МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ВСЕУКРАЇНСЬКА
НАУКОВО-МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

СУЧАСНІ НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Київ УДУХТ 2001

промисловості.

Література

1. Методи расчета оболочек (А.И.Гузь, И.С.Чернышенко, Вал. И.Чехов, Вик. И.Чехов, К.И.Шнеренко.–Т.Л. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями.– К: Наук. думка, 1980.– 636 с.
2. К.І.Шнеренко, А.С.Богатирчук, О.М.Нещадим. Концентрація напружень у сферичних композитних днищах з отворами.– Наукові праці УДУХТ, № 6.–К. УДУХТ, 2000р.– С.52.

НОВІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ

Баранник А.Ф. докт. фіз.-мат. наук

Полтавський педагогічний інститут

Юрик І.І. канд. фіз.-мат. наук

Український державний університет харчових технологій

Метод симетрійної редукції рівняння до рівнянь з меншим числом змінних, зокрема, до звичайних диференціальних рівнянь грунтується на дослідженні підгрупової структури групи інваріантності даного диференціального рівняння. Розв'язки одержані при цьому являються інваріантними відносно підгрупи групи інваріантності рівняння. Слід відзначити, що інваріантність накладає дуже жорсткі умови на розв'язки, тому симетрійна редукція у багатьох випадках не дозволяє одержати широкі класи розв'язків. Останній час увагу до себе привернена ідея умовної інваріантності диференціальних рівнянь. Під умовною симетрією рівняння розуміють симетрію деякої підмножини розв'язків. Для багатьох важливих нелінійних рівнянь математичної фізики існують підмножини розв'язків, симетрія яких суттєво відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків. Такі підмножини виділяють з допомогою додаткових умов, які являють собою диференціальні рівняння в частинних похідних. Опис в явному вигляді цих додаткових умов є складною проблемою, і на жаль, яких-небудь ефективних методів щодо її розв'язання не існує.

В даній статті, використовуючи метод запропонований в [1,2] побудовані нові класи розв'язків рівнянь Ліувілля і сінус-Гордона. Суть цього методу полягає в слідуючому.

Нехай маємо рівняння в частинних похідних

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0\,, \qquad (1)$$

$u=u(x)$, $x=(x_0, x_1,\ldots, x_n) \in R_{1,n}$, $\underset{m}{u}$ - сукупність всеможливих похідних m-го порядку, і нехай рівняння (1) має нетривіальну алгебру симетрії. Для побудови розв'язків рівняння (1) використаємо симетрійний (або умовно- симетрійний) анзац [3]. Припустимо, що він має вигляд

$$u = f(x)\, \varphi(\omega_1,\ldots, \omega_k) + g(x), \qquad (2)$$

де $\omega_1=\omega_1(x_0, x_1,\ldots,x_k)$, ... , $\omega_k=\omega_k(x_0, x_1,\ldots, x_k)$ - нові незалежні змінні. Анзац (2) виділяє із всієї множини розв'язків рівняння (1) деяку підмножину S. Побудуємо (якщо це можливо) новий анзац

$$u = f(x)\, \varphi(\omega_1,\ldots, \omega_k, \omega_{k+1},\ldots, \omega_L) + g(x), \qquad (3)$$

який є узагальненням анзацу (2). Тут $\omega_{k+1},\ldots, \omega_L$ - нові змінні, які необхідно визначити. Змінні $\omega_{k+1},\ldots, \omega_L$ будемо визначати з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає анзацу (3), співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає анзацу (2). Анзац (3) виділяє підмножину S_1 розв'язків рівняння (1), яке є розширенням підмножини S. Якщо відомі розв'язки підмножини S, то можна побудувати і розв'язки підмножини S_1. Ці розв'язки будуються в такий спосіб. Нехай $u = u(x, c_1,\ldots, c_t)$ є багатопараметричним сімейством розв'язків вигляду (2) рівняння (1), де $c_1,\ldots, c_t$ - довільні сталі. Ми одержимо більш загальне сімейство розв'язків рівняння (1), якщо в розв'язку $u = u(x, c_1,\ldots, c_t)$ сталі c_i вважати довільними гладкими функціями від $\omega_{k+1},\ldots, \omega_L$.

Розглянемо рівняння Ліувілля в просторі $R_{1,n}$.

$$\Box u + \lambda \exp u = 0\,. \qquad (4)$$

Рівняння (4) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $\widetilde{P}(1,n)$, яка одержується з $P(1,n)$ в результаті приєднання генератора дилатації:

$$D = -x^{\mu}\, \partial_{\mu} + 2\partial_{\mu} \qquad (\mu = 0,1,\ldots,n).$$

Генератори J_{ab} , P_a , D алгебри $\widetilde{P}(1,n)$ задовольняють комутацій

співвідношенням:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\upsilon\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\upsilon} - g_{\alpha\upsilon} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\upsilon} + g_{\beta\nu} J_{\alpha\delta} ;$$

$$[P_\alpha, J_{\beta\upsilon}] = g_{\alpha\beta} \cdot P_\upsilon - g_{\alpha\upsilon} \cdot P_\beta ; [P_\alpha, P_\beta] = 0$$

$$[D, P_\alpha] = -P_\alpha , \qquad [D, J_{\alpha\beta}] = 0; \qquad (\alpha, \beta, \upsilon, \delta = 0,1,\ldots,n).$$

Симетрій ний абзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_3$, редукує рівняння (4) до рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \lambda \exp\varphi(\omega_1) .$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо, що φ співпадає з однією з таких функцій:

$$\ln\left\{\left(-\frac{C_1}{2\lambda}\right) \sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}(\omega_1 + C_2)\right]\right\} \quad (C_1 < 0 ; \lambda > 0 ; C_2 \in R)$$

$$\ln\left\{\frac{2C_1C_2 \exp\left(\sqrt{C_1}\ \omega_1\right)}{\lambda\left[1 - C_2 \exp\left(\sqrt{C_1}\ \omega_1\right)\right]}\right\} \quad (C_1 > 0 ; \lambda C_2 > 0) ;$$

$$-\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \omega_1 + C\right)^2$$

Звідси, згідно з [1,2] отримуємо наступне сімейство розв'язків рівняння (4):

$$u = \ln\left\{\left(-\frac{h_1(\omega)}{2\lambda}\right) \sec^2\left[\frac{\sqrt{-h_1(\omega)}}{2}(x_3 + h_2(\omega))\right]\right\} \quad (h_1(\omega) < 0 ; \lambda > 0);$$

$$u = \ln\left\{\frac{2\, h_1(\omega) h_2(\omega) \exp\left(\sqrt{h_1(\omega)}\ x_3\right)}{\lambda\left[1 - h_2(\omega) \exp\left(\sqrt{h_1(\omega)}\ x_3\right)\right]}\right\} \quad (h_1(\omega) > 0 ; \lambda h_2(\omega) > 0) ;$$

$$u = -\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ x_3 + h(\omega)\right)^2 ,$$

де $h_1(\omega)$, $h_2(\omega)$, $h(\omega)$ - довільні двічі диференційовні функції , ω - довіл

розв'язок системи :

ючому.

рядку, і

зв'язків

зац [3].

виділяє

кщо це

обхідно

вняння,

анзацу

ренням

вати і

= u(x,

(1), де

вняння

адкими

n), яка

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_{L+1}^2} - \dots \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_n^2} = 0 ,$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_{L+1}}\right)^2 - \dots \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0 . \qquad (5)$$

Використовуючи, наприклад, розв'язок рівняння Ліувілля (4) [4]

$$u = \ln \frac{2(s-2)}{\lambda\ [x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_s^2]} , \qquad s \neq 2 ,$$

знаходимо широкий клас розв'язків рівняння Ліувілля

$$u = \ln \frac{2(s-2)}{\lambda\ [x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_L^2 - (x_{L+1} + h_{L+1}(\omega))^2 - \dots - (x_s + h_s(\omega))^2]} ,$$

де ω - довільний розв'язок системи:

$$\Box\, \omega_{s+1} = 0 ,$$

$$(\nabla \omega_{s+1})^2 = 0 , \qquad \nabla \omega_i \cdot \nabla \omega_{s+1} = 0 , \qquad i = 1, 2, \dots , s .$$

а $h_{L+1}(\omega),\dots,h_s(\omega)$ - довільні двічі диференційовні функції. Якщо $s=3$, то рівняння (4) має в просторі $R_{1,3}$ наступне сімейство розв'язків

$$u = \ln \frac{2}{\lambda\ [x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h_3(\omega))^2]} .$$

Для рівняння сінус-Гордона

$$\Box\, u + \sin u = 0$$

в аналогічний спосіб отримуємо наступні розв'язки

$$u = 4 \operatorname{arctg} h_1(\omega) e^{\varepsilon_0 x_3} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi , \qquad \varepsilon_0 = \pm 1; \quad \varepsilon = \pm 1;$$

$$u = 2 \arccos [\, dn\, ((x_3 + h_1(\omega)), m)] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi , \qquad 0 < m < 1 ,$$

$$u = 2 \arccos [\, Cn((\frac{x_3 + h_1(\omega)}{m}, m)] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi , \qquad 0 < m < 1 ,$$

де $h_1(\omega)$ - довільна двічі диференційовна функція, ω - довільний розв'язок системи (5).

Література.

1. Barannyk A.F., Yuryk I.I. On some exact solutions of nonlinear wave equations, *Proceedings of the second International Conference " Symmetry in nonlinear mathematical Physics "* v. 1, 1997, 98-107.
2. Barannyk A.F., Yuryk I.I. On a new method for costructing the exact solutions of the nonlinear differential equetions of mathematical physics, *J. Phys. A.: Math Gen.* 31, *1998, c. 4899- 4907.*
3. Fushchych W.I., Shelten V.M. and Serov N.I., Symmetry Analysis and Exact of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluwer, Dordrecht, 1993.
4. Fushchych W.I., Barannyk L.F. and Barannyk A.F., Subgroup Analysis of Galilei and Poincare Groups, and Reduction of Nonlinear Equations, Naukova Dumka, Kyiv, 1991 (in Russian).

ПАРАМЕТРИЧНІ УМОВИ ІДЕАЛЬНОСТІ БАГАТОПОЛЮСНИКІВ

Мартиненко М.А., докт. фіз.-мат. наук.

Мостов'як І.В., докт. техн. наук.

Пасічник Х.А., аспірант.

Український державний університет харчових технологій

Під ідеальними розуміють багатополюсники, які не повинні розсіювати чи накопичувати електричну енергію, тобто не мають в собі елементів типу R, L, C, M. Вони володіють властивістю передавати (перетворювати) енергію, що виражається аналітично наступним чином

$$P_{вх}(t)=P_{вих}(t), \qquad (1)$$

де $P_{вх}(t)$ і $P_{вих}(t)$ – відповідно, вхідна і вихідна миттєві потужності. Математичні рівняння ідеальних багатополюсників не мають інтегралів чи похідних від режимних