t) = \delta(x - x_i)$, $x_i \in \Gamma$, $i = 1,2,...,N$. Тоді рівняння (2) описує систему з точковими граничними управліннями. Відмітимо, що такий вибір функцій $b_i(x,t)$ допустимий при певних обмеженнях на розмірність простору

$\Omega \subset R^n$ та за умови більш високої гладкості "пробних" функцій $\eta(t)$ у (2). Це можливо, якщо $n \le 3$ та вимагати, щоб функції $\eta(t)$ належали не простору $H^{2,1}(Q_T)$, як припускалось вище, а більш гладкому простору функцій $H^{4,1}(Q_T)$.

Введемо таке позначення:

$$J_N(x_1, x_2, ..., x_N) = \inf_{u \in L_2(S_T; R^N)} \sup_{f \in S_f} \left[\langle q, \varphi(T) \rangle^2 + \int_0^T \sum_{i=1}^N d_i(t) u_i^2(t) dt \right] \qquad (26)$$

та розглянемо задачу визначення такого числа регуляторів N у вигляді зворотного зв'язку (5) та їх оптимального розташування $(x_1^0, x_2^0, ..., x_N^0)$, $x_i^0 \in \Gamma$, при якому виконується умова

$$J_N(x_1^0, x_2^0, ..., x_N^0) = \inf_{x_i \in \Gamma,\ i=1,2,...,N} J_N(x_1, x_2, ..., x_N) < \varepsilon, \qquad (27)$$

де $\varepsilon > 0$ —наперед задане порогове значення.

Використовуючи теорему 1 та співвідношення (24), (25), можна довести справедливість наступної теореми.

Теорема 3. Число регуляторів, при яких виконується нерівність (27), задовольняє умову $N \ge N_0$, де

$$N_0 = \left[\frac{\Delta - \varepsilon}{\varepsilon \beta \gamma} \right] + 1, \qquad (28)$$

$$\Delta = \left\langle H^{-1} M^* r(0), M^* r(0) \right\rangle, \beta = \sup_{x \in \Gamma} \int_0^T \left(\frac{\partial r(x,t)}{\partial \nu_{A_x}} \right)^2 dt, \gamma = \min_i \left(\max_{t \in (0,T)} d_i(t) \right)^{-1}, \qquad (29)$$

$[\cdot]$ — ціла частина числа. Всі регулятори при цьому повинні бути зосереджені в одній точці x_0, яка визначається таким чином:

$$x_0 = \arg\sup_{x \in \Gamma} \int_0^T \left(\frac{\partial r(x,t)}{\partial \nu_{A_x}} \right)^2 dt. \qquad (30)$$

Зауваження 5. Останню теорему можна сформулювати так: для того, щоб виконувалась нерівність (27), потрібен лише один точковий регулятор, розташований в точці (30) із сумарною інтенсивністю $\sum_{i=1}^N u_i(t)$, $N \ge N_0$, де

$$u_i(t) = R_i(t) z(t), \ R_i(t) = -\frac{\nu(t)}{d_i(t)} \frac{\partial r(x,t)}{\partial \nu_{A_x}} \Bigg|_{x = x_0} \int_\Omega r(y,t) l^T(y,t) dy \left\langle l(t), l^T(t) \right\rangle^{-1},$$

функції $\nu(t)$, $r(x,t)$ визначаються за формулами (25), $z(t)$ — спостереження виду (4), а N_0 задовольняє співвідношенню (28).

Зауваження 6. Якщо $d_i(t) \equiv d = const > 0$, $i = 1,2,3,...$, то N_0 — мінімальне число регуляторів, що задовольняє нерівність (27).

Висновки

У результаті проведенного дослідження запропоновано розв'язання декількох задач синтезу оптимального управління розподіленими системами параболічного типу, які функціонують в умовах невизначеності, розв'язок задачі оптимального розташування точкових граничних регуляторів і визначення їх кількості.

Література

1. *Кириченко Н.Ф.* Минимаксное управление и оценивание в динамических системах [Текст] / Н.Ф. Кириченко // Автоматика. — 1982. — № 1. — С. 32—39.

2. *Наконечный А.Г.* Минимаксные оценки параметров [Текст] / А.Г. Наконечный // Вычислительная и прикладная математика. — 1979. — Вып. 39. — С. 17—24.

3. *Наконечный А.Г.* Мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку крайових задач для параболічних рівнянь при точкових спостереженнях [Текст] / А.Г. Наконечный, О.А. Капустян // Вісник Київського університету, Серія фізико-математичні науки. — 2001. — Вип. 1. — С. 191—196.

4. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності [Текст] / О.Г. Наконечний // Наукові записки КНУ ім. Т.Г. Шевченка. — 2004. — Т. 7. — С. 102—112.

5. *Лобок А.П.* Минимаксные регуляторы в системах с распределенными параметрами [Текст] / А.П Лобок // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем. — 1983. — Вып. 2. — С. 62—67.

6. *Лобок О.П.* Синтез оптимального мінімаксного керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови неточного і неповного їх вимірювання [Текст] / О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, Л.Г. Віхрова // Збірник наукових праць КНТУ; Кіровоград. — 2013. — Вип. 26. — С. 124—132.

7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев; — М.: Наука, 1979. — 520 с.

8. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

9. *Лобок О.П.* Мінімаксне управління лінійними багатовимірними об'єктами зі стаціонарними зовнішніми збуреннями [Текст] / Б.М. Гончаренко, Н.М. Савіцька // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — Київ: НУХТ. — 2013. — № 46. — С. 43—51.

10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов [Текст] / Т.М. Като; — М.: Мир, 1972. — 739 с.

МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.П. Лобок, Б.Н. Гончаренко, Н.М. Савицкая
Национальный университет пищевых технологий

В статье рассматриваются задачи синтеза оптимального управления системами, которые функционируют в условиях неопределенной информации и описываются обобщенными уравнениями в частных производных параболического типа. Управление имеет вид обратной связи от наблюдаемых измерений, для реализации которого необходимо решить интегро-дифференциальное уравнение типа Риккати. Отдельно строятся распреде-

ленные и сосредоточенные граничные регуляторы, а также приводится рекуррентный алгоритм определения оптимального управления относительно изменения числа наблюдений. Разработан алгоритм определения необходимого количества точечных регуляторов и их оптимальное расположение на границе области, при которых критерий качества не превышает заданного порогового значения.

Ключевые слова: *минимаксное управление, точечные граничные регуляторы, соболевские пространства, теория возмущений, неравенство Рэлея, билинейная форма.*