

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗЕРНИСТЫХ
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmtech.kiev.ua*

Abstract. The theory of long-time damageability is built for granular composite materials with physically nonlinear components. The process of damaging the components is modeled by forming in them the stochastically arranged micropores. The criterion of damage of a unit microvolume is characterized by its long-term strength, which is caused by dependence of the brittle fracture time on the degree of closeness of equivalent stress to its limit value. For arbitrary value of time, the balance equation of damage (porosity) of composite components is formulated. A calculation algorithm of dependences of damage on time, macrostresses on time, as well as the corresponding curves are constructed. An effect of the matrix nonlinearity on curves of macrodeformation and damage of material are studied.

Key words: granular composite, physical nonlinearity, stochastic structure, long-term damageability, effective characteristics, balance equation of damage (porosity).

Введение. При достаточно высоких нагрузках в материалах и элементах конструкций происходит образование и развитие во времени рассеянных микроповреждений, что приводит, как правило, к образованию магистральных трещин. Микроповреждения представляют собой хаотически расположенные разрушенные микрообъемы материала, полностью или частично утратившие несущую способность. Следствием накопления микроповреждений является уменьшение эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам.

Наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений, а также экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. В основу структурной теории кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов [7, 9, 10] положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [5]. Длительная повреждаемость представляет собой процесс накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. Прочность материала является микронеоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. Под действием постоянного растягивающего напряжения часть микрообъемов, предел прочности которых ниже приложенного напряжения, разрушится, т.е. на их месте

образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности. Теория длительной повреждаемости однородного и волокнистых материалов построена в [8, 11, 12] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред.

У многих материалов, например, у металлов, а также полимерных материалов при высоких температурах, зависимости между деформациями и напряжениями становятся нелинейными. Поэтому актуальным является обобщение теории длительной повреждаемости волокнистых композитных материалов [11, 12], построенной на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, на случай физически нелинейных зернистых композитов. Процесс повреждаемости компонентов зернистого композита моделируется разрушением в них рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема компонента характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной прочности компонента принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные свойства и напряженно-деформированное состояние зернистого композита с системой стохастически расположенных микроповреждений в компонентах определяются на основе стохастических уравнений упругости зернистых сред с пористыми компонентами. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов композита. Зависимости макронапряжения – макродеформации для зернистого материала с пористыми компонентами и уравнения баланса пористости компонентов описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости зернистого композита с учетом их взаимодействия. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповрежденности компонентов зернистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также получены соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности на деформирование и микроповреждаемость композита.

§1. Физически нелинейное деформирование зернистого композита описывается зависимостью модулей объемного сжатия K_v и сдвига μ_v ($v = 1, 2$) компонентов от деформаций. Предположим, что в процессе нагружения происходит микроповреждаемость компонентов, которую моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Для элементарного макрообъема имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - \frac{2}{3} \mu^*) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1.1)$$

где K^* , μ^* – эффективные модули, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости.

Пусть включения и матрица материала имеют пористость, соответственно, p_1 и p_2 . Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов каркасов включений и матрицы, соответственно, K_1 , μ_1 и K_2 , μ_2 , а объемные содержания пористых вклю-

чений и пористой матрицы, соответственно, c_1, c_2 . Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного зернистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются [2, 6] через соответствующие модули включений $K_{1p}^{(n)}, \mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении формулами

$$K^{*(n)} = c_1 K_{1p}^{(n)} + c_2 K_{2p}^{(n)} - c_1 c_2 \frac{(K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})^2}{c_1 K_{2p}^{(n)} + c_2 K_{1p}^{(n)} + n_c};$$

$$\mu^{*(n)} = c_1 \mu_{1p}^{(n)} + c_2 \mu_{2p}^{(n)} - c_1 c_2 \frac{(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1 \mu_{2p}^{(n)} + c_2 \mu_{1p}^{(n)} + m_c} \quad (1.2)$$

$$\left(n_c = \frac{4}{3} \mu_c; \quad m_c = \frac{\mu_c (9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)} \right); \quad (1.3)$$

$$K_c = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p}; \quad \mu_c = c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{2p}, \quad (1.4)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p} K_{2p}}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p}}; \quad \mu_c = \frac{\mu_{1p} \mu_{2p}}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_{1p}} \quad (1.5)$$

– в противном случае. Здесь μ_{1p}, μ_{2p} – модули сдвига компонентов при линейном деформировании. Эффективные модули пористых включений $K_{1p}^{(n)}, \mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении согласно [2, 6] определяются формулами

$$K_{vp}^{(n)} = \frac{4K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} \mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} (1-p_v)^2}{3K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} p_v + 4\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} (1-p_v)};$$

$$\mu_{vp}^{(n)} = \frac{[9K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} + 8\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}] \mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} (1-p_v)^2}{3K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} (3-p_v) + 4\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)} (2+p_v)} \quad (v=1, 2), \quad (1.6)$$

где $\langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}$ – средние деформации по неповрежденной части материала включения или матрицы в n -ом приближении. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны со средними по компонентам деформациями в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^{1v} \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p_v)} \left\{ \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{vp}^{(n)}}{K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} - \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} \right] \langle \varepsilon_{rr}^v \rangle^{(n)} \delta_{ij} \right\} \quad (v=1, 2). \quad (1.7)$$

Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = (-1)^{v+1} \left\{ \frac{2\mu^{*(n)} (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)}) (K^{*(n)} - K_{2p}^{(n)}) - 3K^{*(n)} (K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)}) (\mu^{*(n)} - \mu_{2p}^{(n)})}{6c_v \mu^{*(n)} (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)}) (K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})} \times \right.$$

$$\times \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \left. \frac{\mu^{*(n)} - \mu_{\chi p}^{(n)}}{c_k (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \right\} \quad (\chi = 3 - k). \quad (1.8)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяем как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (1.9)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов возьмем критерий прочности Губера – Мизеса [3]

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = k_v \quad (v = 1, 2), \quad (1.10)$$

где $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = (\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle'$ по неповрежденной части материала v -компонента; k_v – предел микропрочности компонента, являющийся случайной функцией координат.

Так как средние по неповрежденной части материала v -компонента напряжения $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle$ связаны со средними в компоненте напряжениями $\langle \sigma_{ij}^v \rangle$ зависимостями [7]

$$\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle = \frac{1}{1 - p_v} \langle \sigma_{ij}^v \rangle, \quad (1.11)$$

то инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v}$ определяется через инвариант девиатора тензора средних в компоненте напряжений $I_{\langle \sigma \rangle}^v = (\langle \sigma_{ij}^v \rangle' \langle \sigma_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ выражением

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = \frac{1}{1 - p_v} I_{\langle \sigma \rangle}^v, \quad (1.12)$$

а через инвариант девиатора тензора средних деформаций в компонентах $I_{\langle \varepsilon \rangle}^v = (\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ такой формулой:

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = \frac{2\mu_{vp}}{1 - p_v} I_{\langle \varepsilon \rangle}^v. \quad (1.13)$$

Инварианты девиаторов средних деформаций в компонентах $I_{\langle \varepsilon \rangle}^v$ определяются через инвариант $I_{\langle \varepsilon \rangle} = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ для всего композита соотношениями

$$I_{\langle \varepsilon \rangle}^v = (-1)^{v+1} \frac{\mu^* - \mu_{(3-v)p}}{c_v (\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{\langle \varepsilon \rangle}. \quad (1.14)$$

Тогда с учетом соотношений (1.13), (1.14) критерий прочности (1.10) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp} (\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v (1 - p_v) (\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{\langle \varepsilon \rangle} = k_v \quad (v = 1, 2). \quad (1.15)$$

Если инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v}$ для некоторого микрообъема v -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_v , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени

τ_k^v , длительность которого зависит от степени близости $I_{<\sigma>}^{1v}$ к предельному значению k_v . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^v = \varphi_v(I_{<\sigma>}^{1v}, k_v), \quad (1.16)$$

причем $\varphi_v(k_v, k_v) = 0$, $\varphi_v(0, k_v) = \infty$, согласно (1.10).

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала компонента является степенной закон на некотором отрезке

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ \left(\frac{k_v - k_{v0}}{k_{v1} - k_{v0}} \right)^{n_v}, & k_{v0} \leq k_v \leq k_{v1}; \\ 1, & k_v > k_{v1}, \end{cases} \quad (1.17)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ 1 - \exp[-m_v(k_v - k_{v0})^{n_v}], & k_v \geq k_{v0}, \end{cases} \quad (1.18)$$

где k_{v0} – минимальное значение предела микропрочности компонента; k_{v1} , m_v , n_v – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности компонента k_v является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_v и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_v(k_v)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_v . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle$ функция $F_v(I_{<\sigma>}^{1v})$ согласно (1.10), (1.17), (1.18) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента p_{v0} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости [7]

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v(I_{<\sigma>}^{1v}). \quad (1.19)$$

С учетом соотношений (1.13), (1.14) уравнение баланса пористости компонента (1.19) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{<\varepsilon>} \right], \quad (1.20)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модули сдвига компонентов μ_{1p} , μ_{2p} определяются формулами (1.2) – (1.6).

Если напряжения в v -компоненте $\langle \sigma_{ij}^v \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то согласно критерию длительной прочности (1.10) за это время в v -компоненте

те разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_v , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^v = \varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v), \quad (1.21)$$

где инвариант $I_{<\sigma>}^{lv}$ определяется выражениями (1.12) или (1.13).

Время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^{lv} > 0$. В этом случае функцию долговечности v -компонента $\varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v) = \tau_{0v} \left(\frac{k_v - I_{<\sigma>}^{lv}}{I_{<\sigma>}^{lv} - \gamma_v k_v} \right)^{n_{lv}} \quad (\gamma_v k_v \leq I_{<\sigma>}^{lv} \leq k_v, \gamma_v < 1), \quad (1.22)$$

где некоторое характерное время τ_{0v} , показатель n_{lv} и коэффициент γ_v определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности v -компонента.

Подставляя (1.22) в (1.21), приходим к неравенству

$$k_v \leq I_{<\sigma>}^{lv} \left(1 + \bar{t}_v^{1/n_{lv}} \right) / \left(1 + \gamma_v \bar{t}_v^{1/n_{lv}} \right) \quad \left(\bar{t}_v = \frac{t}{\tau_{0v}} \right). \quad (1.23)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_v(k_v)$, приходим к выводу, что функция $F_v[I_{<\sigma>}^{lv} \psi_v(\bar{t}_v)]$, где

$$\psi_v(\bar{t}_v) = \left(1 + \bar{t}_v^{1/n_{lv}} \right) / \left(1 + \gamma_v \bar{t}_v^{1/n_{lv}} \right), \quad (1.24)$$

определяет в момент времени \bar{t}_v относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала v -компонента. Тогда с учетом (1.11) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для v -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_v = p_{0v} + (1 - p_{0v}) F_v \left[\frac{I_{<\sigma>}^{lv} \psi_v(\bar{t}_v)}{1 - p_v} \right], \quad (1.25)$$

где пористость v -компонента p_v является функцией безразмерного времени \bar{t}_v , а инвариант $I_{<\sigma>}^{lv}$ определяется выражениями (1.12) – (1.14).

Если время τ_k^v хрупкого разрушения v -компонента имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{lv}$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_v(I_{<\sigma>}^{lv}, k_v) = \tau_{0v} \left\{ \exp m_{lv} \left[\left(\frac{k_v}{I_{<\sigma>}^{lv}} \right)^{n_{lv}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2v}}, \quad (1.26)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{0v} , m_{lv} , n_{lv} , n_{2v} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.26) в (1.21), приходим к неравенству

$$k_v \leq I_{<\sigma>}^{lv} \left[1 + \frac{1}{m_{lv}} \ln \left(1 + \bar{t}_v^{1/n_{2v}} \right) \right]^{1/n_{lv}} \quad \left(\bar{t}_v = \frac{t}{\tau_{0v}} \right). \quad (1.27)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_v(k_v)$, приходим к выводу, что функция $F_v[I_{<\sigma>}^{lv} \psi_v(\bar{t}_v)]$, где

$$\psi_v(\bar{t}_v) = \left[1 + \frac{1}{m_{1v}} \ln \left(1 + \bar{t}_v^{1/m_{2v}} \right) \right]^{1/m_{1v}}, \quad (1.28)$$

определяет в момент времени \bar{t}_v относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала v -компонента. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для v -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде (1.25), где пористость v -компонента p_v является функцией безразмерного времени \bar{t}_v , а инвариант $I'_{<\sigma>}$ определяется выражениями (1.12) – (1.14).

Уравнения баланса пористости (1.25) с учетом (1.12) – (1.14), (1.24) (или (1.28)) в начальный момент $\bar{t}_v = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала v -компонента. С ростом времени уравнения (1.25), (1.12) – (1.14), (1.24), (или (1.28)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

Уравнения (1.1), (1.2) – (1.8), (1.25), (1.12) – (1.14), (1.17) (или (1.18)), (1.24) (или (1.28)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости зернистого композита. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования зернистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и длительной повреждаемости зернистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.2) – (1.8), и определению пористости из уравнения (1.12) – (1.14), (1.17) (или (1.18)), (1.24) (или (1.28)), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.25) для n -го шага итерационного процесса (1.2) – (1.8) в виде

$$f_v^{(n)} = p_v - p_{v0} - (1 - p_{v0}) F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}^{(n)} (\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)})}{c_v (1 - p_v) (\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} I_{<\varepsilon>} \psi_v(\bar{t}_v) \right]. \quad (1.29)$$

Тогда определение корня p_v уравнения (1.29) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_v^{(m,n)} = A_v f_v^{(n)}(p_v^{(m-1)}), \quad (1.30)$$

где A_v – определенный оператор, действующий на функцию $f_v^{(n)}(p_v)$. Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_v = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_v^{(m,n)}. \quad (1.31)$$

§2. В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости зернистого композита с линейно упругими включениями и нелинейно деформирующейся матрицей при микроповреждениях в матрице, причем объемные деформации матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr}^2 \rangle = K_2 \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle; \quad \langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2(S_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'. \quad (2.1)$$

Здесь модуль объемного сжатия K_2 не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu_2(S_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(S_2) = \begin{cases} \mu_{20}, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_{20}}\right) \frac{T_{20}}{2S_2}, & T_2 \geq T_{20}; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\left(S_2 = (\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_2 = (\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_{20} = \sqrt{2/3} \sigma_{20}\right),$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$, $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ – девиаторы, соответственно, тензоров деформаций и напряжений в матрице; σ_{20} – предел пропорциональности на растяжение для нее, который принимаем независимым от координат; μ_{20} , μ_2' – постоянные материала матрицы.

Алгоритм определения корня p_2 уравнения (1.29) строим на основе метода секущих [1]. Так как корень p_2 находится в интервале $[p_{20}, 1]$, что следует из неравенств $f_2^{(n)}(p_{20}) \leq 0$, $f_2^{(n)}(1) \geq 0$, то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня $p_2^{(0,n)}$ определяется формулой

$$p_2^{(0,n)} = \frac{a_2^{(0)} f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)} f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(0)})},$$

где $a_2^{(0)} = p_{20}$, $b_2^{(0)} = 1$. Последующие приближения метода секущих определяются на основе итерационного процесса

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \equiv \frac{a_2^{(m)} f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)} f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(m)})};$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)} \quad \text{при} \quad + f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \leq 0;$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)}; \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия $|f_2^{(n)}(p_2^{(m,n)})| < \delta$, где δ – точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости зернистого композита для распределения Вейбулла (1.18) при дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.24), и экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.28). В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, линейно-упругие зерна с характеристиками [4] и объемным содержанием ($K_1 = 38,89$ ГПа; $\mu_1 = 29,17$ ГПа; $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$) и матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (2.1), (2.2) с постоянными [2, 4] $K_2 = 3,33$ ГПа; $\mu_{20} = 1,11$ ГПа; $\mu_2' = 0,331$ ГПа и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_{2p} = \sqrt{3/2} k_{20}$, равными: $\sigma_{20} = 0,003$ ГПа; $\sigma_{2p} = 0,011$ ГПа, а также $p_{02} = 0$; $k_{02} / \mu_2 = 0,01$; $m_2 = 1000$; $\gamma_2 = 0,05$; $n_{12} = 1$.

В случае заданных макропараметров $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$; $\langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0$ согласно (1.1) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{3K^* \mu^*}{K^* + \frac{1}{3} \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle.$$

При этом в уравнении баланса пористости (1.20) принимается

$$I_{\langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle}{2(K^* + \frac{1}{3} \mu^*)},$$

что эквивалентно выполнению условий (2.12).

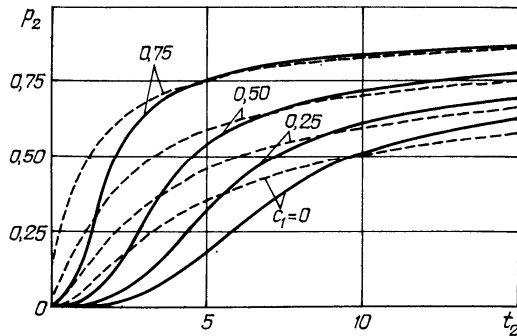


Рис. 1

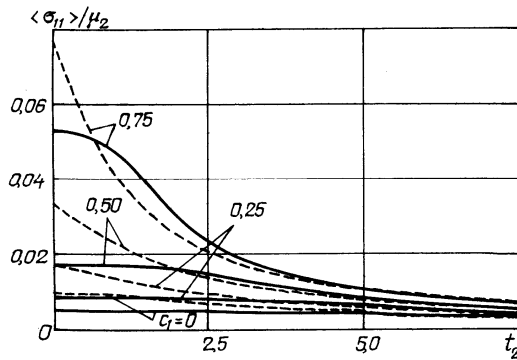


Рис. 2

при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей выше, чем с линейной.

На рис. 2 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.24), изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся и линейной матрицами. Графики показывают, что для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние зернистого композитного материала. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности матрицы на напряженное состояние композита несущественно.

На рис. 3, 4 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.28), изображены, соответственно, кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 и кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся и линейной матрица-

На рис. 1 при различных значениях объемного содержания включений c_1 и дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.24), сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями показаны зависимости p_2 от \bar{t}_2 для зернистого композитного материала с линейной матрицей. Такие же обозначения приняты и на рис. 2 – 4. Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние на микроразрушение зернистого композита. Графики показывают, что для композита с линейно упрочняющейся матрицей микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е.

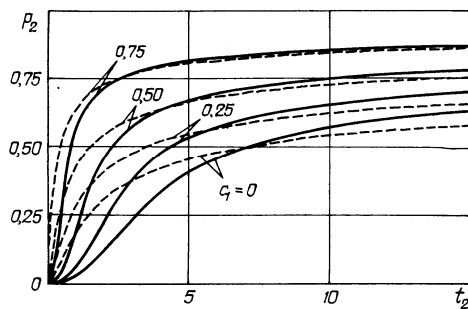


Рис. 3

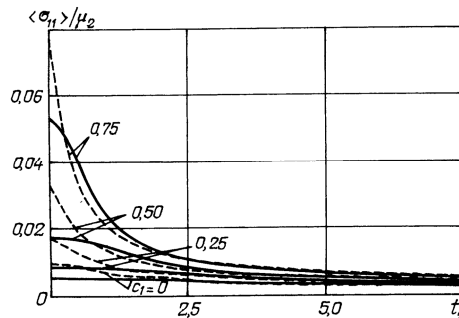


Рис. 4

ми. Как видим, характер кривых на этих рисунках качественно совпадает с характером соответствующих кривых при дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.24).

Р Е З Ю М Е. Побудовано теорію довготривалої пошкоджуваності для зернистих композитних матеріалів з фізично нелінійними компонентами. Процес пошкоджуваності компонентів моделюється утворенням в них стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короткочасну міцність за критерієм Губера – Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоженості (пористості) фізично нелінійних компонентів матеріалу. Побудовано алгоритми обчислення залежностей їх пошкоженості від часу, макронапружень від часу, а також відповідні криві. Досліджено вплив нелінійності матриці на криві макродеформування і пошкоджуваності матеріалу.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 2. – С. 3 – 17.
7. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 10. – P. 1035 – 1041.
8. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 2. – P. 127 – 135.
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 591 – 620.
10. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Short-Term Damage of Physically Nonlinear Stochastic Composites // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 6. – P. 613 – 634.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of fibrous materials with the stress-rupture microstrength of the matrix described by a fractional-power function // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1196 – 1205. 12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of fibrous materials with the microdurability of the matrix described by an exponential power function // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 1. – P. 37 – 45.

Поступила 02.10.2009

Утверждена в печать 24.04.2011