

Ткачук А. М.  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
[TkachukAM@ukr.net](mailto:TkachukAM@ukr.net)  
ДИСИПАТИВНІСТЬ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ

Розглядається система різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$h > 0$  – крок різницевого рівняння,

$$x_k^h = x^h(t_0 + kh), \quad x^h(t_0) = x_0^h.$$

Вектор-функція  $X(t, x)$  визначена при  $t \in R$ ,  $x \in D$  ( $D$  – деяка область простору  $R^n$ ),  $t_0 \in R$ . Дисипативність системи (1) будемо розуміти в сенсі наступних означень.

**Означення 1.** Систему (1) назвемо дисипативною при  $k \geq 0$ , якщо існує  $R(h)$ , що для довільного  $r > 0$  можна вказати  $T = T(t_0, r, h)$ , що розв'язок системи (1)  $x_k^h$  при  $kh \geq T$  знаходиться в кулі радіуса  $R$ :

$$x_k^h \in U_R, \quad \text{якщо} \quad x_0^h \in U_r.$$

**Означення 2.** Систему (1) назвемо рівномірно дисипативною по  $h \leq h_0$ , якщо в означенні 1  $R$  та  $T$  не залежать від  $h$ .

Приведена нижче теорема дає умови дисипативності різницевої системи (1) в термінах функції Ляпунова.

**Теорема.** Якщо система (1) для кроку  $h > 0$  має невід'ємну функцію Ляпунова  $V_h(t, x)$ , визначену в області  $t \geq t_0$ ,  $x \in R^n$ , таку, що виконуються умови:

$$1) \quad \inf_{k \in \mathbb{Z}_+, |x| \geq R} V_h(t_0 + kh, x) = V_{h,R} \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty; \quad (2)$$

2) існують  $C = C(h) > 0$  та  $C_1 = C_1(h) > 0$  такі, що

$$V_h(t_0 + (k+1)h, x + hX(kh, x)) - V_h(t_0 + kh, x) \leq -C(h)V_h(t_0 + kh, x)h + C_1(h)h,$$

то система (1) дисипативна для даного  $h > 0$ , при умові  $C(h)h < 2$ .

Якщо ж в умовах теореми  $V(t, x)$ ,  $C_1$  та  $C$  не залежать від  $h$  і співвідношення (2) виконується рівномірно по  $h \leq h_0$ , то система (1) рівномірно дисипативна.