

Логарифмічні рівняння у профільній школі

Наводяться способи розв'язання логарифмічних рівнянь і варіанти тестових задач для самостійного розв'язування.

Рівняння, що містить змінну тільки під знаком логарифма або в основі логарифма, називається логарифмічним.

Загального методу розв'язання логарифмічних рівнянь не існує. Наведемо розв'язання тільки деяких основних типів таких рівнянь. Логарифмічні рівняння розглядаються тільки у множині дійсних чисел. Отримані значення невідомого підлягають перевірці за умовою рівняння.

1. Рівняння виду $\log_a x = b$ (1), де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається найпростішим логарифмічним. Його розв'язання ґрунтується на такій важливій властивості логарифмів: логарифми двох додатних чисел за однією і тією ж додатною і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні ці числа.

Для рівняння (1) з цієї властивості одержуємо: $x = a^b$ — єдиний корінь.

Для рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, одержуємо рівносильне рівняння $f(x) = a^b$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_2 x = -2$ (2).

Розв'язання. Потенціюючи, маємо $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. Нагадаємо, що потенціювання — це перетворення, обернене логарифмуванню.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\lg(2x - 5)^2 = 0$ (3).

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне рівнянню $\lg(2x - 5)^2 = \lg 1$, тобто рівнянню $(2x - 5)^2 = 1$, яке має два корені: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Числа 2 і 3 є множиною всіх розв'язків рівняння (3).

До найпростіших логарифмічних рівнянь відносяться також рівняння виду $\log_x A = B$ (4), де $A > 0$, яке

а) при $A \neq 1$ і $B \neq 0$ має єдиний корінь $x = A^{\frac{1}{B}}$;

б) при $A=1$ і $B=0$ має розв'язком будь-яке додатне, відмінне від одиниці число;

в) при $A=1$ і $B \neq 0$ коренів не має;

г) при $A \neq 1$ і $B=0$ коренів не має.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$. (5).

Розв'язання. Оскільки $\frac{\sqrt[5]{8}}{2} = 2^{-\frac{2}{5}}$, то $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -\frac{2}{5} \log_x 2$, і отже, задане рівняння еквівалентне рівнянню $\log_x 2 = 1$, звідки $x = 2$. Число 2 — єдиний корінь рівняння. (5).

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_{x^3-19} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. (6).

Розв'язання. Рівняння (6) рівносильне рівнянню $\sqrt{x^3-19} = 2\sqrt{2}$. Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрату. Дістанемо $x^3 - 19 = 8$, звідки $x^3 = 27$ або $x = 3$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\log_{\log_2 x} 2 = 3$. (7).

Розв'язання. ОДЗ рівняння (7) визначається системою нерівностей $0 < \log_2 x \neq 1$.

Тому воно рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} \log_2 x > 0, \\ \log_2 x \neq 1, \\ \log_2 x = \sqrt[3]{2}, \end{cases}$$
 звідки знаходимо $x = 2^{\sqrt[3]{2}}$ —

єдиний корінь рівняння (7).

2. Рівняння виду $f(\log_a x) = 0$ (8), де $a > 0, a \neq 1$ рівносильне сукупності рівнянь $\log_a x = t_1, \log_a x = t_2, \dots, \log_a x = t_n$, де t_1, t_2, \dots, t_n — усі корені рівняння $f(t) = 0$.

Рівняння виду $f(\log_x A)$ (9), де $A > 0$, рівносильне сукупності рівнянь $\log_x A = t_1, \log_x A = t_2, \dots, \log_x A = t_n$, де t_1, t_2, \dots, t_n — усі корені рівняння $f(t) = 0$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$ (10).

Розв'язання. ОДЗ даного рівняння є $x > 0$; $5 - \log x \neq 0$; $1 + \lg x \neq 0$, звідки отримуємо $x \in (0; 0,1) \cup (0,1; 100000) \cup (100000; +\infty)$.

Нехай $\lg x = t$. Тоді відносно t рівняння (10) набере вигляду $\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1$.

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $t_1 = 2$ і $t_3 = 3$. Тоді $\lg x = 2$ і $\lg x = 3$, звідки $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6 \log_x 10 = 0$ (11).

Розв'язання. Позначимо $t = \log_x 10$ і виконаємо заміну невідомого в рівнянні (12). Тоді $t^3 - t^2 - 6t = 0$, $t(t^2 - t - 6) = 0$, $t(t-3)(t+2) = 0$, звідки $t_1 = 0$, $t_2 = 3$, $t_3 = -2$. Виходить, $\log_x 10 = 0$, звідки $x \in 0$; $\log_x 10 = 30$, звідки $x = 10^{\frac{1}{3}}$; $\log_x 10 = -2$, звідки $x = 10^{-\frac{1}{2}}$.

Отже $x = \sqrt[3]{10}$ і $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ — корені рівняння (11).

Приклад 8. Розв'язати рівняння.

3. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (12), де $a > 0$ і $a \neq 1$, після потенціювання набирає вигляду $f(x) = g(x)$ (13). Коренями рівняння (12) будуть тільки ті корені рівняння (13), при яких $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$, тобто корені, які належать області допустимих значень рівняння (12). Іншими словами, при $a > 0$ і $a \neq 1$ рівняння

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ еквівалентне змішаній системі $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або змішаній

системі $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ у залежності від того, яка з нерівностей $g(x) > 0$ чи $f(x) > 0$ у

цих системах розв'язується простіше.

Аналогічно рівняння виду $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$ (14), де $A > 0$, можна замінити

рівносильною йому змішанною системою $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \end{cases}$ або змішанною системою

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Зауважимо також, що вибір способу заміни визначається тим, яка з нерівностей

— $g(x) > 0$ чи $f(x) > 0$ — розв'язується простіше.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $\log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6} = \log_2 \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ (15).

Розв'язання. Рівняння (15) еквівалентне змішаній системі $\begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3}, \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 3} > 0. \end{cases}$

Рівняння системи має два корені: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Нерівності задовольняє тільки число $x_2 = 0$. Отже, рівняння (15) має єдиний корінь — число 0.

Приклад 16. Рівняння (16) еквівалентне змішаній системі $\begin{cases} \frac{x-4}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}, \\ \frac{x+1}{x+3} > 0, \\ \frac{x+1}{x+3} \neq 1. \end{cases}$ Рівняння

системи не має коренів $x = -3, 5$, що задовольняє всім співвідношення системи.

Отже, рівняння (16) має єдиний корінь — число $x = -3, 5$.

4. Рівняння виду $\log_{g(x)} f(x) = b$ (17) еквівалентне змішаній системі

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^b, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Приклад 17. Розв'язати рівняння $\log_{1-2x^2} (1-x^2-x^4) = 2$ (18).

Розв'язання. Рівняння (18) рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} 1-x^2-x^4=(1-2x^2)^2, \\ 1-2x^2>0, \\ 1-2x^2\neq 1. \end{cases}$$

або
$$\begin{cases} 5x^4-3x^2=0, \\ x^2<\frac{1}{2}, \\ 2x^2\neq 0, \end{cases}$$
 або
$$\begin{cases} x=0, \\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x\neq 0, \end{cases}$$
 звідки $x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$. Виходить

коренями рівняння (18) є числа $x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$.

5. Рівняння виду $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ (19) можна замінити рівносильною

змішаною системою
$$\begin{cases} g(x)=h(x), \\ g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$$
 або рівносильною змішаною системою

$$\begin{cases} g(x)=h(x), \\ h(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що вибір способу заміни визначається тим, яка з нерівностей — $g(x)$ чи $h(x)$ — розв'язується простіше.

Рівняння виду $\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$ (20) можна замінити рівносильною

змішаною системою
$$\begin{cases} g(x)=p(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \end{cases}$$
 або рівносильною змішаною системою

$$\begin{cases} g(x)=p(x), \\ f(x)>0, \\ p(x)>0, \\ p(x)\neq 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що вибір способу заміни визначається тим, які з нерівностей $0 < g(x) \neq 1$ чи $0 < p(x) \neq 1$ розв'язуються простіше.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$ (21).

Розв'язання. Рівняння (21) рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} x^3+6=4x^2-x, \\ x^3+6>0, \\ x^2-1>0, \\ x^2-1\neq 1. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи $x^3-4x^2+x+6=0$ має три корені: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Число $x_1=-1$ не задовольняє умові $x^2-1>0$. Число $x_2=2$ і $x_3=3$ є розв'язками цієї системи і, отже, і розв'язками рівняння (21).

Приклад 19. Розв'язати рівняння $\log_{x^3+x}(x^2-4) = \log_{4x^2-6}(x^2-4)$ (22).

Розв'язання. Рівняння (22) рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} x^3+x=4x^2-6, \\ x^2-4>0, \\ x^3+x>0, \\ x^3+x\neq 1. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи $x^3-4x^2+x+6=0$ має три корені: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. З них тільки число $x_3=3$ задовольняє всім вимогам системи. Виходить, рівняння (22) має єдиний корінь $x=3$.

6. Рівняння виду $\log_{g(x)}(\log_{h(x)} f(x)) = 0$ (23) рівносильне змішаній системі

$$\begin{cases} \log_{h(x)} f(x) = 1, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \end{cases} \quad \text{яка в свою чергу рівносильна системі} \quad \begin{cases} f(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

Приклад 20. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-5x+6}(\log_{x^2-5x+4}(x_2+3x)) = 0$ (24).

Розв'язання. Рівняння (24) рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} \log_{x^2-5x+4}(x^2+3x) = 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6, \end{cases}$$

тобто системі
$$\begin{cases} x^2 + 3x = x^2 - 5x + 4, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x^2 - 5x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи $8x = 4$ має корінь $x = \frac{1}{2}$. Число $\frac{1}{2}$ задовольняє всім умовам системи. Отже, $x = \frac{1}{2}$ — корінь рівняння (24).

7. Рівняння виду $2n \log_a f(x) = \log_a g(x)$ (25), де $a > 0, a \neq 1$ і $n \in N$, рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} (f(x))^{2n} = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 21. Розв'язати рівняння $2 \log_3(2x-1) = \log_3(x+1)$ (25).

Розв'язання. Рівняння (25) рівносильне змішаній системі $(2n+1) \log_a f(x)$

$$\begin{cases} \log_3(2x-1)^2 = \log_3(x+1), \\ 2x-1 > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (2x-1)^2 = (x+1), \\ 2x-1 > 0, \end{cases}$$
 Розв'язавши рівняння останньої

системи, дістанемо $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{4}$. З врахуванням нерівності системи маємо $x = \frac{5}{4}$ — єдиний корінь рівняння (25).

8. Рівняння виду $(2n+1) \log_f f(x) = \log_a g(x)$ (26), де $a > 0, a \neq 1$ і $n \in N$, рівносильне змішаній системі
$$\begin{cases} (f(x))^{2n+1} = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 22. Розв'язати рівняння $3 \log_2(2x+1) = \log_2(1+x-2x^2)$ (27).

Розв'язання. Рівняння (27) рівносильне змішаній системі

$$\begin{cases} \log_2(2x+1)^3 = \log_2(1+x-2x^2), \\ 1+x-2x^2 > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (2x+1)^3 = 1+x-2x^2, \\ 1+x-2x^2 > 0. \end{cases}$$
 Після перетворень рівняння

останньої системи набере вигляду $8x^3 + 14x^2 + 5x = 0$, звідки знаходимо

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. Значення $x_1 = 0$ задовольняє нерівності $1 + x - 2x^2 > 0$, а

$x_2 = -\frac{5}{4}$ і $x_3 = -\frac{1}{2}$ не задовольняє. Отже, $x = 0$ — єдиний корінь рівняння (27).

9. Рівняння виду $\frac{1}{2} \log_a f(x) = \log_a (g(x))$ (28), де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильне рівнянню

$2 \log_a g(x) = \log_a f(x)$, яке в свою чергу рівносильне системі $\begin{cases} (g(x))^2 = f(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 23. Розв'язати рівняння $\log_\pi (x-2) = \frac{1}{2} \log_\pi (x+4)$ (29).

Розв'язання. Рівняння (29) рівносильне рівнянню $2 \log_\pi (x-2) = \log_\pi (x+4)$, яке

рівносильне системі $\begin{cases} \log_\pi (x-2)^2 = \log_\pi (x+4), \\ x-2 > 0. \end{cases}$ яка, в свою чергу, рівносильна

системі $\begin{cases} (x-2)^2 = x+4, \\ x-2 > 0. \end{cases}$ Рівняння $(x-2)^2 = x+4$ має корені $x_1 = 0$ і $x_2 = 5$. Нерівності

$x-2 > 0$ задовольняє тільки значення $x = 5$. Отже $x = 5$ — єдиний корінь рівняння (29).

10. Рівняння виду $\log_a f(x) + \log_a h(x)$ (30), де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильне системі

$\begin{cases} \log_a (f(x)g(x)) = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ яка в свою чергу рівносильна системі $\begin{cases} f(x)g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 24. Розв'язати рівняння $\log_2 (x^2 - 5x + 6) + \log_2 (x^2 + 5x + 6) = \log_2 (6x^2 + 6x - 36)$ (31).

Розв'язання. Рівняння (31) еквівалентне змішаній системі

$\begin{cases} \log_2 (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) = \log_2 (6x^2 + 6x - 36), \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \end{cases}$ тобто системі

$$\begin{cases} (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 6x^2 + 6x - 36, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0. \end{cases} \quad \text{Розв'язавши рівняння останньої системи,}$$

знайдемо $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Значення $x = 4$ задовольняє системі, а $x = -3$ не задовольняє нерівності $x^2 + 5x + 6 > 0$. Отже $x = 4$ — єдиний корінь рівняння (31).

11. Рівняння виду $\log_a f_1(x) - \log_a f_2(x) = \log_a f_3(x) - \log_a f_4(x)$ (32), де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильне рівнянню $\log_a f_1(x) + \log_a f_4(x) = \log_a f_3(x) + \log_a f_2(x)$, яке рівносильне

$$\text{змішаній системі} \begin{cases} \log_a (f_1(x)f_4(x)) = \log_a (f_3(x)f_2(x)), \\ f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_3(x) > 0, \\ f_4(x) > 0, \end{cases} \quad \text{тобто системі}$$

$$\begin{cases} f_1(x)f_4(x) = f_3(x)f_2(x), \\ f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_3(x) > 0, \\ f_4(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 25. Розв'язати рівняння

$$\log_2(x^2 - x - 6) - \log_2(x^2 + 5x + 6) = \log_2(x^2 + 3x - 4) - \log_2(x^2 + x - 6) \quad (33).$$

Розв'язання. Рівняння (33) еквівалентне рівнянню

$$\log_2(x^2 - x - 6) + \log_2(x^2 + x - 6) = \log_2(x^2 + 3x - 4) + \log_2(x^2 + 5x + 6), \text{ яке рівносильне}$$

$$\text{змішаній системі} \begin{cases} \log_2((x^2 - x - 6)(x^2 + x - 6)) = \log_2((x^2 + 3x - 4)(x^2 + 5x + 6)), \\ x^2 - x - 6 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x^2 + x - 6 > 0, \end{cases} \quad \text{тобто}$$

$$\text{системі } \begin{cases} (x^2 - x - 6)(x^2 + x - 6) = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 5x + 6), \\ x^2 - x - 6 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x^2 + x + 6 > 0. \end{cases} \quad \text{З рівняння останньої системи}$$

знаходимо $x = \frac{5}{4}$. Проте це значення x не задовольняє нерівностям $x^2 - x - 6 > 0$ та $x^2 + x - 6 > 0$. Виходить, що рівняння (33) в області дійсних чисел розв'язків не має.

Якщо в рівнянні містяться логарифми з різними основами, то спочатку треба звести всі логарифми до однієї основи. Для цього використовується формула

переходу до нової основи $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, де $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$, або її

частинний випадок (модуль переходу) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, де $a > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

Приклад 26. Розв'язати рівняння $\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$ (34).

Розв'язання. Перейдемо в логарифмах рівняння до основи 2. Оскільки

$$\log_4 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 x}{2} = \frac{1 + \log_2 x}{2}, \quad \log_8 4x = \frac{\log_2 4x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 4 + \log_2 x}{3} = \frac{2 + \log_2 x}{3},$$

$$\log_{16} 8x = \frac{\log_2 8x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 8 + \log_2 x}{4} = \frac{3 + \log_2 x}{4},$$

то рівняння (34) рівносильне рівнянню $\frac{2\log_2 x}{1 + \log_2 x} = \frac{4(2 + \log_2 x)}{3(3 + \log_2 x)}$ (35), де згідно з ОДЗ,

$x > 0, \log_2 x + 1 \neq 0, \log_2 x + 3 \neq 0$, тобто $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{8}$. На своїй ОДЗ рівняння (35)

після спрощень еквівалентне рівнянню $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$, звідки знайдемо

$$x_1 = \frac{1}{16}, x_2 = 2.$$

12. Показниково-логарифмічні рівняння. Показниково-логарифмічним називається рівняння, яке містить невідоме в показнику степеня під знаком логарифма або в основі логарифма, або одночасно і під знаком логарифма і в

основі логарифма. Такі рівняння за допомогою логарифмування зводяться до логарифмічних рівнянь.

Приклад 27. Розв'язати рівняння $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \frac{1}{x}$ (35).

Розв'язання. Областю допустимих значень невідомого є $x > 0$. Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 2, дістанемо

$$(\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3)\log_2 x = -\log_2 x, (3\log_2 x - \log_2^2 x - 3)\log_2 x + \log_2 x = 0, \log_2 x(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2) = 0.$$

Звідси знаходимо $\log_2 x = 0, \log_2 x = 1, \log_2 x = 2$ або $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$. Перевірка показує, що знайдені значення x є коренями рівняння (35).

Приклад 28. Розв'язати рівняння $(\sqrt{x})^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$ (36).

Розв'язання. ОДЗ: $x > 1$. Логарифмуючи на ОДЗ обидві частини рівняння за основою 5, одержимо

$$\log_{x^2}(x^2-1)\log_5 \sqrt{x} = 1, \frac{\log_5(x^2-1)}{\log_5 x^2} \cdot \frac{1}{2}\log_5 x = 1, \frac{\log_5(x^2-1)}{2\log_5 x} \cdot \log_5 x = 2, \log_5(x^2-1) = 4, \text{ звідси}$$

$x^2 - 1 = 625, x^2 = 626$, звідки $x_1 = -\sqrt{626}$, що не входить в ОДЗ, і $x_2 = \sqrt{626}$. Перевірка показує, що $x = \sqrt{626}$ — корінь рівняння (35).

Приклад 36. Розв'язати рівняння $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}$ (36).

Розв'язання. Спочатку знаходимо ОДЗ: $x < 1$. Далі логарифмуємо обидві частини рівняння за основою 3. Дістанемо

$$\log_3(1-x) \cdot \log_3 4 = \log_3(2x^2 + 2x + 5) \cdot \log_3 2, 2\log_3(1-x) = \log_3(2x^2 + 2x + 5), \log_3(1-x)^2 = \log_3(2x^2 + 2x + 5).$$

Потенціюючи, одержимо $(1-x)^2 = 2x^2 + 2x + 5, x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$, звідки $x = -2$. Перевірка показує, що $x = -2$ — єдиний корінь рівняння (36).

Варто зауважити, що формальне використання різних логарифмічних формул у процесі перетворення рівнянь може призвести як до появи сторонніх коренів, так і до втрати коренів початкового рівняння.

Варіанти тестових задач для самостійного розв'язання.

I рівень

1. Знайти суму коренів рівняння $\log_2(x^2 - 4x + 6) = 1$.

А 4, Б 2, В 3, Г \emptyset , Д інша відповідь.

2. Знайти суму коренів рівняння $\log_{x^2-1} 3 = 1$.

А 0, Б 2, В 3, Г \emptyset , Д інша відповідь.

3. Знайти добуток коренів рівняння $\frac{2}{1+\log_2 x} + \frac{3}{2+\log_2 x} = 2$.

А $\sqrt{2}$, Б $\frac{\sqrt{2}}{2}$, В $\frac{\sqrt{2}}{3}$, Г \emptyset , Д інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння $\log_x \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 4} = \log_x \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 6x + 5}$.

А 1, Б $\frac{5}{17}$, В $\frac{17}{5}$, Г 2, Д \emptyset .

5. Розв'язати рівняння $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$.

А 4, Б 0, В -1, Г 2, Д інша відповідь.

6. Розв'язати рівняння $\log_{x-2}(x^2 + 2x + 3) = \log_{x-2}(x^2 - 3x + 4)$.

А $\frac{1}{5}$, Б 2, В 3, Г \emptyset , Д інша відповідь.

7. Розв'язати рівняння $\log_x(\log_{x-3}(x^2 + 2x - 3)) = 0$.

А -3, Б 1, В 0, Г -1, Д \emptyset .

8. Розв'язати рівняння $2\lg(4x - 15) = \lg 2x$.

А 0, Б $\frac{15}{4}$, В $\frac{9}{2}$, Г $\frac{4}{15}$, Д \emptyset .

9. Розв'язати рівняння $3\log_2 x = \log_2(x^2 + 6x)$.

А 0, Б -6, В 3, Г -3, Д інша відповідь.

10. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(x - 2)$.

А 0, Б 2, В 1, Г \emptyset , Д інша відповідь.

11. Розв'язати рівняння $\log_4(x+3) + \log_4(x-1) = \log_4(x^2 - 5x + 4)$.

А 1, Б 4, В -3, Г \emptyset , Д інша відповідь.

12. Розв'язати рівняння $\log_5(x+1) - \log_5(x+4) = \log_5(x+2) - \log_5(x+3)$.

А -1, Б -2, В -3, Г 4, Д \emptyset .

13. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} = 2$.

А $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\sqrt{2}$, Б $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}$, В $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \sqrt{2}$, Г $x_1 = 2; x_2 = 3$, Д \emptyset .

14. Розв'язати рівняння $x^{\log_2 x} = 4x$.

А $x_1 = 1; x_2 = 4$, Б $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2$, В $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 4$, Г \emptyset , Д інша відповідь.

15. Розв'язати рівняння $\log_2 \lg(x-1) = \frac{1}{2}$.

А $10\sqrt{2} - 1$, Б $\sqrt{2} - 1$, В $10^{\sqrt{2}} + 1$, Г $10^{\sqrt{2}} - 1$, Д інша відповідь.

16. Розв'язати рівняння $\log_x 5 = \log_x 5$.

А $x = 1$, Б $x = 5$, В $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, Г $x \in (1; +\infty)$, Д інша відповідь.

17. Розв'язати рівняння $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$.

А -17, Б 1, В 3, Г \emptyset , Д інша відповідь.

18. Розв'язати рівняння $4\lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2 - 5\sqrt{\lg x}$.

А $x_1 = \sqrt{10}; x_2 = 10^4$, Б $x_1 = \sqrt[4]{10}; x_2 = 10$, В $x_1 = \sqrt[4]{10}; x_2 = 10^4$, Г $x_1 = \sqrt{10}; x_2 = \sqrt[4]{10}$, Д інша відповідь.

19. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}}} x = -\frac{3}{4}$.

А 7, Б -7, В $\sqrt{7}$, Г $\sqrt[4]{7}$, Д \emptyset .

20. Розв'язати рівняння $\log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \frac{x-1}{x+4}$.

А 1, Б -5, В -4, Г \emptyset , Д інша відповідь.

II рівень

1. Розв'язати рівняння $\log_2(123x^2 - 321x + 206) = 3$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{\log_2 \sqrt{\cos x - 1}} 1 = 0$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{1 + \lg(x-1)}{1 - \lg^2(x-1)} + \frac{1}{1 - \lg(x-1)} = 1$.

4. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{5+x}{3}} \pi = \log_{\frac{1}{x+1}} \pi$.

5. Розв'язати рівняння $\log_{|x-4-x|} (2x+4) = 1$.

6. Розв'язати рівняння $\log_{x^2+x-6} (2x^4 + x^3) = \log_{x^2+x-6} (6x^2 - x - 2)$.

7. Розв'язати рівняння $\log_{x^2+6x+8} (\log_{2x^2+2x+3} (x^2 - 2x)) = 0$.

8. Розв'язати рівняння $2\log_3(x-1) = \log_3(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$.

9. Розв'язати рівняння $3\lg\left(x + \frac{1}{x}\right) = \lg\left(x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 3\right)$.

10. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \log_2 \frac{x-3}{x+3}$.

11. Розв'язати рівняння $\ln(x^2 - 3x - 4) + \ln(x^2 + 11x + 40) = \ln(x-4)$.

12. Розв'язати рівняння $\log_7 \frac{x-1}{x+1} - \log_7 \frac{x-2}{x+2} = \log_7 \frac{x+1}{x-1} - \log_7 \frac{x+2}{x-2}$.

13. Розв'язати рівняння $\left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.

14. Розв'язати рівняння $\frac{x^{2\lg^3 x}}{(\sqrt{x^3})^{\lg x}} = \sqrt{10}$.

15. Розв'язати рівняння $\log_3 x \log_4 x \log_5 x = \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x$.

16. Розв'язати рівняння $\lg \cos x - \lg \sin 2x = \lg 7$.

17. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{\log_2 x}} + x^{\sqrt{\log_x 2}} = 4$.

18. Розв'язати рівняння $\sqrt{7-2x} \cdot 8^{\log_4 x} + \log_3 \left(2 - \frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{8-x}$, де $x \in \mathbb{Z}$.

19. Розв'язати рівняння $(x-3)^2 \log_2(x-1) + 2 \log_{x-1} \sqrt{2} = (x-3)^2 \log_{x-1} 2 + 2 \log_2 \sqrt{x-1}$.

20. Розв'язати рівняння $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

III рівень

1. Розв'язати рівняння $\log_2(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9) = 2$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{1 + \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}}} \frac{35}{12} = 1$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{\ln \sqrt{x} + 1}{\ln \sqrt{x} - 1} + \frac{\ln \sqrt{x} - 2}{\ln \sqrt{x} + 2} + \frac{\ln \sqrt{x} - 3}{\ln \sqrt{x} + 3} + \frac{\ln \sqrt{x} + 4}{\ln \sqrt{x} - 4} = 4$.

4. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{2}+1} \left| \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 12x + 32} \right| = \log_{\sqrt{2}+1} \left(-\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 12x + 32} \right)$.

5. Розв'язати рівняння $\log_{4x^3 - 37x}(x^4 - 10x^2 - 14) = 1$.

6. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{2-x}{2+x} - \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} \right) = \lg_{\left(\frac{2-\sqrt{x}}{3}\right)^4} \left(\frac{2-x}{2+x} - \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} \right)$.

7. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{x^2-4}{x^2-9}} \left(\log_{(x+3)^4} \left(4 - (x+5)^4 \right) \right) = 0$.

8. Розв'язати рівняння $2 \log_{\pi} \left(\frac{4 - 12\sqrt{x} + 9x}{9} \right) = \log_{\pi} \sqrt{1-x^2}$.

9. Розв'язати рівняння $3 \lg(x^2 - 3x - 2) = \lg(x^6 - 9x^5 + 15x^4 + 45x^3 - 60x^2 - 144x - 64)$.

10. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2} \log_7(2-x^2) = \log_7 \sqrt[3]{x^2-2}$.

11. Розв'язати рівняння $\ln \frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 - 14x - 5} + \ln \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^3 + 5x^2 - 3x - 15} = \ln \frac{4x^2 + 4x - 3}{6x^2 + 17x + 5}$.

12. Розв'язати рівняння $\log_{\pi} (x-2)^2 - \log_{\pi} \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \log_{\pi} (x+3)^2 - \log_{\pi} \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

13. Розв'язати рівняння $\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \right) \lg(x^2 - 3x + 2) = (\lg(x-3)) \log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 - 2$.

14. Розв'язати рівняння $(8-x)^{\log_2(8-x)} = 2^{3x-4}$.

15. Розв'язати рівняння $\log_{6-x} \log_2 x = \log_{7-x} \log_2 (2x)$.

16. Розв'язати рівняння $\log_{\lg x} \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 2x} + \log_{\lg x - 1} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 3 - \log_{\lg x} 2$.

17. Розв'язати рівняння $\log_{42} (6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|) = \frac{1}{2} + \log_2 |\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2||$.

18. Розв'язати рівняння

$$\left(x \log_2 \frac{x}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x-1} \log_2 \frac{x}{x-1} \right)^2 - \left(2\sqrt{2} \log_2 \frac{x}{x-2} \right)^2 = \left(x \log_{\frac{x}{x-1}} 2 \right)^2 + \left(\frac{x}{x-1} \log_{\frac{x}{x-1}} 2 \right)^2 - \left(2\sqrt{2} \log_{\frac{x}{x-1}} 2 \right)^2$$

19. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}} (x^2 - 4x - 2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} (x^2 - 4x - 3)$.

20. Розв'язати рівняння $\ln(x^4 - \sqrt{2}) = \frac{1}{\log_{2\sqrt{2x^2+x-2}} e}$.