ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том XVII, №12

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1981

УДК 539.384:624.073

Н. Г. Медведев, В. В. Емельяненко

К ОБОСНОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Имеется много работ, где излагаются уточненные или неклассические теории оболочек. Их обзор приведен в [7, 8].

С другой стороны, разрешимость задач теории оболочек, сходимость методов Ритца—Галеркина и т. д. тесно связано с коэрцитивностью некоторой симметричной билинейной формы, порожденной потенциальной энергией деформации оболочки. В случае классической теории оболочек такое исследование проведено в работах [3—6].

Ниже излагается вопрос о коэрцитивности указанной формы в случае ортотропных оболочек вращения переменной толщины в рамках «сдвиговой» модели, а также тесно связанные с этим условия закрепления, при которых нет жестких смещений.

§ 1. Аналогично тому, как это проделано в [7], для трансверсально-изотропной оболочки, потенциальную энергию деформации тонкой ортотропной оболочки в рамках «сдвиговой» модели можно представить в виде

$$U(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[h\left(E_{11}\varepsilon_{11}^2+2E_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+E_{22}\varepsilon_{22}^2+G_{12}\varepsilon_{12}^2+G_{13}\varepsilon_{13}^2+G_{23}\varepsilon_{23}^2\right)+$$

$$+\frac{h^3}{12}\left(E_{11}\varkappa_{11}^2+2E_{12}\varkappa_{11}\varkappa_{22}+E_{22}\varkappa_{22}^2+4G_{12}\varkappa_{12}^2\right)\Big]A_1A_2d\Omega. \tag{1.1}$$

В случае оболочки вращения компоненты деформации ε_{ij} и $\varkappa_{rs}$ определяются выражениями

$$\varepsilon_{11}(\omega)=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{w}{R_1};\quad \varepsilon_{22}(\omega)=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{A_1A_2}\frac{dA_2}{dz}+\frac{w}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12}(\omega)=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{A_1A_2}\frac{dA_2}{dz};\quad \varepsilon_{13}(\omega)=\gamma_1+\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{u}{R_1};$$

$$\varepsilon_{23}(\omega)=\gamma_2+\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{v}{R_2};\quad \varkappa_{11}(\omega)=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial z};\quad \varkappa_{22}(\omega)=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\varphi}+\frac{\gamma_1}{A_1A_2}\frac{dA_2}{dz};$$

$$2\varkappa_{12}(\omega)=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_2}{A_2}\right)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{A_1R_2}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{A_2R_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{A_1}\frac{dA_2}{dz}\right), \tag{1.2}$$

где ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} и ε_{13}, ε_{23} характеризуют равномерную по толщине оболочки деформацию, связанную с тангенциальным растяжением (в срединной поверхности) и трансверсальным сдвигом (в плоскостях, перпендикулярных срединной поверхности); $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$, $\varkappa_{12}$ определяют деформацию изгиба и кручения срединной поверхности; $\omega=(u, v, w, \gamma_1, \gamma_2)$ — вектор, определяющий смещения срединной поверхности оболочки (u, v, w) и углы поворота нормального элемента (γ_1, γ_2), которые являются функциями от φ, z, периодическими с периодом 2Π по φ; $z\in[0, L]$, L — длина оболочки; A_1, A_2, R_1, R_2 — параметры Ламе и радиусы кривизны

$$A_1=\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};\quad A_2=r;\quad R_1=-A_1^3\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right)^{-1};\quad R_2=rA_1;$$

$r=r(z)$ — уравнение образующей оболочки вращения.

Коэффициенты E_{ij} имеют вид [9]

$$E_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2};\quad E_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2};\quad E_{12}=\frac{\nu_1E_2}{1-\nu_1\nu_2}=\frac{\nu_2E_1}{1-\nu_1\nu_2}.$$

где E_1, E_2 и ν_1, ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона по главным направлениям φ, z; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига; $h=h(\varphi, z)$ — толщина оболочки.

Введем обозначения

$$\omega = (u, v, w, \gamma_1, \gamma_2) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5);$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11};\quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22};\quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{12};\quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{13};\quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{23};\quad \varepsilon_6 = \chi_{12};\quad \varepsilon_7 = \chi_{22};\quad \varepsilon_8 = \chi_{12};\quad (1.3)$$

§ 2. Пусть Ω — прямоугольная область в R^2: $\Omega = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < z < L\}$; $\widetilde{H} = (\widetilde{W}_2^1(\Omega))^5$ — прямое произведение пространств Соболева [1] периодических по φ с периодом 2 П функций: $\widetilde{H} = \{\omega = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \mid u_i \in \widetilde{W}_2^1(\Omega),\ i = \overline{1, 5}\}$ с нормой

$$\|\omega\|^2_{\widetilde{H}} = \sum_{i=1}^{5} \|u_i\|^2_{W_2^1(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что функция $\omega = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ удовлетворяет некоторым условиям, связанным с закреплением оболочки, которые можно представить в виде

$$I\omega = 0,$$

где $I \in L(\widetilde{H}, V)$, т. е. I — линейное непрерывное отображение из $\widetilde{H}$ в V; V — некоторое гильбертово пространство, которое определим ниже.

Так как $I \in L(\widetilde{H}, V)$, то множество функций ω из $\widetilde{H}$, для которых $I\omega = 0$, является линейным множеством, замкнутым в $\widetilde{H}$. Это подпространство обозначим через H. Норму в H определим соотношением (2.1) и обозначим $\|\cdot\|_H$.

Предполагаем выполненными следующие допущения:

1) $h(\varphi, z) \in L_\infty(\Omega)$; $h_1 \leqslant h(\varphi, z) \leqslant h_2$; $h_1, h_2 = \text{const} > 0$;
2) E_1, E_2, G_{12}, C_{13}, G_{23} — положительные постоянные;
3) $\nu_1\ \nu_2 = \text{const}$, причем $|\nu_1| < 1$, $|\nu_2| < 1$;
4) $r(z) \in C^1[0, L]$; $\dfrac{d^2r}{dz^2} \in L_\infty(0, L)$; $r(z) \geqslant \text{const} > 0$;
5) $I \in L(\widetilde{H}, V)$ и для $\forall \omega \in \widetilde{H}$ из условий $\varepsilon_i = 0$ $(i = 1,8)$, $I\omega = 0$ следует, что $\omega = 0$.

Рассмотрим в H симметричную билинейную форму, порожденную потенциальной энергией деформации оболочки (1.1)

$$a(\omega', \omega'') = \int_\Omega \Big\{h\,[E_{11}\varepsilon_1'\varepsilon_1'' + E_{12}(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' + \varepsilon_1''\varepsilon_2') + E_{22}\varepsilon_2'\varepsilon_2'' + G_{12}\varepsilon_3'\varepsilon_3'' + G_{13}\varepsilon_4'\varepsilon_4'' +$$

$$+ G_{23}\varepsilon_5'\varepsilon_5''] + \frac{h^3}{12}\,[E_{11}\varepsilon_6'\varepsilon_6'' + E_{12}(\varepsilon_6'\varepsilon_7'' + \varepsilon_6''\varepsilon_7') + E_{22}\varepsilon_7'\varepsilon_7'' + 4G_{12}\varepsilon_8'\varepsilon_8'']\Big\}\, A_1A_2\,d\Omega.$$

Здесь с учетом обозначений (1.3) ε_i' и ε_i'' — компоненты деформации, порожденные векторами ω' и ω''.

В силу допущений 1)—4) форма $a(\omega', \omega'')$ определена для любых ω', $\omega'' \in H$. На основании допущения 5) из условия $\omega \in H$, $a(\omega, \omega) = 0$ вытекает, что $\omega = 0$. Следовательно, форма $a(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, определяемую выражением

$$\|\omega\|^2_{H'} = a(\omega, \omega). \tag{2.2}$$

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены допущения 1)—5). Тогда в пространстве H нормы, определяемые выражениями (2.1), (2.2), эквивалентны, т. е.

$$m\,\|\omega\|_H \leqslant \|\omega\|_{H'} \leqslant M\,\|\omega\|_H;\quad \forall \omega \in H;\quad m, M = \text{const} > 0. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть неравенства (2.3) очевидна. Докажем левую часть. Рассматриваем деформации ε_i как систему линейных дифференциальных операторов N_i, действующих из H в $L_2(\Omega)$, которые с учетом (1.3) можно представить в виде

$$\varepsilon_i(\omega) = N_i\omega = \sum_{j=1}^{5}\sum_{|\alpha|\leqslant 1} n_{ji\alpha}D^\alpha u_j; \qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2);$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial\varphi^{\alpha_1}\partial z^{\alpha_2}}; \qquad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2; \qquad n_{ji\alpha}=n_{ji\alpha}(z); \qquad i=\overline{1,8}. \tag{2.4}$$

Докажем, что система операторов N_i коэрцитивна в $\widetilde{H}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{8}\|N_i\omega\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{5}\|u_j\|_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|\omega\|^2_{\widetilde{H}}; \qquad \forall\omega\in\widetilde{H} \qquad (c_1=\text{const}>0).$$

Следуя [10], рассматриваем прямоугольную матрицу 5×8, элементы которой определяются выражением

$$N_{ji}(\xi) = \sum_{|\alpha|=1} n_{ji\alpha}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}; \qquad i=\overline{1,8}; \qquad j=\overline{1,5}. \tag{2.5}$$

С учетом соотношений (1.2), (2.4), (2.5) она имеет вид

$$(N_{ji}(\xi)) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}\xi_2 & 0 & A_2^{-1}\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^{-1}R_1^{-1}\xi_1 \\ 0 & A_2^{-1}\xi_1 & A_1^{-1}\xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{-1}R_2^{-1}\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{-1}\xi_2 & 0 & A_2^{-1}\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^{-1}\xi_1 & A_1^{-1}\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{-1}\xi_2 & A_2^{-1}\xi_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\forall\,\xi=(\xi_1,\ \xi_2)\in C_2,\ \xi\neq 0$ (C_2 — пространство двумерных комплексных векторов) ранг матрицы $(N_{ji}(\xi))$ равен 5, а это является достаточным условием коэрцитивности системы операторов N_j [10].

Из выражений (1.1), (2.2), (2.4) с учетом допущений 1)—4) можно получить

$$\|\omega\|^2_{H'} \geqslant c_2\int_\Omega\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i^2(\omega)\,d\Omega = c_2\sum_{i=1}^{8}\|N_i\omega\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (c_2=\text{const}>0). \tag{2.6}$$

Аналогично [10] можно показать, что для коэрцитивной системы операторов N_i в подпространстве H справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{8}\|N_i\omega\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant c_3\|\omega\|^2_H \qquad (c_3=\text{const}>0). \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) следует левая часть неравенства (2.3) и теорема доказана.

§ 3. В связи с использованием теоремы 1 возникает вопрос о возможных видах оператора I, обеспечивающего выполнение допущения 5). Последний вопрос связан с нахождением решения однородной системы уравнений в частных производных $\varepsilon_i(\omega)=0$ $(i=1,8)$. Аналогично тому, как это проделано в [2], общее решение этой системы находится методом разделения переменных и имеет вид

$$u = A_1^{-1}\{[C_1(r-r'z)+C_2r']\cos\varphi + [C_3(r-r'z)+C_4r']\sin\varphi + C_5\};$$
$$v = (C_1z-C_2)\sin\varphi - (C_3z-C_4)\cos\varphi + C_6r; \qquad r'=\frac{dr}{dz}; \tag{3.1}$$

$$w = A_1^{-1}\{[C_2 - C_1(rr' + z)]\cos\varphi + [C_4 - C_3(rr' + z)]\sin\varphi - C_5 r'\};$$

$$\gamma_1 = C_1\cos\varphi + C_3\sin\varphi; \qquad \gamma_2 = A_1^{-1}[r'(C_3\cos\varphi - C_1\sin\varphi) + C_6]; \qquad C_i = \mathrm{const}.$$

Следуя [5] и используя (3.1), можно показать, что если $I\in L(\tilde{H}, V)$ и соотношение $I\omega=0$ обеспечивает закрепление оболочки в трех различных точках хотя бы на одном из торцов, то выполняется допущение 5). Например, оператор $I:\tilde{H}\to V$ может иметь вид

$$I\omega = \{u|_{S_1}, v|_{S_1}, w|_{S_1}\}; \qquad S_1 \subset S; \qquad \int\limits_{S_1} dS > 0, \tag{3.2}$$

где

$$S = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ z = 0\} \text{ или } S = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ z = L\}.$$

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии оболочки: для заданного элемента $f\in H^*$ (H^* — пространство, сопряженное к H; f характеризуют внешнюю нагрузку, действующую на оболочку найти функцию $\omega_0=(u_0, v_0, w_0, \gamma_{10}, \gamma_{20})$, для которой $\omega_0\in H$,

$$a(\omega_0, \omega) = \int\limits_{\Omega}(f_u u + f_v v + f_w w)A_1A_2 d\Omega + \int\limits_{S}(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)\,dS; \ \forall\omega\in H, \tag{3.3}$$

где f_u, f_v, f_w — компоненты внешней нагрузки, действующие на оболочку; M_1, M_2 — моменты заданные на торце, причем ω_0 удовлетворяет граничным условиям (3.2), т. е. оболочка закреплена по u, v, w на части одного из торцов. Так как в этом случае выполнены условия теоремы 1, то форма $a(\omega', \omega'')$ коэрцитивна. Отсюда следует, что решение задачи (3.3) существует и единственно.

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения .— М. :Наука, 1975.—430 с.
2. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости.— Киев : Наук. думка, 1973.—228 с.
3. Корнеев В. Г. О дифференциальных операторах теории тонких оболочек и теории оболочек Рейсснера.— Исслед. по теории упругости и пластичности, 1974, № 10, с. 160—173.
4. Литвинов В. Г., Медведев Н. Г. Задача устойчивости оболочек вращения и методы Ритца—Галеркина.— Прикл. механика, 1977, 13, № 7, с. 9—16.
5. Литвинов В. Г., Медведев Н. Г. Некоторые вопросы устойчивости оболочек вращения.—Мат. физика, 1979, вып. 26, с. 101—109.
6. Медведев Н. Г. О разрешимости задач теории ортотропных некруговых цилиндрических оболочек.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 10, с. 908—911.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.—246 с.
8. Хорошун Л. П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек.— Прикл. механика, 1978, 14, № 10, с. 3—21.
9. Хорошун Л. П., Кошевой И. К. Устойчивость ортотропных оболочек неоднородного строения по толщине.— Прикл. механика, 1980, 16, № 5, с. 37—44.
10. Hlavacek I., Necas J. On inequalities of Korns type. 1. Boundaryvalue problems for elliptic systems of partial differential equations.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1970, 36, N 4, p. 305—311.

Институт механики АН УССР
Киев

Поступила
18.VII 1980 г.