

Т. Погорілий

Інженер

В. Мирончук

Доцент, д-р техн. наук

Український державний університет
харчових технологій,
м. Київ

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОХ ОБЛАСТЕЙ З ІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ НИМИ

Наведено аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для двох областей в одновимірному випадку з різними теплофізичними характеристиками та початковими температурами, що контактують між собою за законом ідеального теплового контакту (граничні умови другого роду) з теплоізовльованими кінцями та бічними гранями (теплообмін із зовнішнім середовищем не відбувається).

нестационарна задача теплопровідності, ідеальний тепловий контакт, теплообмін

Одним із типів задач математичної фізики є нестационарні задачі параболічного типу (тепло- та масообмін), точний розв'язок яких вдається знайти переважно лише для областей канонічної геометрії. Задачі ці постають у багатьох галузях сучасної техніки, а також у хімічній, фармацевтичній та харчовій промисловостях. Одна з таких задач, що стосується розподілу температур у двох одновимірних областях з різними теплофізичними характеристиками і різною початковою температурою (з теплоізовльованою бічною поверхнею та зовнішньою межею), та між якими відбувається теплообмін за ідеальним законом теплообміну (граничні умови другого роду) — розглядається авторами. Перевірку отриманих результатів проведено числовим розрахунком для двох областей з однаковими теплофізичними характеристиками (як приклад, взято теплофізичні коефіцієнти для металу — алюмінію), та з різними початковими умовами, що наведено в кінці статті.

Використовуючи для однорідного рівняння теплопровідності [3, 8, 9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho}}, \quad (1)$$

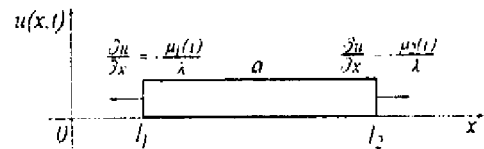


Рис.1. Задача теплопровідності для одновимірної області із заданими функціями теплових потоків на границях

з неоднорідними крайовими умовами другого роду

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_1} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_2} = \frac{\mu_2(t)}{\lambda}, \quad (t \geq 0), \quad (2)$$

та неоднорідною початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (l_1 \leq x \leq l_2), \quad (3)$$

де функція розподілу температури в області $u(x,t)$ ($t \geq 0$, $l_1 \leq x \leq l_2$) — обмежена; задана функція початкового розподілу температур $\varphi(x)$ — неперервна обмежена функція; λ — коефіцієнт теплопровідності (l — коефіцієнт теплопровідності; c — теплоємність; ρ — густина); через $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — позначено функції теплових

потоків на межах області; бічна поверхня теплоізолювана), знайдений автором розв'язок для одномірної області (рис. 1), що має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \varphi(\xi) d\xi - \frac{a^2}{\lambda(l_2 - l_1)} \int_0^t (\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi(\xi - l_1)}{l_2 - l_1} d\xi \right] e^{-\left(\frac{n\pi a}{l_2 - l_1}\right)^2 t} + \frac{a^2}{\lambda(l_2 - l_1)} \int_0^t [\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)] e^{-\left(\frac{n\pi a}{l_2 - l_1}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right\} \cos \frac{n\pi(x - l_1)}{l_2 - l_1} \quad (4)$$

знайдемо розв'язок задачі теплопровідності для двох областей з ідеальним тепловим контактом між ними.

Розв'яжемо задачу про розповсюдження тепла в двох різних областях із теплоізолюваною бічною поверхнею і функціями розподілу температур $u_1(x,t)$ ($-l_1 \leq x \leq 0, t \geq 0$), та $u_2(x,t)$ ($0 \leq x \leq l_2, t \geq 0$), з різними теплопровідністю (a_1 та a_2), та початковою температурою ($T_1 = const$, та $T_2 = const$ відповідно), що в початковий момент часу ($t=0$) почали контактувати між собою за законом ідеального теплового контакту, а по краях ($x=-l_1, x=l_2$) — теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається (рис. 1). Позначимо функцію теплового потоку на межі контакту двох областей через $\mu(t)$:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu(t) \quad (5)$$

Така задача математично формулюється так.

Знайти розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь параболічного типу (6) у частинних похідних (6. а), (6. б):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & (-l_1 \leq x \leq 0, t \geq 0), & (a) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu(t)}{\lambda_1}, & & (б) \\ u_1 \Big|_{t=0} = T_1 = const, & & (в) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & (0 \leq x \leq l_2, t \geq 0), & (г) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu(t)}{\lambda_2}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = 0, & & (д) \\ u_2 \Big|_{t=0} = T_2 = const, & & (е) \\ u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \Big|_{x=0}, & & (ж) \end{cases} \quad (6)$$

з крайовими (6.б), (6.д) та початковими (6.в), (6.е) умовами, де, в свою чергу, межі умови (6.б) та (6.д) для функцій $u_1(0,t)$ та $u_2(0,t)$ відповідно знаходяться з рівняння (5). Допоміжна умова (6.ж) відображає неперервність функцій температур лівої та правої областей у зоні їхнього контакту, що безпосередньо впливає з фізичного змісту задачі ("умови зшивання").

У рівнянні (6) через a_i^2, l_i ($i=1,2$) позначено коефіцієнти температуропровідності та коефіцієнти теплопровідності для лівої та правої областей відповідно.

Спочатку використаємо для двох окремих задач (6.а-в) та (6.г-е) розв'язок (4):

$$u_1(x,t) = T_1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \int_0^t \mu(\tau) d\tau - \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi(x+l_1)}{l_1} \int_0^t \mu(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \quad (7)$$

$$u_2(x,t) = T_2 + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \int_0^t \mu(\tau) d\tau + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l_2} \int_0^t \mu(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \quad (8)$$

Щоб знайти розв'язок задачі про розподіл температур у лівій (6.а-в) та правій (6.г-е) областях у вигляді (7) — (8), нам потрібно знайти функцію $\mu(t)$. Для цього й скористаємося умовою (6.ж).

Записавши значення функцій $u_1(0,t)$ та $u_2(0,t)$, використовуючи вирази (7) — (8) та прирівнявши їх на основі (6.ж), після зведення подібних членів отримаємо таке рівняння:

$$T_1 - T_2 = \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mu(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2 (t-\tau)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \int_0^t \mu(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2 (t-\tau)} d\tau + \left(\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \right) \int_0^t \mu(\tau) d\tau \quad (9)$$

Рівняння (9) є інтегральним рівнянням Вольтера 2-го роду [1] відносно невідомої функції $\mu(t)$. Одним з методів розв'язування інтегрального рівняння такого типу є застосування до нього операційного методу числення на основі прямого

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad p = s + i\sigma \quad (10)$$

та оберненого

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (11)$$

перетворення Лапласа [10, 5].

Рівняння (9) після перетворення за Лапласом з використанням властивостей лінійності, інтегрування, теореми про згортку, а також перетворення одиничної функції та експоненти набуває вигляду:

$$\frac{1}{p}(T_1 - T_2) = \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(p) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2} + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(p) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2} + \left(\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2}\right) \frac{1}{p} \bar{\mu}(p). \quad (12)$$

Таким чином, від інтегрального рівняння (9) відносно невідомої функції $\mu(t)$, за допомогою перетворення Лапласа (10), перейдемо до алгебричного рівняння (12) відносно невідомої поки що функції зображення $\bar{\mu}(p)$. Знайшовши явний вигляд для функції $\bar{\mu}(p)$, використаємо обернене перетворення Лапласа (11) і отримаємо шукану функцію теплового потоку $\mu(t)$ на межі двох областей, між якими відбувається ідеальний тепловий контакт, після чого задача (6) буде розв'язана.

В отриманому алгебричному рівнянні (12) обчислити нескінченні суми (ряди) в замкненому вигляді вдається, використовуючи відомий вираз для збіжності рядів [7]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pm b^2} = \pm \frac{1}{2b^2} \pm \frac{\pi}{2b} \left\{ \begin{matrix} \text{cth} & \pi b \\ \text{ctg} & \pi b \end{matrix} \right\}. \quad (13)$$

Вибираючи в нашому випадку знак "+", і зважаючи на те, що в (12) суми розпочинаються з $n=1$, запишемо

$$\frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2} = -\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \frac{1}{p} + \frac{a_1}{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{p}} \text{cth} \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right). \quad (14)$$

Застосовуючи (14) до рівняння (12), після зведення спільних членів та перетворень, кінцево отримуємо такий вигляд функції $\bar{\mu}(p)$:

$$\bar{\mu}(p) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{a_1}{\lambda_1} \sqrt{p} \text{cth} \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} \text{cth} \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right)}. \quad (15)$$

Отже, ми знайшли функцію $\bar{\mu}(p)$ в області зображень у явному вигляді.

Для отримання функції оригіналу $\mu(t)$ за формулою обернення (11)

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{\mu}(p) e^{pt} dp \quad (16)$$

потрібно обчислити невластний інтеграл першого роду вздовж прямої L (прямої AB рис. 3). Слід зауважити, що розташування контура L у комплексній площині P визначається [1, 10] особливими точками [4] функції

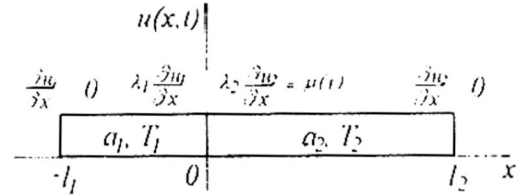


Рис. 2. Задача теплопровідності для двох областей з ідеальним тепловим контактом між ними, на зовнішніх границях яких теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається

$\bar{\mu}(p)$. Контур L знаходиться правіше від усіх особливих точок $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ на рис. 3, як буде показано далі.

Знайдемо особливі точки функції $\bar{\mu}(p)$ з рівняння (15). Оскільки в цьому випадку функція $\bar{\mu}(p)$ є дробово-раціональною, і чисельник, у свою чергу, — величина стала, то особливі точки функції $\bar{\mu}(p)$ цілком визначаються лише знаменником виразу (15).

З'ясуємо вплив радикала \sqrt{p} на характер поведінки функції $\bar{\mu}(p)$. У [4] показано, що для функції \sqrt{p} точка нуль ($p=0$) є точкою багатозначного характеру, або точкою розгалуження.

Досліджуючи точку $p=0$ на багатозначність характеру [1] (від цього залежить розташування контуру інтегрування L), встановлено, що функція $\bar{\mu}(p)$ — мероморфна, тобто, точка $p=0$ не є точкою розгалуження для функції $\bar{\mu}(p)$ з рівняння (15).

Дослідимо функцію $\bar{\mu}(p)$ рівняння (15) на полюси [4]. Як відомо [4], полюс k -го порядку функції $\bar{\mu}(p)$ визначається нулем знаменника k -го порядку.

Позначимо знаменник функції $\bar{\mu}(p)$ (15) через нову функцію:

$$v(p) = \frac{a_1}{\lambda_1} \sqrt{p} \text{cth} \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} \text{cth} \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right). \quad (17)$$

Для дослідження її на нулі

$$v(p) = 0 \quad (18)$$

зробимо перехід у комплексній площині від гіперболічного $\text{cth}(z)$ до $\text{ctg}(z)$ за відомою формулою [4]:

$$\text{cth} z = i \text{ctg} (iz), \quad (19)$$

внаслідок чого отримаємо:

$$\frac{a_1}{\lambda_1} (i\sqrt{p}) \text{ctg} \left(\frac{l_1}{a_1} i\sqrt{p} \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} (i\sqrt{p}) \text{ctg} \left(\frac{l_2}{a_2} i\sqrt{p} \right) = 0. \quad (20)$$

Для знаходження нулів знаменника (15), або ж нулів рівняння (20) використаємо той факт, що функція

$\text{ctg} \frac{l_k}{a_k} (i\sqrt{p})$, ($k=1,2$) в комплекснозначній площині

набуває нульових значень [4] (змінює знак) тільки в тих

точках, де аргумент функції $\frac{l_k}{a_k} (i\sqrt{p})$, ($k=1,2$) набуває

дійсних значень. Доведемо, що ці точки розташовані на дійсній осі Ox (рис. 3). Дійсно, враховуючи, що в аргументі

функції $\operatorname{ctg} \frac{l_k}{a_k} (i\sqrt{p})$ значення $l_k, a_k, (k=1,2)$ — дійсні числа, отримуємо, що $(i\sqrt{p})$ також має бути дійсною величиною. Введемо позначення:

$$x = i\sqrt{p}, \quad (21)$$

де $x = \operatorname{Re} x$, (тобто, x — дійсна величина). Звідки знаходимо:

$$p = -x^2. \quad (22)$$

Таким чином, усі корені рівняння (18) розташовані на від'ємній частині дійсної осі, включаючи точку $p=0$. Той факт, що точка $p=0$ є коренем рівняння (18) видно з безпосередньої підстановки.

Дослідимо на особливість функції $\bar{\mu}(p)$ з (15) точку $p=0$. Як було показано раніше, точка $p=0$ не є точкою розгалуження. Тому дослідимо точку $p=0$ на наявність полюса.

Як видно, границя

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \bar{\mu}(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_1 - T_2}{\frac{a_1}{\lambda_1} \sqrt{p} \operatorname{cth} \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} \operatorname{cth} \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right)} \\ &= \frac{T_1 - T_2}{\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2}} \end{aligned} \quad (23)$$

є обмеженою, що й доводить той факт, що точка $p=0$ не є полюсом для функції $\bar{\mu}(p)$ з (15). Вона є усувною особливою точкою [4].

Тепер знайдемо всі інші корені рівняння (18). Щоб перейти від комплексної змінної p в рівнянні (18) до дійсної змінної x застосуємо заміну (21) у рівнянні (20). Отримаємо таке рівняння:

$$\frac{a_1}{\lambda_1} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_1}{a_1} x \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_2}{a_2} x \right) = 0 \quad (24)$$

відносно дійсної змінної x для визначення коренів рівняння (18), що є полюсами функції $\bar{\mu}(p)$ (15).

У силу того, що точка $p=0$ є усувною особливою точкою для функції $\bar{\mu}(p)$ (15), на основі заміни (21) приходимо до висновку, що корінь $x=0$ рівняння (24) не розглядатимемо.

Позначимо вираз, що стоїть ліворуч у рівнянні (24) через функцію $\eta(x)$, тобто:

$$\eta(x) = \frac{a_1}{\lambda_1} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_1}{a_1} x \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_2}{a_2} x \right). \quad (25)$$

Рівняння (24), що залежить від дійсної змінної x OR, є рівнянням трансцендентного типу [2] в силу того, що в (24) числа $a_k, l_k, (k=1,2)$, взагалі кажучи — довільні сталі.

Коренів цього рівняння буде безмежна кількість, розташовані вони будуть вздовж осі Ox (в нашому випадку — вже осі Ox , а не осі Ox , бо рівняння (24) є дійсним рівнянням від дійсного аргументу x), симетрично до початку координат $x=0$ (в силу непарності функції $\operatorname{ctg}(x)$). Приймаючи до уваги (22), робимо висновок, що досить розглянути тільки додатні корені рівняння (24). Позначимо їх через

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots \quad (26)$$

Відповідно позначимо полюси функції $\bar{\mu}(p)$ (15) (або ж, що те саме, корені рівняння (18)) через

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots \quad (27)$$

де $p_k, (k=1,2,3,\dots)$ визначаються з (22) на основі розв'язків (26) $x_k, (k \geq 1)$ рівняння (24).

Розглянемо питання про порядок полюсів [4] $p_k, (k \geq 1)$ функції $\bar{\mu}(p)$ з (15), що цілком визначається порядком нуля $x_k, (k \geq 1)$ функції $\eta(x)$ з (25). Тому, дослідимо корені $x_k, (k \geq 1)$ рівняння (24) на порядок нуля функції (25).

Похідна від функції $\eta(x)$ з (25) буде такою:

$$\begin{aligned} \eta'(x) &= -\frac{1}{2x} \left(\frac{a_1}{\lambda_1} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_1}{a_1} x \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} x \operatorname{ctg} \left(\frac{l_2}{a_2} x \right) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{l_1}{\lambda_1} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{l_1}{a_1} x \right)} + \frac{l_2}{\lambda_2} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{l_2}{a_2} x \right)} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Враховуючи, що $x_k, (k \geq 1)$ — корінь функції (25) $\eta(x)$, отримуємо, що вираз у перших дужках (28) тотожно дорівнює нулю при $x=x_k$. Тоді значення похідної $\eta'(x)$ у точці $x=x_k, (k \geq 1)$ дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \eta'(x)_{x=x_k} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{l_1}{\lambda_1} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{l_1}{a_1} x \right)} \right. \\ &\left. + \frac{l_2}{\lambda_2} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{l_2}{a_2} x \right)} \right\} \neq 0 \quad (k \geq 0) \quad (29) \end{aligned}$$

і не дорівнюватиме нулю в силу квадратичної залежності від синусів.

Тобто, корені рівняння (24) x_k є нулем першого порядку для функції $\eta(x)$ (25) для всіх значень $k \geq 1$. Відповідно до цього, точки p_k , що визначаються з виразу (22) як

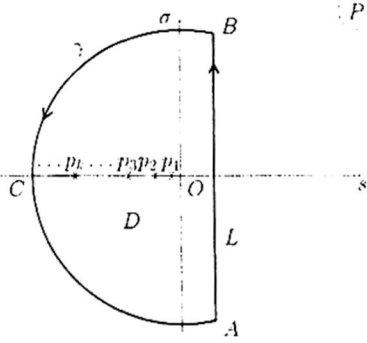


Рис. 3. Контур інтегрування для обернення за Лапласом функції теплового потоку в зображеннях $\bar{\mu}(p)$

$$p_k = -x_k^2, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

є полюсом першого порядку для функції $\bar{\mu}(p)$ з рівняння (15). Далі, для знаходження функції оригіналу $\mu(t)$ потрібно провести інтегрування за формулою обернення (16) уздовж контуру L (рис. 3). Використасмо наступну методику обернення функції зображення за Лапласом з використанням теореми Коші про лишки [1, 4, 10]. Для цього ми доповнюємо контур інтегрування L (AB , рис. 3) деякою кривою g (BCA , рис. 3), що разом із AB обмежують деяку область D , і аналітично [4] продовжуємо функцію $\bar{\mu}(p)$ в \bar{D} . До побудованого аналітичного продовження $\bar{\mu}(p)$ застосовуємо теорему Коші про лишки [4], і, відповідно, знаходимо:

$$\int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \bar{\mu}(p) e^{pt} dp + \int_{\gamma} \bar{\mu}(p) e^{pt} dp = 2\pi i R \quad (31)$$

де R — сума лишків, що визначається з формули [4]:

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{p_k} \bar{\mu}(p_k) e^{p_k t} \quad (32)$$

де x_k — корені рівняння (24).

Застосовуючи до другого інтеграла (31) вздовж кривої g відому лему Жордана [4], знаходимо:

$$\int_{\gamma} \bar{\mu}(p) e^{pt} dp = 0 \quad (33)$$

Тоді шуканий інтеграл з (31) для отримання функції оригіналу $\mu(t)$ (16), враховуючи (33), дорівнюватиме

$$\int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \bar{\mu}(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{p_k} \bar{\mu}(p_k) e^{p_k t} \quad (34)$$

Підставляючи отриманий вираз (34) для функції $\bar{\mu}(p)$ у формулу обернення (16), отримаємо такий вираз для шуканої функції $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{p_k} \bar{\mu}(p_k) e^{p_k t} \quad (35)$$

Оскільки точки p_k ($k \geq 1$) (30) — це полюси першого порядку для функції $\bar{\mu}(p)$, то значення лишків у точках $p=p_k$ ($k \geq 1$) будуть такими:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p_k} \bar{\mu}(p_k) e^{p_k t} &= \text{Res}_{p_k} \frac{T_1 - T_2}{a_1 \sqrt{p_k} \text{cth}\left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p_k}\right) + a_2 \sqrt{p_k} \text{cth}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p_k}\right)} e^{p_k t} \\ &= \frac{2(T_1 - T_2) \sin^2\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right) \sin^2\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right)}{\lambda_1 \sin^2\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right) + \lambda_2 \sin^2\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right)} e^{-x_k^2 t} \end{aligned} \quad (36)$$

Шукана функція $\mu(t)$ теплового потоку задачі (6) визначається з виразу (35) на основі обрахованих значень лишків (36) функції $\bar{\mu}(p)$ в точках $p=p_k$ ($k \geq 1$). Отже, остаточно вираз для функції $\mu(t)$ запишеться в явному вигляді:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(T_1 - T_2) \sin^2\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right) \sin^2\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right)}{\lambda_1 \sin^2\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right) + \lambda_2 \sin^2\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right)} e^{-x_k^2 t} \quad (37)$$

Таким чином, кінцево розв'язок задачі теплопровідності (6) для двох областей, які контактують між собою і між якими відбувається теплообмін за законом (5), запишеться у вигляді (7) і (8), за умови, що функція теплового потоку $\mu(t)$ визначається з рівняння (37), де величини x_k ($k \geq 1$) — це корені рівняння (24), переписаного у вигляді:

$$\frac{a_1}{\lambda_1} \text{ctg}\left(\frac{l_1}{a_1} x\right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \text{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x\right) = 0 \quad (38)$$

враховуючи, що корінь $x=0$ не розглядається.

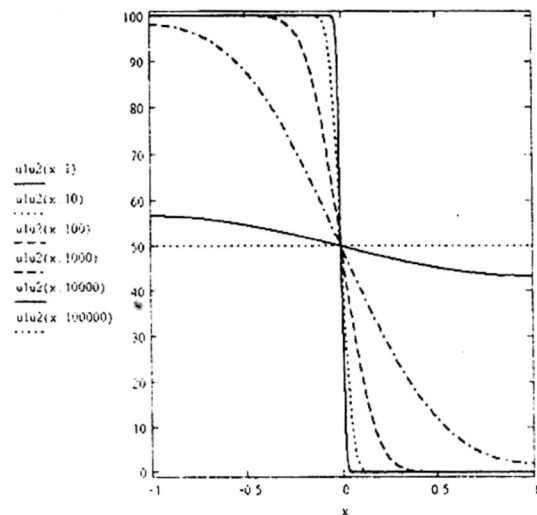


Рис. 4. Графік зміни температури $u(x,t)$ в лівій та правій областях (на графіку функцію температури позначено через $u_1 u_2(x,t)$) в залежності від координати x , при різних значеннях часу t

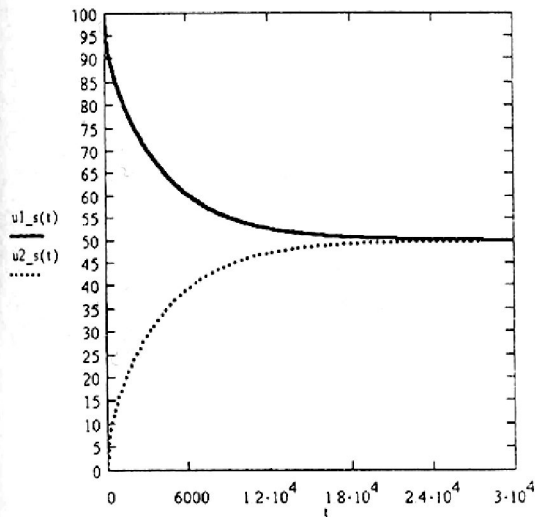


Рис. 5. Графік зміни середніх температур $u(x,t)$ в лівій та правій областях (на графіку функції температур позначено через $u1_s(x,t)$ для лівій та $u2_s(x,t)$ для правій області відповідно) в залежності від координати x , при різних значеннях часу t

Проведено числовий розрахунок для двох областей однакової довжини ($l_1=1$ [м], $l_2=1$ [м]), виготовлених з однакового матеріалу (алюміній) з наступними теплофізичними характеристиками [6]: коефіцієнти теплопровідності $\lambda_1=\lambda_2=204$ [Вт/(м*С)], коефіцієнти температуропровідності $a_1^2=a_2^2=91,3$ [м/с²], та з різними початковими умовами ($T_1=100^\circ\text{C}$, $T_2=0^\circ\text{C}$). Графік отриманих результатів подано на рис. 4. Як видно з графіка, температури в областях остаточно вирівнюються через $t=1,0\cdot 10^5$ с і становить $T=50^\circ\text{C}$ в кожній з них, хоча вже через $t=1000$ с в областях встановлюється практично половина між початковою температурою та $T=50^\circ\text{C}$. Пояснюється це тим, що величина теплового потоку через границю контакту двох областей за першим законом Фур'є

$$q = m C DT \quad (39)$$

прямо пропорційна різниці температур між першою та другою областю, а DT в свою чергу змінюється (зменшується) з часом, як видно з рис. 4. Цей факт наочно показує нерівномірний характер теплообміну між двома областями. Як видно з рис. 5, усталений температурний режим в лівій та правій областях (рівність температур) досягається через $t=2,7\cdot 10^4$ с.

Висновки. 1. Розглянуто аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для двох областей в одновимірному випадку з різними теплофізичними характеристиками та початковими температурами, що контактують між собою за законом ідеального теплового контакту (граничні умови другого роду) з теплоізолюваними кінцями та бічними гранями (теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається).

2. При проведенні обернення за Лапласом виділено всі особливості функції теплового потоку на границі двох областей і представлено її розв'язок у вигляді квадратур, зручних для проведення обчислень.

3. Проведено числовий розв'язок для двох областей виготовлених з металу (алюміній), в залежності від координати та від часу.

4. Встановлено, що за $1/30$ часу, необхідного для досягнення усталеного режиму (рівність температур лівій та правій областей), зміна температури кожної з них досягає 50% від практично отриманої протягом усього часу контакту.

Література

1. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971, — 288 с.
2. Корн Г.А., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 831 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теорий функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.
6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. — М.: Энергия, 1977. — 343 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 798 с.
8. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука, 1964. — 712 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953, — 679 с.
10. Трантер К.Д. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1956. — 204 с.

Отримана 17.07.00

T.Pogorely, V.Mironchuk

Problem of heat conduction for two areas with an ideal thermal contact between them

Ukrainian National University of Food Technology, Kyiv

The analytical solution of a non-steady problem of heat conduction for two areas in a unidimensional case with the miscellaneous thermal characteristics and reference temperatures is considered, which contact among themselves behind the law of an ideal thermal contact (boundary conditions of the second kind) to heat-insulated endings and lateral edges (the thermoexchange with an environment does not happen). A numerical solution also is conducted for two areas in the case of a homogeneous material with the miscellaneous entry conditions.