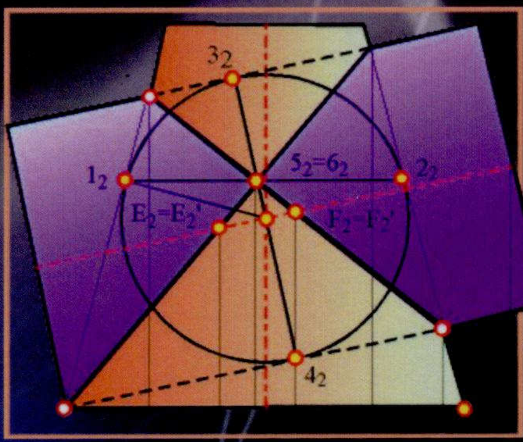
П.П. Загородній
С.В. Волевач

Нарисна геометрія

Побудови та розрахунки



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

П.П. Загородній, С.В. Волевач

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

ПОБУДОВИ ТА РОЗРАХУНКИ

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України
як навчальний посібник
для студентів
вищих навчальних закладів, які
навчаються за напрямами підготовки
«Інженерна механіка»
та «Машинобудування»*

Київ НУХТ 2014

УДК 514.18

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України Лист № 1/11-16168 від 17.10.2012 р.

Рецензенти: **І.В. Малков**, д-р техн. наук, проф. (Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля)

Д.Е. Кільдеров, канд. пед. наук, доц. (Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова)

Загородній П.П., Волевач С.В. Нарисна геометрія. Побудови та розрахунки: Навч. посіб. — К.: НУХТ, 2014. — 339 с.

ISBN 978-966-612-148-9

Наведено розв'язання основних метричних і позиційних задач методами нарисної геометрії, а також розроблені автором математичні алгоритми з конкретними прикладами їх розв'язання.

Для студентів вищих навчальних закладів і конструкторів.

П.П. Загородній, д-р техн. наук
С.В. Волевач, провідний інженер

ISBN 978-966-612-148-9 УДК 514.18

Присвячено 130-річчю
Національного університету
харчових технологій

ПЕРЕДМОВА

Нарисна геометрія як окрема загальнотехнічна дисципліна викладається у вищій школі вже протягом двох останніх століть. Викладання та вивчення цієї дисципліни грунтується на довузівській геометричній і графічній підготовці студентів і об'єктивно не становить значних труднощів для засвоєння ними її основних положень. Нарисна геометрія практично не містить матеріалу, що потребує механічного запам'ятовування, а також складних математичних викладок і доведень. Проте нарисна геометрія традиційно вважається у студентів однією із найважчих дисциплін. Складність її, як відомо, в основному полягає в тому, що на плоскому кресленні зображаються просторові форми, конфігурація, взаємне положення та розміри яких визначаються відповідними способами, свідоме застосування яких здійснюється створенням у студента певних просторових уявлень на основі його просторової уяви. У вивченні нарисної геометрії цей процес є важливим інтелектуальним вмінням, яке з погляду психології є компонентом наочно-зорового та наочно-дійового мислення. На жаль, з ряду об'єктивних і суб'єктивних причин інтелектуальна, загальнонаукова та графічна довузівська підготовка студентів не забезпечує повною мірою набуття ними зазначених інтелектуальних якостей, відсутність яких формалізує засвоєння принципових положень нарисної геометрії. Студент у ряді випадків формально засвоює алгоритми та правила відповідних побудов, не уявляючи цей процес у просторі.

Оскільки зазначені проблеми у вивченні студентами нарисної геометрії не нові, то ці обставини сформували відповідний методичний підхід до викладання цієї дисципліни у закладах вищої освіти. За наявності певної кількості навчального часу, відведеного для лекційних занять, основна увага приділялася практичним заняттям, на яких викладачі розв'язанням відповідних задач і вправ, застосуванням безмашинного програмованого контролю знань студентів, використанням різноманітних технічних засобів навчання, моделей, плакатів тощо досягали певного рівня розвитку просторової уяви студентів і відповідного засвоєння основних положень нарисної геометрії. Самостійна робота студентів зводилася до виконання в позааудиторний час задач, комплексних графічних завдань (епюрів) і роботи з конспектами лекцій та підручниками.

Багаторічний досвід викладання нарисної геометрії та науково-педагогічних досліджень з питань графічної підготовки студентів у вишах дає авторам цього посібника підставу в загальних рисах проаналізувати ефективність основних складових елементів процесу вивчення цієї дисципліни.

Лекція, як і у вивченні усіх дисциплін, так і нарисної геометрії — найдійовіший і найефективніший вид навчання, де студенти отримують синтезовану, концентровану та цілеспрямовану інформацію з програмного матеріалу курсу. На жаль, ефективність конспектування студентами лекційного матеріалу з нарисної геометрії досить невисока. По-перше, коли нарисну геометрію вивчають, як правило, на першому курсі, студенти ще не набули потрібних навичок конспектування. По-друге, креслення, які виконує лектор на дошці, студенти не завжди правильно відтворюють у своїх конспектах. Досить студенту припуститися незначних відхилень у розміщенні елементів зображення, показаного на дошці, як побудова та розв'язування задачі чи вправи спотворюються: точки та лінії перетину геометричних елементів виходять за межі зображень або їх зовсім немає (перетин поверхонь прямими та площинами) тощо. Тому самостійна робота студента з конспектом не завжди досить ефективна. Те саме можна зазначити щодо підручників з нарисної геометрії.

Відомо, що у вищій школі одна і та сама дисципліна викладається залежно від навчальних планів спеціальностей, різної кількості навчального часу і відповідно за різними програмами. Тому і з нарисної геометрії не існувало стабільного підручника, а було їх завжди декілька. Вони були написані різними авторами і функціювали протягом десятиріч (так, найпопулярніший у технічних вишах підручник В.Й. Гордона та М.О. Сіменцова-Огієвського «Курс начертательной геометрии» без істотних перероблень видавався з 1929 р. донині). Ці підручники були написані на основі різних методичних позицій, в різній послідовності подання матеріалу, з різними системами позначень, тому вони, як правило, не були зручними для студентів. У самостійній роботі студенти надавали перевагу конспектам і різним методичним вказівкам. Тому цілком очевидно, що у вивченні нарисної геометрії найдійовішим та найефективнішим видом навчання залишаються практичні заняття.

На жаль, останніми роками в змісті та формах навчальної роботи у вищих закладах освіти сталися зміни, що потребують певного істотного коригування форм і засобів вивчення нарисної геометрії. У навчальних планах більшості спеціальностей вищої школи істотно зменшилась кількість навчальних годин для графічних дисциплін, але водночас значно збільшилася кількість годин для самостійної роботи студентів за рахунок зменшення аудиторних занять. Збільшилась частка контингенту студентів, заочної форми навчання, де основним видом навчального процесу є їх самостійна робота. За цих умов форми вивчення нарисної геометрії, що існували раніше, не можуть дати належного навчального ефекту.

За цих обставин студентам необхідно самостійно опановувати за підручниками значно більшу кількість інформації, яка, в свою чергу, значно складніша, ніж записаний ними конспект лекцій. Тому постала нагальна необхідність створення навчального посібника з нарисної геометрії максимально наближеного до обсягу та змісту курсу, що читається в певному закладі вищої освіти, в міру можливості універсального щодо різних спеціальностей цього закладу. Такий навчальний посібник має вміщувати навчальний матеріал з нарисної геометрії в межах чинних навчальних програм спеціальностей та бути адаптованим до методики викладання цієї дисципліни на відповідній кафедрі. Самостійно працюючи над таким посібником, студент не зазнаватиме складнощів та певного дискомфорту, як це, в основному, має місце під час роботи з переважною більшістю існуючих підручників та посібників з нарисної геометрії, оскільки він ніби знову повертається на лекції до свого викладача.

Виходячи із зазначеного, пропонується навчальний посібник із нарисної геометрії для студентів технічних вузів та конструкторських бюро за редакцією доктора технічних наук, професора кафедри інженерної графіки Національного університету харчових технологій П.П. Загороднього.

У посібнику введено окремий розділ із побудови та методик розрахунку розгорток поверхонь, розроблених проф. П.П. Загороднім, в якому наведені методики розрахунку ліній взаємного перетину поверхонь та їх розгорток. При цьому наводяться як найпростіші методи та вирази розрахунку розгорток, які дають змогу виконувати їх за допомогою звичайних калькуляторів, так і складніші — для ПК. На думку автора, ці методики дадуть можливість спростити та здешевити конструкторські проекти.

Розроблені математичні алгоритми розв'язання задач нарисної геометрії є одним із важливих факторів фундаменталізації дисципліни і сприятимуть впровадженню комп'ютерних технологій у навчальний процес, а також практичній розробці конструкторської документації.

Розділи з 3-го по 10-й, передмову, додаток та список літератури підготував П.П. Загородній, розділи 1, 2 та комп'ютерна графіка — С.В. Волевач.

Позначення та символіка

Точки $A, B, C, \ldots 1, 2, 3$ — точки
$a, b, c,$ — лінії
$\Gamma, \Phi, \Sigma,$ — площини, поверхні
Π_1, Π_2, Π_3 — площини проекцій:
Π_1 — горизонтальна площина проекцій;
Π_2 — фронтальна площина проекцій;
Π_3 — профільна площина проекцій
S — центр проекціювання
$\xrightarrow{S}$ — напрям проекціювання
x, y, z — осі проекцій: відповідно абсцис, ординат, аплікат
$[AB]$ — відрізок прямої
(AB) — пряма, яка визначається точками
$\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$ — кути ($\angle\alpha$ нахилу до Π_1, $\angle\beta$ — до Π_2, $\angle\gamma$ — до Π_3)
$|\ |$ — відстань між елементами
$=$ — наслідок дії, рівність, знак рівності елементів
$\equiv$ — збіг, тотожність
$\parallel$ — паралельність
$\perp$ — перпендикулярність
$\dot{-}$ — схрещування (мимобіжність)
$\in, \ni$ — належність, $A \in a$ — точка A належить прямій a;
$A \ni a$ — пряма a проходить через точку A
$\subset, \supset$ — включення, $a \subset \Sigma$ — пряма a належить площині Σ;
$\Sigma \supset a$ — площина Σ включає пряму a
$\cap$ або $\times$ — перетинання (перетин)
$\neq, \notin, \not\subset$ — заперечення
$\rightarrow$ — якщо ..., то ...

РОЗДІЛ 1

ПРОЕКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ ТА ПРЯМОЇ

Метод проекцій

Для одержання зображень у нарисній геометрії користуються методом проекцій. Проекції поділяються на центральні (або конічні) та паралельні (або циліндричні).

Центральні проекції

Уявімо собі в просторі площину Π і точку S, яка не лежить у цій площині (рис. 1.1). Візьмемо в просторі довільну лінію m (відрізок прямої AB) та точку S (S — центр проекціювання), яка не належить площині Π. Нехай пряма (SA) перетинає площину Π у точці A_Π, (SB) — у точці B_Π (див.рис. 1.1). Точки A_Π, B_Π є центральними проекціями на площину Π точок A і B відрізка AB.

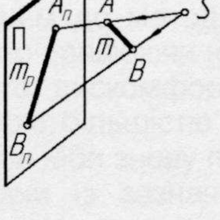


Рис. 1.1

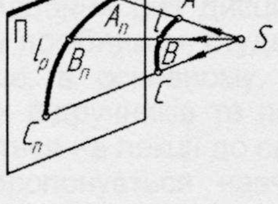


Рис. 1.2

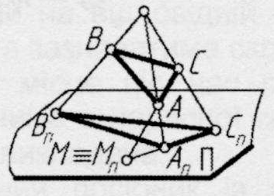


Рис. 1.3

Проведемо проекціюючі прямі (SA) та (SB), тоді $A_\Pi = (SA) \cap \Pi$ і $B_\Pi = (SB) \cap \Pi$ — проекції точок A і B, які визначають проекцію від різка AB прямої m (див.рис. 1.1).

Точка S — центр проекцій, відрізок AB — об'єкт проекціювання, площина Π — площина проекцій, а прямі SA і SB — проекціюючі прямі (лінії). Побудова називається проекціюванням відрізка AB на площину Π.

На рис. 1.2 показано проекції точок A, B і C (A_Π, B_Π і C_Π), які визначають проекцію кривої l (l_Π). Ці зображення є конічними проекціями, бо елементи проекціювання утворюють конічну поверхню.

На рис. 1.3 показано зображення трикутника ABC методом центральних проекцій. Відомі центральні проекції A_Π і B_Π вершин A і B трикутника і точки M перетину прямої лінії сторони AC трикутника з площиною проекцій Π. Проекціюючи лінії з центра S визначають проекції $A_\Pi B_\Pi$ і C_Π вершин трикутника ABC.

Паралельні проекції

Якщо точку S ми віддалимо у безмежність, то проекціюючі лінії будуть паралельні між собою (рис. 1.4). Відрізок $A_П B_П$ — проекція відрізка AB. Напрям лінії "s" називається напрямом проекціювання.

Відрізок AB визначає пряму m, проекція відрізка — $A_П B_П$ визначає проекцію $m_П$ прямої m (див.рис. 1.4).

На рис. 1.5 показано зображення кривої l, яка задана точками A, B та C методом циліндричного проекціювання. Елементи проекціювання утворюють циліндричну поверхню (рис. 1.5), це зумовлює і назву цього методу. На рис. 1.6 показано паралельну проекцію трикутника ABC. Відомі паралельні проекції $A_П$ і $B_П$ вершин A та B трикутника і точка M ($M_П$) перетину сторони AC з площиною проекцій П.

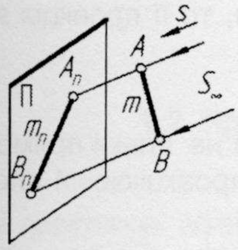


Рис. 1.4

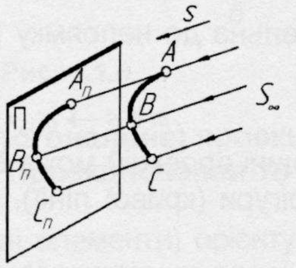


Рис. 1.5

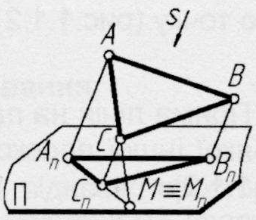


Рис. 1.6

Подвійне паралельне проекціювання

Зображення предмета на одну площину двома проекціями можна побудувати, якщо візьмемо два різні напрями проекціювання. Наприклад, зображення трикутника ABC (рис. 1.7) на площині дано двома напрямами проекціювання (зображеннями) $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$. m_1 і m_2 — напрями проекціювання.

Лінії A_1A_2; B_1B_2; ... — лінії зв'язку, лінія O_1O_2 — лінія перетину площини трикутника ABC з площиною проекцій П. Лінії зв'язку розділяються прямою O_1O_2 в одному і тому самому відношенні.

Співвідношення, яке встановлено внаслідок подвійного паралельного проекціювання, називають спорідненим, або перспективно-афінним.

Якщо напрям проекціювання перпендикулярний до площини проекцій (рис. 1.8), то проекції називаються прямокутними (або ортогональними). Найбільшого практичного значення і широкого застосування в техніці набув саме метод прямокутного проекціювання.

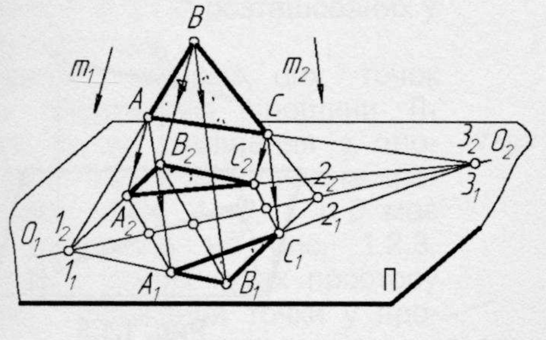


Рис. 1.7

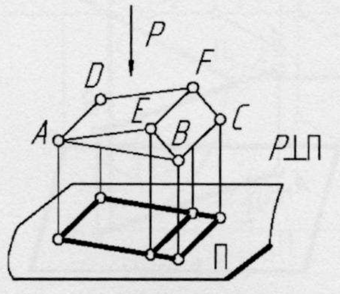


Рис. 1.8

1.1. Властивості паралельного проекціювання

У загальному випадку предмет проекціюється на площину проекцій із спотвореннями.

При паралельному проекціюванні спотворення має метричний характер (спотворення ліній та кутових величин).

Водночас між оригіналом і його проекцією є зв'язок, а саме: деякі властивості оригінала зберігаються і на його проекції. Такі властивості називають проективними або інваріантними (незалежними) для цього способу проекціювання. Цими властивостями паралельного проекціювання є такі:

1. Якщо точка належить прямій, то й її проекція також належить проекції прямої (рис. 1.1.1):

$$A \subset m \rightarrow A_1 \subset m_1.$$

2. Якщо пряма, паралельна до напрямку проекціювання, то її проекція являє собою точку (рис.1.1.2):

$$m \parallel s \rightarrow m_1 = 1.$$

3. Пряма лінія на площині проекцій може бути проекцією не тільки прямої, а й будь-якої іншої плоскої фігури (кривої лінії), що лежить у проекціюючій площині (рис. 1.1.3).

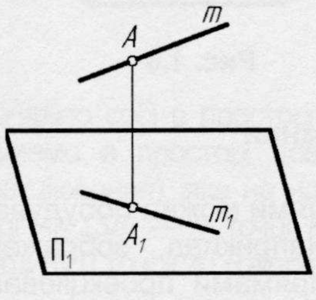


Рис. 1.1.1

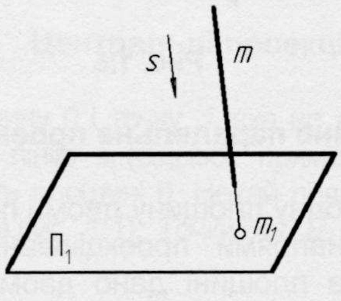


Рис. 1.1.2

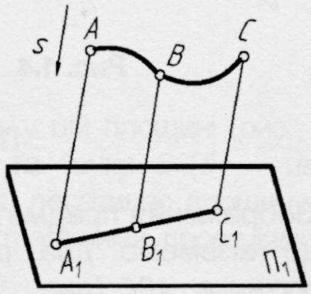


Рис. 1.1.3

4. Відрізок прямої лінії, паралельної до площини проекцій, проекціюється на неї в натуральну величину (рис. 1.1.4):

$$AB \parallel \Pi_1 \rightarrow A_1B_1 = \|AB\|.$$

5. Відношення проекцій відрізків прямої лінії дорівнює відношенню самих відрізків (рис. 1.1.5):

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}.$$

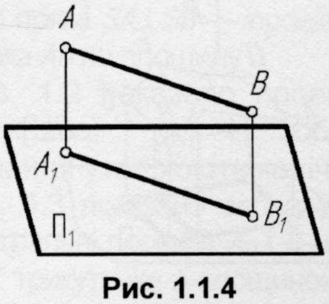


Рис. 1.1.4

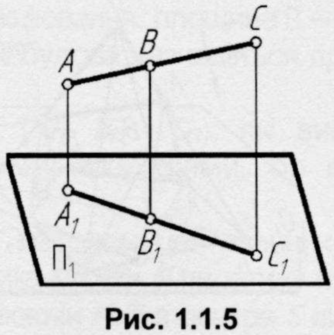


Рис. 1.1.5

1.1. Властивості паралельного проекціювання

У загальному випадку предмет проекціюється на площину проекцій із спотвореннями.

При паралельному проекціюванні спотворення має метричний характер (спотворення ліній та кутових величин).

Водночас між оригіналом і його проекцією є зв'язок, а саме: деякі властивості оригінала зберігаються і на його проекції. Такі властивості називають проективними або інваріантними (незалежними) для цього способу проекціювання. Цими властивостями паралельного проекціювання є такі:

1. Якщо точка належить прямій, то й її проекція також належить проекції прямої (рис. 1.1.1):

$$A \subset m \rightarrow A_1 \subset m_1.$$

2. Якщо пряма, паралельна до напрямку проекціювання, то її проекція являє собою точку (рис.1.1.2):

$$m \parallel s \rightarrow m_1 = 1.$$

3. Пряма лінія на площині проекцій може бути проекцією не тільки прямої, а й будь-якої іншої плоскої фігури (кривої лінії), що лежить у проекціюючій площині (рис. 1.1.3).

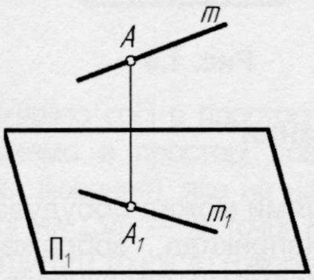


Рис. 1.1.1

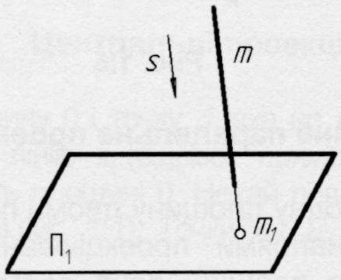


Рис. 1.1.2

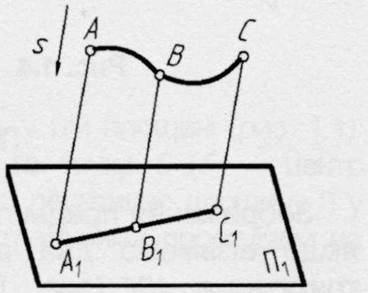


Рис. 1.1.3

4. Відрізок прямої лінії, паралельної до площини проекцій, проекціюється на неї в натуральну величину (рис. 1.1.4):

$$AB \parallel \Pi_1 \rightarrow A_1B_1 = \| AB \|.$$

5. Відношення проекцій відрізків прямої лінії дорівнює відношенню самих відрізків (рис. 1.1.5):

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}.$$

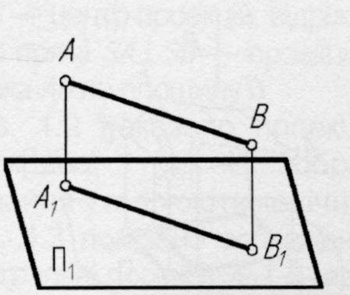


Рис. 1.1.4

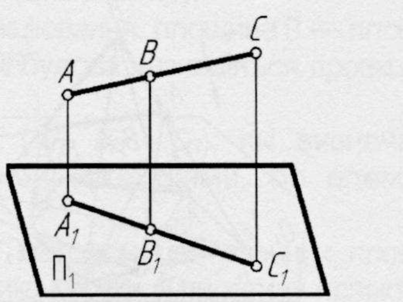
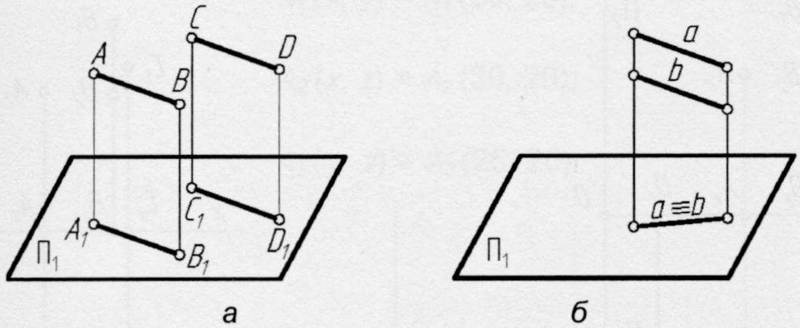


Рис. 1.1.5

6. Проекції відрізків паралельних прямих паралельні між собою (рис. 1.1.6, *а*) або збігаються, якщо лежать в площині, паралельній напрямку проекціювання (рис. 1.1.6, *б*):

$$AB \parallel CD \rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1.$$



а *б*

Рис. 1.1.6

1.2. Прямокутне (ортогональне) проекціювання. Епюр Монжа. Проекціювання точки

Усі просторові об'єкти (геометричні елементи) орієнтують відносно просторової системи взаємно перпендикулярних координатних площин. Розглянемо проекціювання точки на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій Π_1 і Π_2, які при перетині розділяють простір на чотири частини (чотири двогранні кути). Ці кути називають квадрантами або чвертями (четвертями) (рис. 1.2.1). Π_1 — горизонтальна площина проекцій: Π_2 — фронтальна площина проекцій. Лінія перетину площин — вісь проекцій, позначається Ox.

Вісь проекцій поділяє площину Π_1 на передню напівплощину і задню напівплощину, а площину Π_2 — на верхню і нижню напівплощини.

Кути простору умовно нумерують так:

- перший кут — між передньою напівплощиною Π_1 і верхньою напівплощиною Π_2 (перша октанта, або четверть);
- другий кут — між задньою напівплощиною Π_1 і верхньою напівплощиною Π_2 (друга октанта, або четверть);
- третій кут — між задньою напівплощиною Π_1 і нижньою напівплощиною Π_2 (третя октанта, або четверть);
- четвертий кут — між передньою напівплощиною Π_1 і нижньою напівплощиною Π_2 (четверта октанта, або четверть).

На рис. 1.2.1 показана просторова модель системи двох площин проекцій Π_1 і Π_2 та точок *A*, *B*, *C* і *D*, розташованих у різних кутах простору.

Ортогональні проекції цих точок одержують обертанням площини Π_1 навколо осі Ox до суміщення з площиною Π_2 (рис. 1.2.2). Комплексне креслення (епюр) точок *A*, *B*, *C* і *D* має вигляд, як показано на рис. 1.2.3, розташованих в різних кутах простору (квадрантах). Положення точки у просторі визначається двома проекціями цієї точки на дві взаємно перпендикулярні площини. Але просторові форми (предмети) є тривимірними, тому для повного

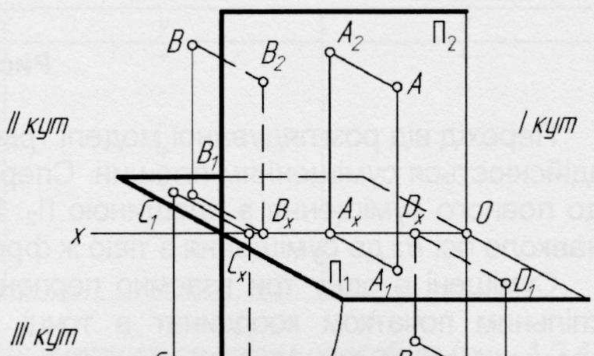


Рис. 1.2.1

зображення тривимірних форм використовують три площини проекцій Π_1, Π_2 і Π_3 — додається профільна площина проекцій.

Просторову модель трьох площин проекцій та проекції точки A відносно цих площин проекцій показано на рис. 1.2.4, *а*.

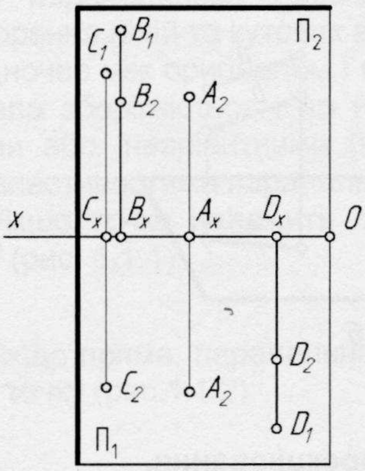


Рис. 1.2.2

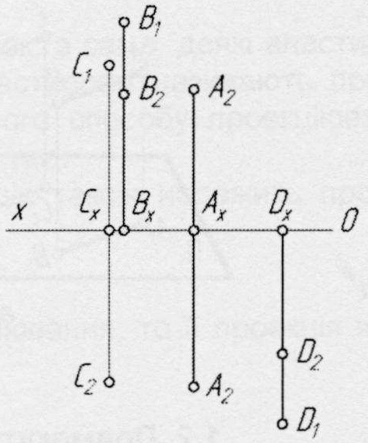
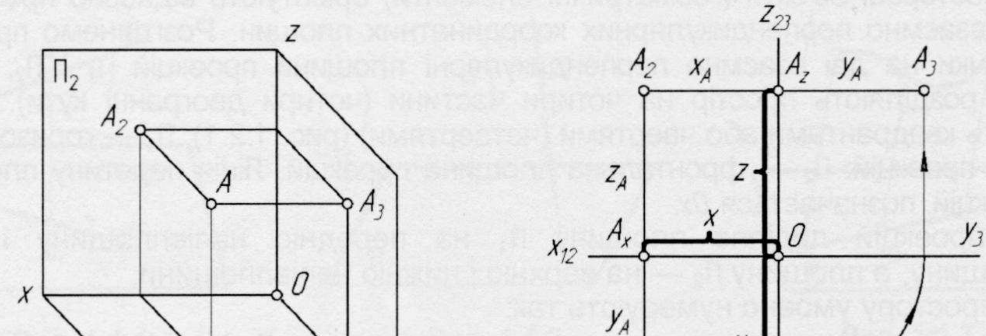


Рис.1.2.3



а *б*

Епюр Монжа

Рис. 1.2.4

Перехід від розглядуваної моделі трьох площин проекцій до плоского креслення здійснюється суміщенням площин. Спершу обертається площина Π_1 навколо осі $0x$ до повного суміщення з площиною Π_2. Потім обертається профільна площина Π_3 навколо осі $0z$ до суміщення з тією ж фронтальною площиною Π_2.

Суміщені в одну три взаємно перпендикулярні площини проекцій Π_1, Π_2 та Π_3 із спільним початком координат в точці 0 називають епюром Монжа. При цьому *горизонтальна* площина проекцій Π_1 визначається координатами x та $y \rightarrow \Pi_1$ (x, y); *фронтальна* площина проекцій Π_2 — координатами x та z $\rightarrow \Pi_2$ (x, z); *профільна* площина проекцій Π_3 — координатами y та z $\rightarrow \Pi_2$ (y, z).

Кожна із цих площин Π_1, Π_2 та Π_3 має свої напрямки координат: позитивні (із знаком "+") показують стрілки на рис. 1.2.5, а в протилежну від стрілки сторону, починаючи з нуля, координати будуть від'ємні (із знаком "—").

Координати будь-якої точки завжди задаються в такому порядку: A (x, y, z). Тоді для побудови проекції точки на епюрі Монжа достатньо записати їх проекції на кожну із площин Π_1, Π_2 та Π_3. Наприклад: A (x, y, z) = A (30, 25, 20). Тоді проекціями точки A на площинах проекцій Π_1, Π_2 та Π_3 відповідно будуть:

$$A_1\,(x,\ y) = A_1\,(30,\ 25);$$

$$A_2\,(x,\ z) = A_2\,(30,\ 20);$$

$$A_3\,(y,\ z) = A_3\,(25,\ 20).$$

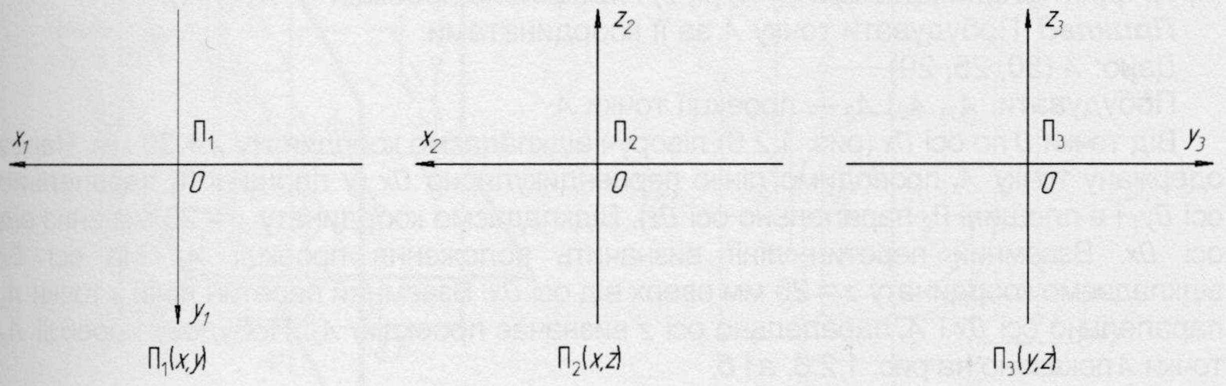


Рис. 1.2.5

Усі координати точок у нарисній геометрії та розміри на кресленнях задаються тільки в *міліметрах!* І тому розмірність їх не вказують. Нижні індекси проекцій точок показують, на яку із площин проекціюється точка, тобто індекс "*1*" свідчить про те, що це проекція точки на Π_1, індекс "*2*" — на Π_2, індекс "*3*" — на Π_3.

Лінії A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 між проекціями точки на відповідні площини проекцій завжди перпендикулярні до осей і називаються *лініями зв'язку*.

Три взаємно перпендикулярні площини проекцій Π_1, Π_2 та Π_3 ділять простір на вісім *октант*, які визначаються знаками при кожній із координат x, y, z (табл. 1.2.1). Перші чотири октанти ще називають чвертями (четвертями).

Таблиця 1.2.1

Октанти	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	–	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Побудова точки A при заданих координатах виконується таким способом (рис. 1.2.4 і рис. 1.2.1).

Дано: A (x, y, z).

Побудувати: A_1, A_2 і A_3.

Оскільки координати точки A всі позитивні (із знаками "+"), то вона розташована у першій октанті.

Знаючи координати x, y і z, можна побудувати за ними точку на кресленні, навпаки, маючи креслення точки, можна визначити за нею її координати. Від точки O — (початок відліку) по осі Ox ліворуч відкладаємо координату x. Через одержану точку A_x проводимо лінію паралельно осі Oy_1. Від точки O по осі Oy_1 відкладаємо координату y, через точку Ay_1 проводимо лінію паралельно осі Ox. Взаємний перетин цих ліній визначить положення горизонтальної проекції точки A (A_1). На осі Oz відкладаємо координату z, на перетині лінії з точок A_x, A_z знаходиться фронтальна проекція точки A (A_2). Профільну проекцію A_3 будуємо за допомогою циркуля або відкладаємо від точки A_z на лінії відрізок $[A_zA_3]$, який дорівнює відрізку $[A_xA_1]$. Отже, горизонтальна проекція точки A визначається: A_1 (x, y), фронтальна проекція — $A_2(x, z)$ і профільна проекція — $A_3(y, z)$.

Приклад. Побудувати точку A за її координатами.

Дано: A (30, 25, 20).

Побудувати: A_1, A_2 і A_3 — проекції точки A.

Від точки O по осі Ox (рис. 1.2.6) ліворуч відкладаємо координату $x = 30$ мм. Через одержану точку A_x проводимо лінію перпендикулярно Ox (у площині Π_1 паралельно осі Oy_1 і в площині Π_2 паралельно осі Oz). Відкладаємо координату $y = 25$ мм вниз від осі Ox. Взаємний перетин лінії визначить положення проекції A_1. На осі Oz відкладаємо координату $z = 20$ мм вверх від осі Ox. Взаємний перетин ліній з точки A_z паралельно осі Ox і A_x паралельно осі z визначає проекцію A_2. Побудову проекції A_3 точки A показано на рис. 1.2.6, *а* і *б*.

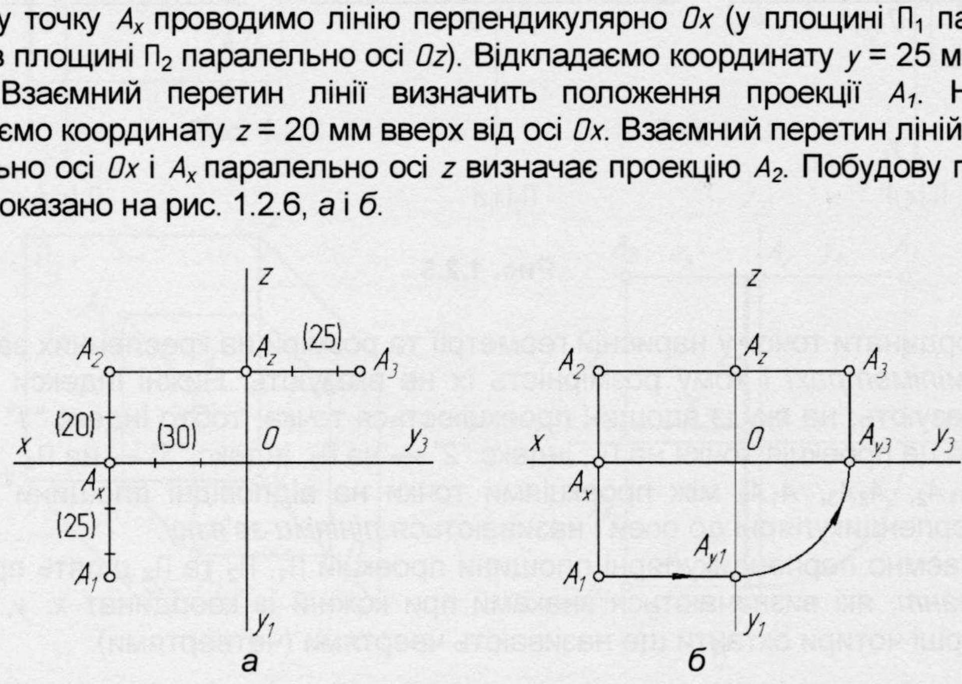


Рис. 1.2.6

На рис. 1.2.7 та рис. 1.2.8 показано зображення точок у різних октантах у просторі та на епюрі Монжа:

- точка A (x, y, z) — I октанта;
- точка B $(x, -y, z)$ — II октанта;
- точка C $(x, -y, -z)$ — III октанта;
- точка D $(x, y, -z)$ — IV октанта;
- точка E $(-x, y, z)$ — V октанта;
- точка G $(-x, -y, z)$ — VI октанта;
- точка K $(-x, -y, -z)$ — VII октанта;
- точка F $(-x, y, -z)$ — VIII октанта.

Координати точок на рис. 1.2.7 та рис. 1.2.8 не збігаються!

Відстані від точки до площин проекцій:

до Π_1 визначається координатою z;
до Π_2 — координатою y;
до Π_3 — координатою x.

Відстані від точки до осей координат визначаються перпендикуляром, проведеним від точки до відповідної осі, який проекціюється на одній із площин проекцій (до якої цей перпендикуляр буде паралельним) у натуральну величину, тобто відстань від точки A до осі Ox визначається на Π_3 від проекції точки A_3 до початку координат, від точки A до осі Oy — на Π_2 від A_2 до початку координат, від точки A до осі Oz — на Π_1 від A_1 до початку координат.

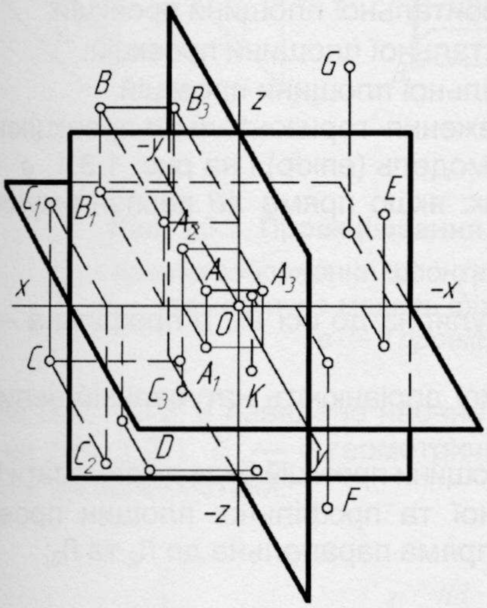


Рис. 1.2.7

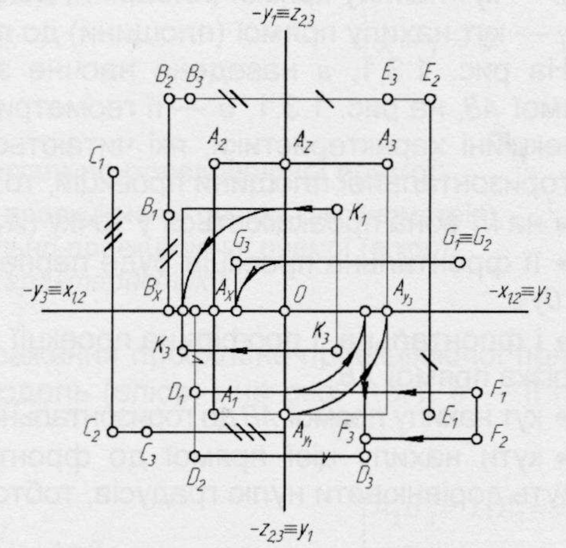


Рис. 1.2.8

Точка A лежить у площині проекцій Π_1, якщо її координата z дорівнює нулю, тобто

$$A \subset \Pi_1 \rightarrow A\ (x,\ y,\ 0).$$

Точка B лежить у площині проекцій Π_2, якщо її координата y дорівнює нулю:

$$B \subset \Pi_2 \rightarrow B\ (x,\ 0,\ z).$$

Точка C лежить у площині проекцій Π_3, якщо її координата x дорівнює нулю:

$$C \subset \Pi_1 \rightarrow C\ (0,\ y,\ z).$$

Точка D лежить на осі Ox, якщо її координати y та z дорівнюють нулю:

$$D \subset Ox \rightarrow D\ (x,\ 0,\ 0).$$

Аналогічно: точка E лежить на осі Oy, а точка G — на осі Oz.

$$E \subset Oy \rightarrow E\ (0,\ y,\ 0).$$
$$G \subset Oz \rightarrow G\ (0,\ 0,\ z).$$

1.3. Проекціювання прямої

Положення прямої у просторі задають відрізком AB, тобто координатами двох точок $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ та $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, з'єднаних між собою прямою лінією.

Можна також задавати пряму напрямком, тобто двома проекціями прямої, на якій також можуть бути взяті дві довільні точки.

Положення прямої відносно площин проекцій

За своїм положенням відносно площин проекцій прямі поділяються на *проекціюючі прямі*, *прямі рівня*, та *прямі загального положення*.

1.3.1. Проекціюючі прямі

Це прямі, **перпендикулярні** до однієї із площин проекцій:

а) *горизонтально-проекціююча пряма*, яка *перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій* ($AB \perp \Pi_1$) (рис. 1.3.1). Тоді ця пряма буде паралельною і до Π_2, і до Π_3 на яких вона буде проекціюватись у натуральну (дійсну) величину.

Приймемо за:

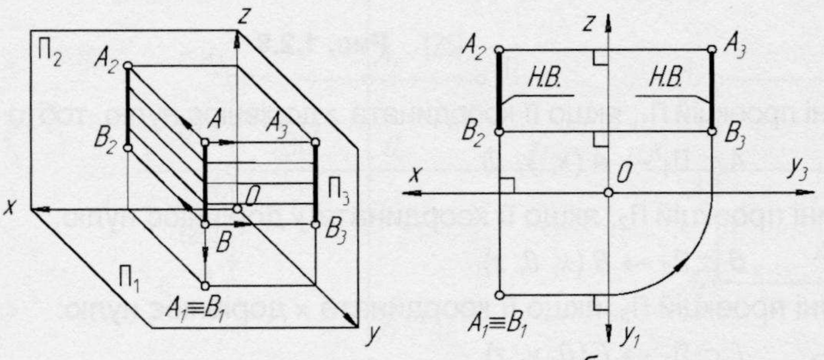
α — кут нахилу прямої (площини) до горизонтальної площини проекцій;

β — кут нахилу прямої (площини) до фронтальної площини проекцій;

γ — кут нахилу прямої (площини) до профільної площини проекцій.

На рис. 1.3.1, *а* наведене наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої *АВ*, на рис. 1.3.1, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.1, *в* — її проекційні характеристики, які читаються так: якщо пряма *АВ* перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, то:

- на Π_1 вона проекціюється у точку ($A_1B_1 = 1$);
- її фронтальна проекція буде перпендикулярна до осі Ox, а профільна — до осі Oy_3;
- і фронтальна, і профільна проекції прямої дорівнюють натуральній величині відрізка прямої *АВ*;
- кут нахилу прямої *АВ* до горизонтальної площини проекцій буде дорівнювати 90°;
- кути нахилу цієї прямої до фронтальної та профільної площин проекцій будуть дорівнювати нулю градусів, тобто ця пряма паралельна до Π_2 та Π_3;



$$AB \perp \Pi_1 \rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 1, (A_1 = B_1); \\ A_2B_2 \perp Ox; \\ A_3B_3 \perp Oy_3; \\ A_2B_2 = A_3B_3 = |AB|; \\ \alpha = 90^\circ; \\ \beta = \gamma = 0^\circ. \end{cases}$$

а б в

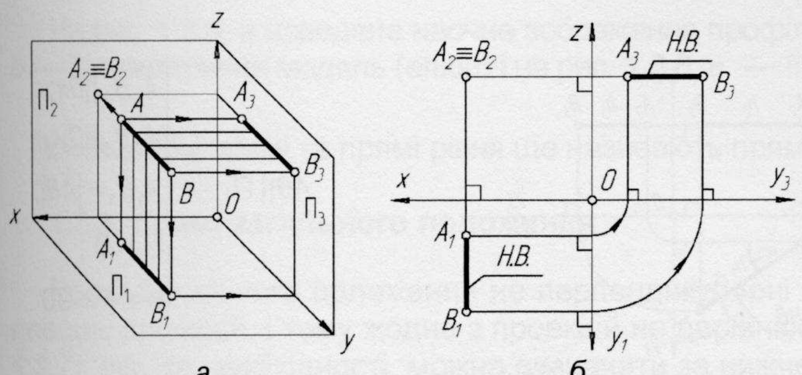
Рис. 1.3.1. Проекціювання горизонтально-проекціюючої прямої:

а — наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої (аксонометрія);
б — геометрична модель горизонтально-проекціюючої прямої (епюр);
в — її проекційні характеристики

б) *фронтально-проекціююча пряма*, *перпендикулярна до фронтальної площини проекцій*, на якій вона проекціюється в точку, і паралельна до горизонтальної та профільної площин проекцій і проекціюється на них у натуральну (дійсну) величину (рис. 1.3.2).

На рис. 1.3.2, *а* наведене наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої *АВ*, на рис. 1.3.2, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.2, *в* — її проекційні характеристики;

в) *профільно-проекціююча пряма перпендикулярна до профільної площини проекцій*, на якій вона проекціюється в точку, і паралельна до горизонтальної та фронтальної площин проекцій і проекціюється на них у натуральну (дійсну) величину (рис. 1.3.3).



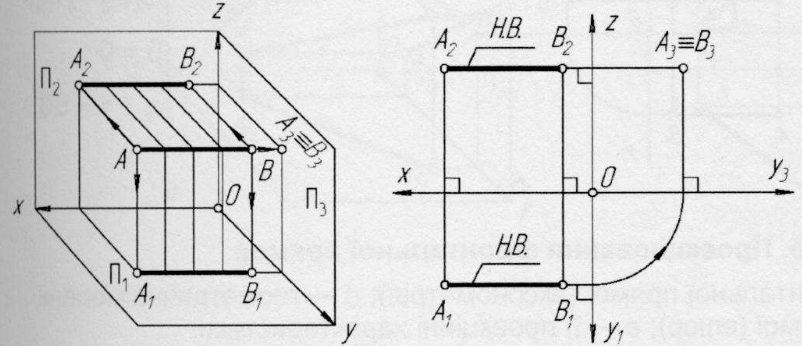
а б

$$AB \perp \Pi_2 \rightarrow \begin{cases} A_2B_2 = 1, (A_2 = B_2); \\ A_1B_1 \perp Ox; \\ A_3B_3 \perp Oz; \\ A_1B_1 = A_3B_3 = |AB|; \\ \beta = 0^\circ; \\ \alpha = \gamma = 0^\circ. \end{cases}$$

в

Рис. 1.3.2. Проекціювання фронтально-проекціюючої прямої:
а — наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої (аксонометрія);
б — геометрична модель фронтально-проекціюючої прямої (епюр);
в — її проекційні характеристики

На рис. 1.3.3, *а* наведене наочне зображення профільно-проекціюючої прямої *AB*, на рис. 1.3.1, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.1, *в* — її проекційні характеристики.



а б

$$AB \perp \Pi_3 \rightarrow \begin{cases} A_3B_3 = 1, (A_3 = B_3); \\ \left.\begin{matrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{matrix}\right| \parallel Ox; \\ A_1B_1 = A_2B_2 = |AB|; \\ \gamma = 90^\circ; \\ \alpha = \beta = 0^\circ. \end{cases}$$

в

Рис. 1.3.3. Проекціювання профільно-проекціюючої прямої:
а — наочне зображення профільно-проекціюючої прямої (аксонометрія);
б — геометрична модель профільно-проекціюючої прямої (епюр);
в — її проекційні характеристики

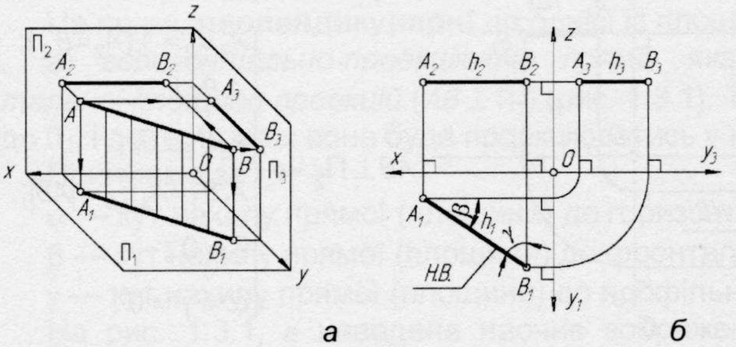
1.3.2. Прямі (лінії) рівня

Це прямі, **паралельні** до однієї із площин проекцій:

а) *горизонтальна пряма, паралельна до горизонтальної площини проекцій* ($AB \parallel \Pi_1$) і проекціюється на ній в натуральну величину. Проекція цієї прямої на Π_2 буде паралельною до осі Ox, а на Π_3 — паралельною до осі Oy_3 (рис. 1.3.4).

На рис. 1.3.4, *а* наведене наочне зображення горизонтальної прямої *AB*, на рис. 1.3.4, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.4, *в* — її проекційні характеристики;

б) *фронтальна пряма, паралельна до фронтальної площини проекцій* ($AB \parallel \Pi_2$), і тому проекціюється на ній в натуральну величину. Проекція цієї прямої на горизонтальну площину проекцій буде паралельною до осі Ox, а на профільну — паралельною до осі Oz (рис. 1.3.5).



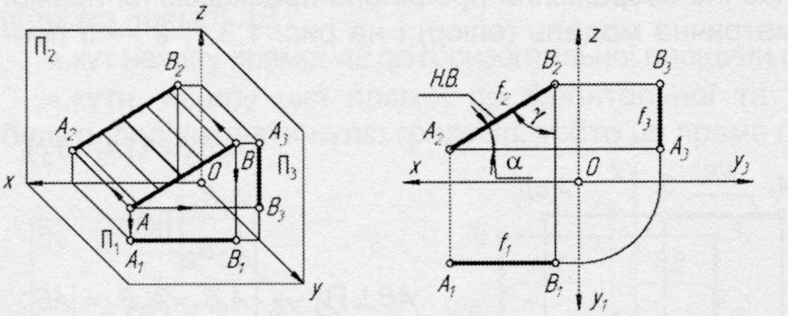
$$AB \parallel \Pi_1 \rightarrow \begin{cases} A_2B_2 \parallel Ox; \\ A_3B_3 \parallel Oy_3; \\ A_1B_1 = |AB|; \\ \alpha = 0^\circ; \\ \beta + \gamma = 90^\circ. \end{cases}$$

а *б* *в*

Рис. 1.3.4. Проекціювання горизонтальної прямої:

а — наочне зображення горизонтальної прямої(аксонометрія); *б* — геометрична модель горизонтальної прямої (епюр); *в* — її проекційні характеристики

На рис. 1.3.5, *а* наведене наочне зображення фронтальної прямої *AB*, на рис. 1.3.5, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.5, *в* — її проекційні характеристики;



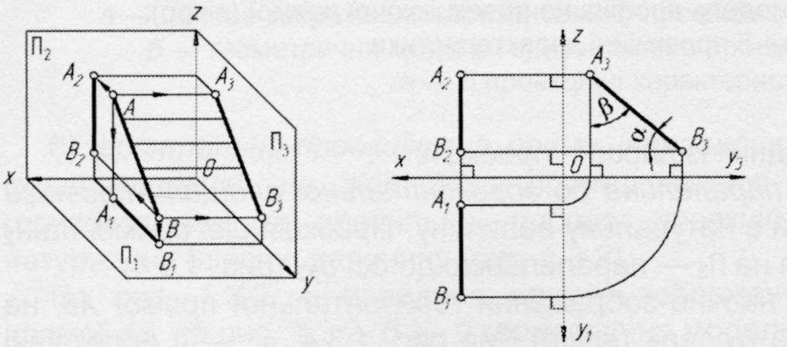
$$AB \parallel \Pi_2 \rightarrow \begin{cases} A_1B_1 \parallel Ox; \\ A_3B_3 \parallel Oz; \\ A_2B_2 = |AB|; \\ \beta = 0^\circ; \\ \alpha + \gamma = 90^\circ. \end{cases}$$

а *б* *в*

Рис. 1.3.5. Проекціювання фронтальної прямої:

а — наочне зображення фронтальної прямої (аксонометрія); *б* — геометрична модель фронтальної прямої (епюр); *в* — її проекційні характеристики

в) *профільна пряма, паралельна до профільної площини проекцій* ($AB \parallel \Pi_3$) і проекціюється на ній в натуральну величину. Проекції цієї прямої і на горизонтальну, і на фронтальну площини проекцій перпендикулярні до осі *Ox* (рис. 1.3.6).



$$AB \perp \Pi_1 \rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 1, (A_1 = B_1); \\ A_2B_2 \perp Ox; \\ A_3B_3 \perp Oy_3; \\ A_2B_2 = A_3B_3 = |AB|; \\ \alpha = 90^\circ; \\ \beta = \gamma = 0^\circ. \end{cases}$$

а *б* *в*

Рис. 1.3.6. Проекціювання профільно-прямої:

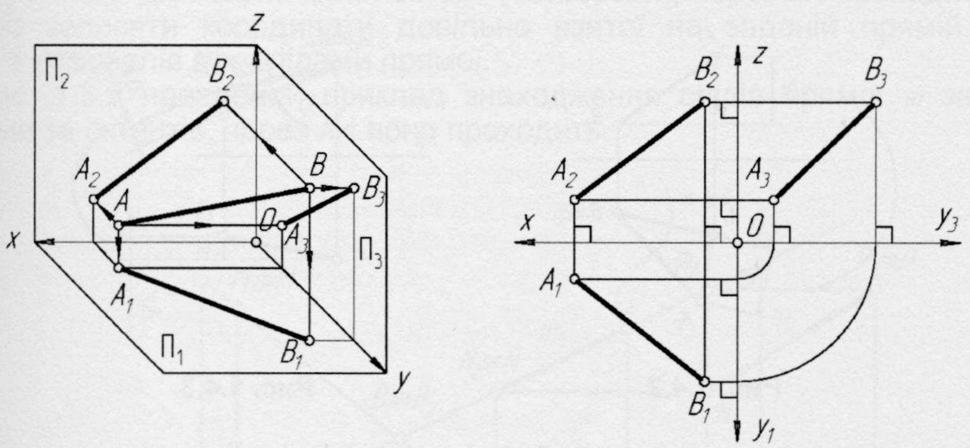
а — наочне зображення профільної прямої (аксонометрія); *б* — геометрична модель профільної прямої (епюр); *в* — її проекційні характеристики

На рис. 1.3.6, *а* наведене наочне зображення профільної прямої *АВ*, на рис. 1.3.6, *б* — її геометрична модель (епюр) і на рис. 1.3.6, *в* — її проекційні характеристики.

Проекціюючі прямі та прямі рівня ще називають прямими часткового положення.

1.3.3. Прямі загального положення

Прямі загального положення не перпендикулярні і не паралельні до жодної з площин проекцій, і тому жодна з проекцій не дорівнює натуральній величині (рис. 1.3.7), яку, за необхідності, можна визначити за нижче наведеною методикою або розрахувати. Так само прямі загального положення можуть мати різні кути нахилу до кожної із площин проекцій $П_1$, $П_2$ та $П_3$. Але сума двох кутів $\alpha + \beta$, або $\alpha + \gamma$, або $\beta + \gamma$ не може перевищувати 90°. Тобто, можна задати пряму в межах $0 \le \alpha + \beta \le 90°$, або $0 \le \alpha + \gamma \le 90°$, або $0 \le \beta + \gamma \le 90°$. Прямих із сумою вищеназваних кутів понад 90° не існує. Кути нахилу прямої загального положення до кожної із площин проекцій також можуть бути визначені побудовою або розраховані.



а б

Рис. 1.3.7. Проекціювання прямої загального положення

1.4. Визначення натуральної (дійсної) величини відрізка прямої загального положення та кутів нахилу його до площин проекцій

Якщо проекцію відрізка *АВ* на $П_1$ — A_1B_1 — паралельно до цього відрізка перенести до точки *А*, то отриманий ΔABB_0 буде прямокутним (рис. 1.4.1). Його сторона $AB_0 = A_1B_1$ є катетом цього трикутника. А другий катет його — відрізок $BB_0 = BB_1 — AA_1$.

Але: $BB_1 = z_B$; $AA_1 = z_A$; $BB_0 = z_B — z_A = \Delta z$

А відрізок *АВ* є гіпотенузою прямокутного ΔABB_0.

Рис. 1.4.1

Отже, із наведеної побудови випливає алгоритм визначення натуральної величини відрізка способом прямокутного трикутника, згідно з яким *натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається як гіпотенуза прямокутного трикутника, одним із катетів якого є проекція відрізка на одну із площин* проекцій, *а другим катетом є різниця відстаней кінців відрізка до тієї самої площини проекцій*. При цьому кутом нахилу прямої до площини проекцій буде кут між проекцією відрізка та його натуральною величиною.

Отже, якщо задані проекції AB, то для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення AB (рис. 1.4.2) та кута α (кута нахилу AB до Π_1) на Π_1 із точки A_1 (або B_1) будують прямий кут. Далі вимірюють різницю координати z між точками A та B (A_2 та B_2) на Π_2 — Δz — і відкладають її (Δz) від точки A_1 на перпендикулярі до A_1B_1 — точка A_0. A_0B_0 і є натуральною величиною відрізка AB. А кутом нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій α буде кут між проекцією прямої A_1B_1 та натуральною величиною відрізка A_0B_0 (рис. 1.4.2).

Якщо необхідно визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення та кут β (кут нахилу відрізка прямої AB до Π_2) (рис. 1.4.3), то із точки B_2 (A_2) будують перпендикуляр до A_2B_2 і на ньому від B_2 відкладають Δy — різницю координат y між точками A та B (A_1 та B_1) — Δy — і відкладають її (Δy) від точки B_2 на перпендикулярі до A_2B_2 — точка B_0. A_0B_0 і є натуральною величиною відрізка AB, а β — кутом нахилу прямої AB до Π_2.

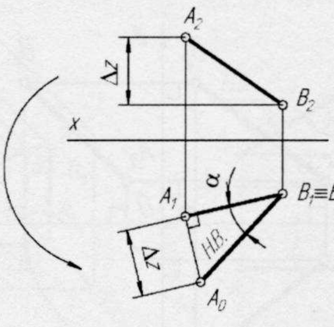


Рис. 1.4.2

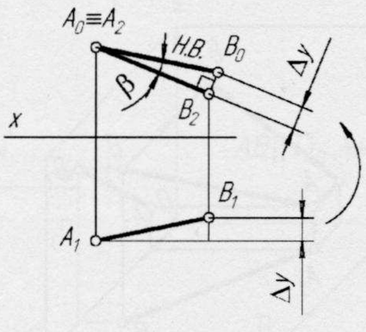


Рис. 1.4.3

1.5. Сліди прямої

Слідом прямої називається точка перетину її із площиною проекцій (рис. 1.5.1). Тоді прямі загального положення перетинаються з усіма трьома площинами проекцій Π_1, Π_2 та Π_3, тобто мають три сліди, прямі рівня перетинаються із двома площинами проекцій (мають два сліди), а проекціюючі прямі перетинаються з однією площиною проекцій, до якої вони перпендикулярні — тобто мають один слід.

Із рис. 1.5.1, *а* видно, що коли продовжити відрізок прямої AB до перетину його із Π_1, то у точці M він перетнеться з продовженням його горизонтальної проекції A_1B_1, а продовження його фронтальної проекції A_2B_2 перетне вісь Ox. Аналіз утворення горизонтального сліду прямої AB — точки M — дає можливість визначити алгоритм його побудови: для того, щоб побудувати *горизонтальний слід прямої* — точка M — необхідно *фронтальну проекцію* прямої A_2B_2 продовжити до перетину з віссю Ox — точка M_2, — із точки M_2 провести лінію зв'язку (перпендикулярно до осі Ox) до перетину її із продовженням *горизонтальної проекції* прямої — точка $M_1 \equiv M$ (рис. 1.5.1, *б*).

Для знаходження *фронтального сліду* прямої AB — точка N — необхідно *горизонтальну проекцію* прямої A_1B_1 продовжити до перетину з віссю Ox — точка N_1, — із точки N_1 провести лінію зв'язку (перпендикулярно до осі Ox) до перетину її з продовженням *фронтальної проекції* прямої — точка $N_2 \equiv N$ (рис. 1.5.1, *б*).

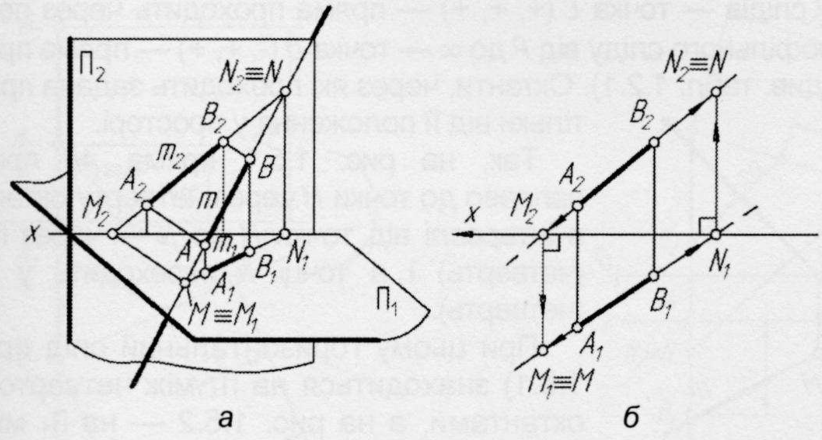


Рис. 1.5.1

На рис. 1.5.1 пряма AB перетинається із $П_1$ у точці з координатами M (+, +, 0), а з $П_2$ — у точці N (+, 0, +). У цих точках пряма AB переходить із однієї октанти (четверті) в іншу. Для визначення октант (четвертей), через які проходить пряма, достатньо записати координати довільно взятої на заданій прямій точки в кожному з інтервалів між слідами прямої.

На рис. 1.5.2 наведений приклад знаходження слідів прямої m загального положення та октантів, через які вона проходить.

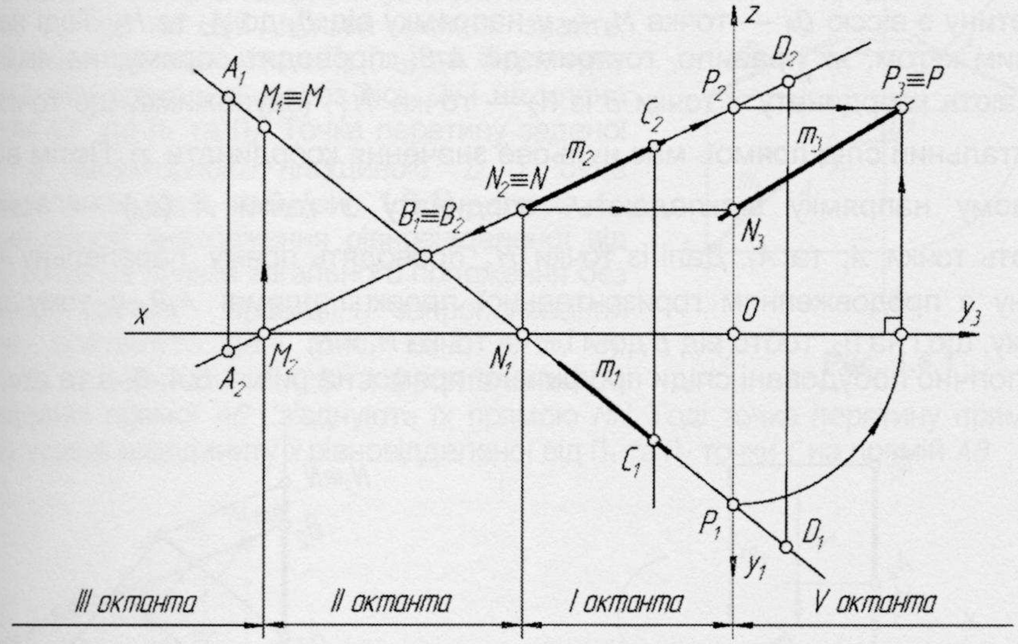


Рис. 1.5.2

Для цього побудовані горизонтальний M, фронтальний N та профільний слід P (фронтальна проекція профільного сліду P_2) за наведеними вище алгоритмами. Для визначення октанти, через яку проходить пряма m, у напрямку зліва направо в кожному з інтервалів беруть довільну точку і записують її координати. Наприклад, на прямій лівіше горизонтального сліду взята точка, координати якої A (+, -, -) свідчать про те, що пряма m від ∞ до точки M знаходиться у третій октанті. Координати точки B (+, -, +) свідчать про те, що в інтервалі від горизонтального M до фронтального N слідів пряма m проходить через другу октанту. В інтервалі від фронтального N до профільного P слідів — точка C (+, +, +) — пряма проходить через першу октанту, і правіше від профільного сліду від P до ∞ — точка D (-, +, +) — пряма проходить через п'яту октанту (див. табл. 1.2.1). Октанти, через які проходить задана пряма, залежать тільки від її положення у просторі.

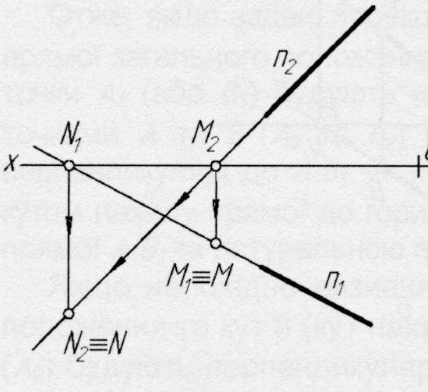


Рис. 1.5.3

Так, на рис. 1.5.1 пряма AB проходить зліва направо до точки M через четверту октанту (четверть), в інтервалі від точки M до N — через першу октанту (четверть) і в точці N переходить у другу октанту (четверть).

При цьому горизонтальний слід прямої AB (рис. 1.5.1) знаходиться на Π_1 між четвертою та першою октантами, а на рис. 1.5.2 — на Π_1 між третьою та другою октантами (четвертями).

Фронтальні сліди прямих AB та m на рис. 1.5.1 та на рис. 1.5.2 знаходяться на Π_2 між першою та другою октантами, а на рис. 1.5.3 — між четвертою та третьою октантами.

Сліди профільної прямої знаходять аналогічно вищенаведеному способу в системі координат Π_2 — Π_3. Знаходження горизонтального та фронтального слідів профільної прямої без побудови її на Π_3 наведено на рис. 1.5.4, *а, б, а* та *г* відповідно.

Для цього користуються тим самим правилом знаходження слідів, а також пропорційністю проекцій відрізків прямої. Наприклад, для знаходження горизонтального сліду прямої AB (рис. 1.5.4, *а*), її фронтальну проекцію продовжують до перетину з віссю $0x$ — точка M_2 — у напрямку від B_2 до A_2 та M_2. Тоді на Π_1 під довільним кутом, як правило, гострим до A_1B_1, проводять пряму, на якій від B_1 відкладають координату z точки B із Π_2 — точка $\overline{M}_1$, (зауважимо, що точка M, як горизонтальний слід прямої, має нульове значення координати z). Потім від $\overline{M}_1$ у зворотному напрямку відкладають координату z точки A (z_A) — точка $\overline{A}_1$. З'єднують точки $\overline{A}_1$ та A_1. Далі із точки $\overline{M}_1$ проводять пряму, паралельну $\overline{A}_1A_1$, до перетину з продовженням горизонтальної проекції прямої A_1B_1 у тому самому напрямку, що і на Π_2, тобто від B до A і M — точка $M_1 \equiv M$.

Аналогічно побудовані сліди профільної прямої на рис. 1.5.4, *б*, *в* та *г*.

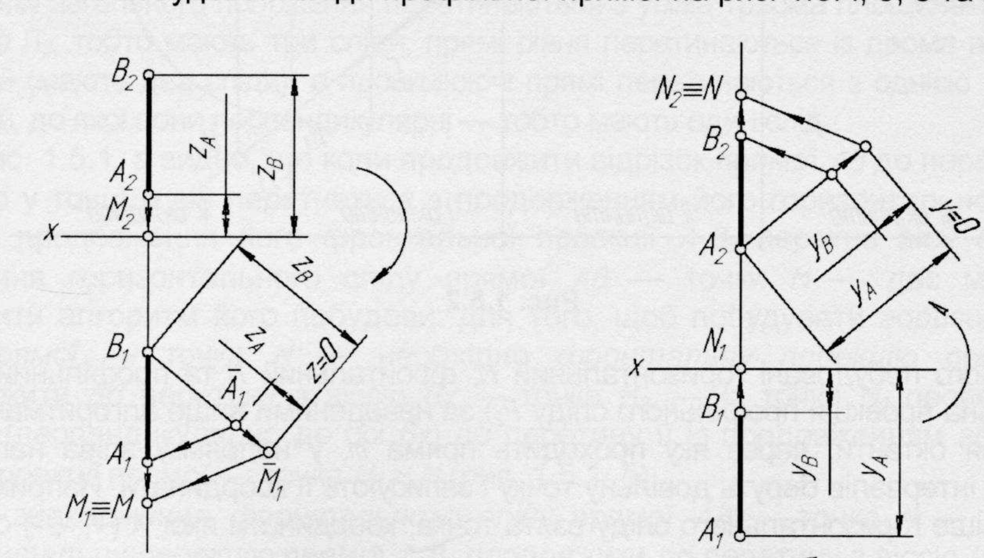
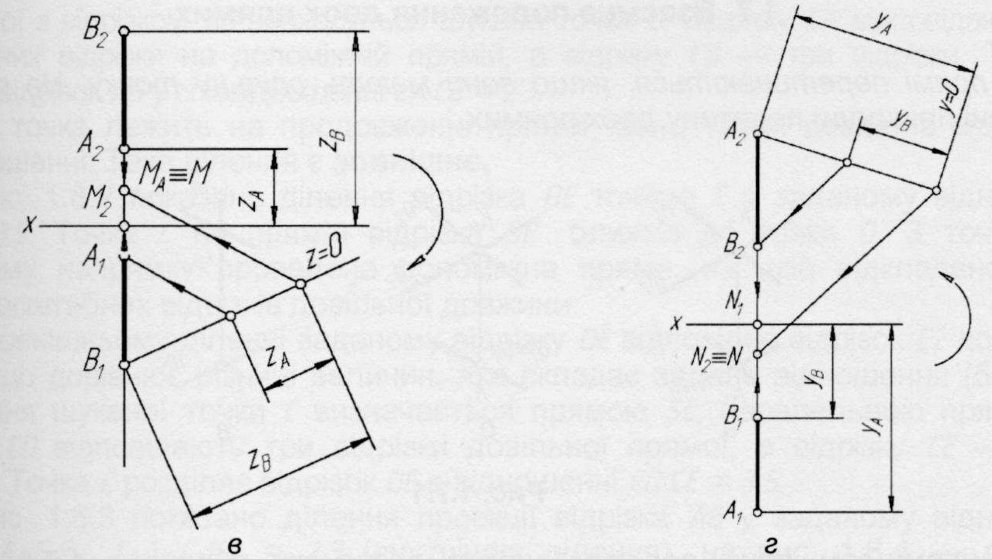


Рис. 1.5.4 (а, б)



в *г*

Рис. 1.5.4 (в,г)

1.6. Рівновіддалена від $П_1$ та $П_2$ точка на прямій загального положення

Якщо задана на $П_1$ та $П_2$ пряма загального положення *m*, то рівновіддалену (від названих площин) точку на цій прямій можна знайти, побудувавши проекцію *m* на $П_3$ (m_3) та бісекторну площину, яка проходить через вісь *Ox* і нахилена під кутом 45° до $П_1$ та $П_2$. Точка перетину заданої прямої з бісекторною площиною Σ і буде рівновіддаленою від $П_1$ та $П_2$ (рис. 1.6.1) — точка *A*.

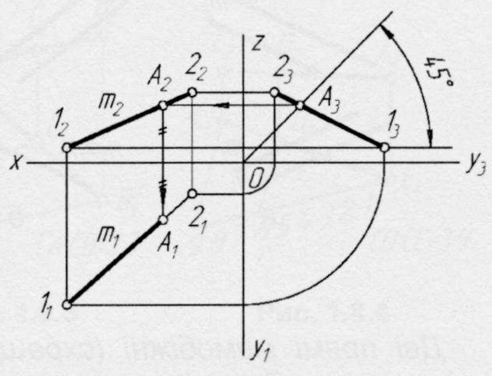
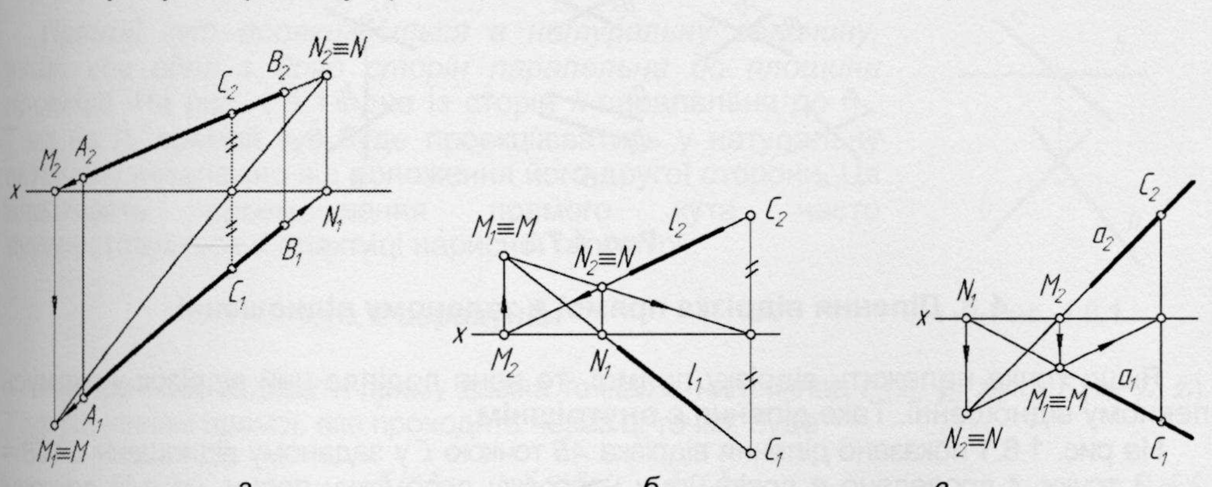


Рис. 1.6.1

Інший спосіб знаходження рівновіддаленої від $П_1$ та $П_2$ точки на прямій загального положення без побудови третьої проекції, запропонований автором, розглянуто далі (рис. 1.6.2, *а, б, в*). Знаходять горизонтальний (*M*) та фронтальний (*N*) сліди заданої прямої *AB* і з'єднують їх прямою *MN*. Тоді точка перетину прямої *MN* із віссю *Ox* указує координату *x* рівновіддаленої від $П_1$ та $П_2$ точки *C* на прямій *AB*.



а *б* *в*

Рис. 1.6.2

1.7. Взаємне положення двох прямих

Дві прямі перетинаються, якщо вони мають спільну точку. На рис. 1.7.1 наведені приклади перетину двох прямих.

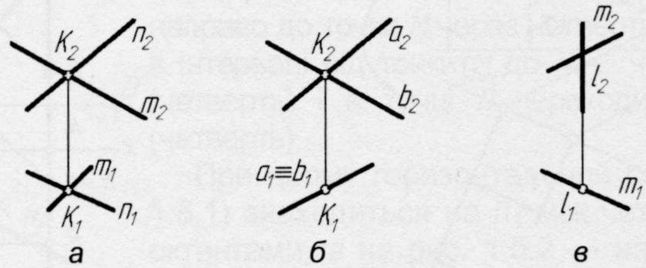


Рис. 1.7.1

При цьому саму точку перетину можуть позначати, як на рис. 1.7.1, *а* та *б*, а можуть і не позначати (рис. 1.7.1, *в*).

Дві прямі паралельні між собою, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються (рис. 1.7.2).

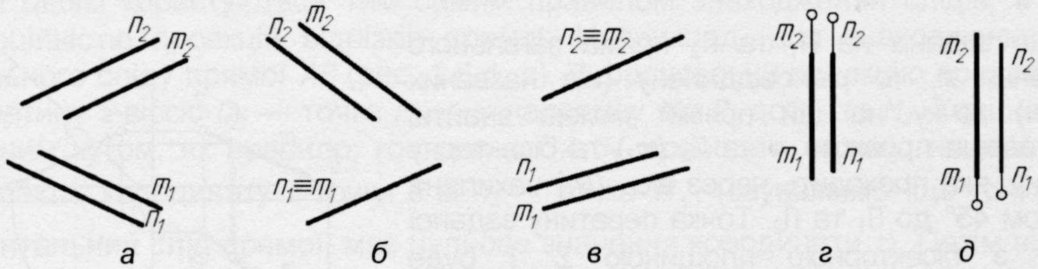


Рис. 1.7.2

Дві прямі мимобіжні (схрещувані), якщо вони не паралельні і не перетинаються, тобто не мають спільної точки (рис. 1.7.3). Можна ще сказати, що мимобіжні прямі лежать у паралельних площинах і не паралельні одна одній.

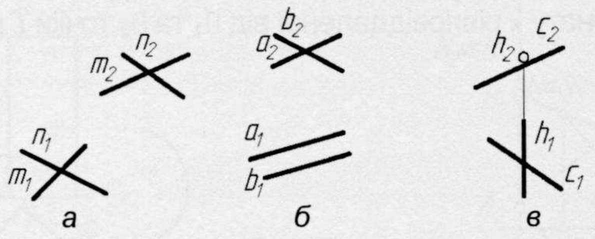


Рис. 1.7.3

1.8. Ділення відрізка прямої в заданому відношенні

Якщо точка належить відрізку прямої, то вона поділяє цей відрізок у якомусь певному відношенні. Таке ділення є **внутрішнім**.

На рис. 1.8.1 показано ділення відрізка *AB* точкою *C* у заданому відношенні $CA:CB = 2:3$. З точки *A* проведено в довільному напрямку допоміжну пряму, на якій показані 2+3=5 рівних масштабних відрізків будь-якої довжини, які визначають відрізок *A5*. Точки *5* і *B* з'єднані прямою. Через точку *2* проведена пряма паралельно *B5*, в перетині цієї прямої з відрізком AB знаходиться шукана точка C. Відрізку CA відповідають два масштабних відрізки на допоміжній прямій, а відрізку CB — три відрізки. Точка C розділяє відрізок AB у співвідношенні $CA{:}CB = 2{:}3$.

Якщо точка лежить на продовженні прямої, вона також розділяє відрізок у співвідношенні. Таке ділення є **зовнішнє.**

На рис. 1.8.2 показано ділення відрізка DE точкою C у заданому відношенні $CD{:}CE = 3{:}5$. Точка C на прямій відрізка DE ближча до точки D. З точки E в довільному напрямку проведена допоміжна пряма, на якій відкладено п'ять рівних масштабних відрізків довільної довжини.

При зовнішньому діленні заданому відрізку DE відповідає відрізок $E2$ довільної прямої, що дорівнює різниці величин, яка складає задане відношення (5—3=2). Положення шуканої точки C визначається прямою $5C$, паралельною прямій $2D$. Відрізку CD відповідають три відрізки довільної прямої, а відрізку CE — п'ять відрізків. Точка C розділяє відрізок DE в відношенні $CD{:}CE = 3{:}5$.

На рис. 1.8.3 показано ділення проекції відрізка AB у заданому відношенні $CA{:}CB$ ($C_1A_1{:}C_1B_1$; $C_2A_2{:}C_2B_2$) = $2{:}3$ (внутрішнє ділення), на рис. 1.8.4 — ділення проекції відрізка CE в заданому відношенні $CD{:}CE$ ($C_1D_1{:}C_1E_1$; $C_2D_2{:}C_2E_2$) = $3{:}9$ (зовнішнє ділення). Побудова ділення проекцій заданих відрізків AB і CE ґрунтується на властивості паралельного проекціювання, а саме: відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх проекцій.

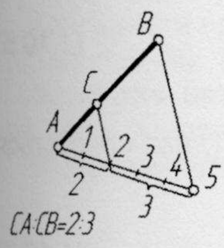


Рис. 1.8.1

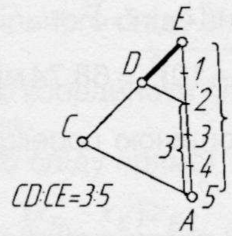


Рис. 1.8.2

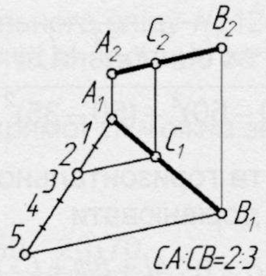


Рис. 1.8.3

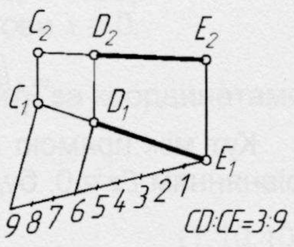


Рис. 1.8.4

Тому, щоб розділити відрізок прямої в заданому відношенні, треба розділити у тому самому відношенні проекції відрізка.

1.9. Проекціювання прямого кута

Прямий кут проекціюється в натуральну величину, якщо хоч одна з його сторін паралельна до площини проекцій. На рис. 1.9.1 одна із сторін h паралельна до Π_1. Тоді на Π_1 прямий кут буде проекціюватись у натуральну величину незалежно від положення його другої сторони. Ця властивість проекціювання прямого кута часто використовується в практиці нарисної геометрії.

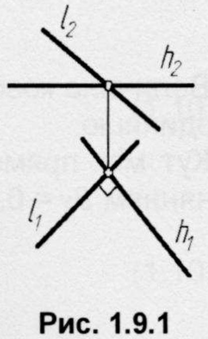


Рис. 1.9.1

1.10. Розрахунки

Найзручніше задавати пряму двома точками, наприклад E (x_E, y_E, z_E) та F (x_F, y_F, z_F). Тоді рівнянням прямої, яка проходить через ці точки, буде

$$\frac{x - x_E}{x_F - x_E} = \frac{y - y_E}{y_F - y_E} = \frac{z - z_E}{z_F - z_E}, \qquad (1.10.1)$$

або у параметричному вигляді:

$$x = t(x_F - x_E) + x_E = tl + x_E, \tag{1.10.2}$$

$$y = t(y_F - y_E) + y_E = tm + y_E, \tag{1.10.3}$$

$$z = t(z_F - z_E) + z_E = tn + z_E. \tag{1.10.4}$$

Приклад. Нехай E (20, 50, 70) і F (50, 35, 10). Тоді рівнянням прямої, яка проходить через ці точки, буде

$$\frac{x-20}{50-20} = \frac{y-50}{35-50} = \frac{z-70}{10-70}, \text{ або } \frac{x-20}{l} = \frac{y-50}{m} = \frac{z-70}{n}, \tag{1.10.1а}$$

де: $l = x_F — x_E = 50 — 20 = 30$; $m = y_F — y_E = —15$; $n = z_F — z_E = —60$,

або у параметричному вигляді:

$$x = t(50-20) + 20 = 30t + 20, \tag{1.10.2а}$$

$$y = t(35-50) + 50 = -15t + 50, \tag{1.10.3а}$$

$$z = t(10-70) + 70 = -60t + 70. \tag{1.10.4а}$$

Натуральна величина відрізка прямої EF буде дорівнювати

$$S = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 + (z_E - z_F)^2} = \\ = \sqrt{(20-50)^2 + (50-35)^2 + (70-10)^2} = 68{,}74\,\text{мм} \tag{1.10.5}$$

Кут між прямою EF та горизонтальною площиною проекцій Π_1, яка описується рівнянням $Cz = 0$, буде дорівнювати

$$\sin\alpha = \left| \frac{Al + Bm + C \cdot n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right| = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \tag{1.10.6}$$

де A, B, C — коефіцієнти рівняння загального вигляду площини $Ax + By + Cz + D = 0$;

$$\sin\alpha = \left| \frac{1(-60)}{\sqrt{1^2}\sqrt{30^2 + (-15)^2 + (-60)^2}} \right| = \frac{60}{68{,}7386} = 0{,}87287, \tag{1.10.7}$$

$$\text{або } \alpha = \arcsin 0{,}87287 = 60{,}79^\circ.$$

Величина коефіцієнта C у рівнянні площини Π_1 не має значення і тому вибрана за одиницю.

Кут між прямою EF та фронтальною площиною проекцій Π_2, яка описується рівнянням $By = 0$, буде дорівнювати

$$\sin\beta = \frac{|m|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{30^2 + (-15)^2 + (-60)^2}} = \\ = \frac{15}{68{,}7386} = 0{,}21822; \tag{1.10.8}$$

$$\beta = \arcsin 0{,}21822 = 12{,}60^\circ.$$

Кут між прямою EF та профільною площиною проекцій Π_3, яка описується рівнянням $Ax = 0$, буде

$$\sin\gamma = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \frac{30}{\sqrt{30^2+(-15)^2+(-60)^2}} = \tag{1.10.9}$$

$$= \frac{30}{68{,}7386} = 0{,}43644;$$

$$\gamma = \arcsin 0{,}43644 = 25{,}88^\circ.$$

Координати точки перетину прямої EF із горизонтальною площиною проекцій (горизонтальний слід прямої EF) знаходять за умови z = 0, і це значення підставляють у рівняння (1.10.4а). Отримують:

$$-60t + 70 = 0 \text{ , або } t = 1{,}16667.$$

Підставляють значення параметра t у вирази (1.10.2а) та (1.10.3а) і отримують координати x та y горизонтального сліду прямої:

$$x = 30 \cdot 1{,}1667 + 20 = 55\,;$$

$$y = -15 \cdot 1{,}16667 + 50 = 32{,}5\,.$$

Тобто горизонтальний слід прямої EF має координати M (55; 32,5; 0).

Фронтальний слід прямої EF знаходять за умови y = 0. Із виразу (1.10.3а) отримують t = 50/15 = 3,33333. Підставляють це значення у вирази (1.10.2а) та (1.10.4а) і отримують координати фронтального сліду N (120, 0, — 130).

Координати профільного сліду знаходять аналогічно за умови x = 0.

Тоді P (0, 60, 110).

За даними автора, координати слідів прямої EF можна знайти за координатами цих точок за виразами:

а) горизонтального сліду прямої

$$x_г = \frac{(x_F - x_E)z_E}{z_E - z_F} + x_E = \frac{(50-20)70}{70-10} + 20 = 55\,; \tag{1.10.10}$$

$$y_г = \frac{(y_F - y_E)z_E}{z_E - z_F} + y_E = \frac{(35-50)70}{70-10} + 50 = 32{,}5\,; \tag{1.10.11}$$

$$z_г = 0,$$

тобто M (55; 32,5; 0);

б) фронтального сліду прямої

$$x_ф = \frac{(x_F - x_E)\,y_E}{y_E - y_F} + x_E = \frac{(50-20)50}{50-35} + 20 = 120\,; \tag{1.10.12}$$

$$y_ф = 0\,,$$

$$z_ф = \frac{(z_F - z_E)\,y_E}{y_E - y_F} + z_E = \frac{(10-70)50}{50-35} + 70 = -130\,, \tag{1.10.13}$$

тобто N (120, 0, — 130),

в) профільного сліду прямої

$$x_п = 0;$$

$$y_п = \frac{(y_F - y_E)\,x_E}{x_E - x_F} + y_E = \frac{(35-50)20}{20-50} + 50 = 60\,; \tag{1.10.14}$$

$$z_п = \frac{(z_F - z_E)x_E}{x_E - x_F} + z_E = \frac{(10-70)20}{20-50} + 70 = 110, \quad (1.10.15)$$

тобто P (0, 60, 110).

Ці результати підтверджують отримані вище.

Кути нахилу прямої до площин проекцій Π_1, Π_2 та Π_3 відповідно простіше визначати за виразами:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{|z_F - z_E|}{\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}} = \mathrm{arctg}\frac{|10-70|}{\sqrt{(50-20)^2 + (35-50)^2}} = 60{,}79^\circ; \quad (1.10.16)$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{|y_F - y_E|}{\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (z_F - z_E)^2}} = \mathrm{arctg}\frac{|35-50|}{\sqrt{(50-20)^2 + (10-70)^2}} = 12{,}60^\circ; \quad (1.10.17)$$

$$\gamma = \mathrm{arctg}\frac{|x_F - x_E|}{\sqrt{(y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}} = \mathrm{arctg}\frac{|50-20|}{\sqrt{(75-50)^2 + (10-70)^2}} = 25{,}88^\circ, \quad (1.10.18)$$

де

$$\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = S_1, \quad (1.10.19)$$

$$\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (z_F - z_E)^2} = S_2, \quad (1.10.20)$$

$$\sqrt{(y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2} = S_3 \quad (1.10.21)$$

проекції відрізка прямої EF відповідно на Π_1, Π_2 та Π_3.

Або ще простіше відповідно:

$$\alpha = \arcsin\frac{|z_F - z_E|}{S} = \arcsin\frac{|10-70|}{68{,}74} = 60{,}79^\circ; \quad (1.10.22)$$

$$\beta = \arcsin\frac{|y_F - y_E|}{S} = \arcsin\frac{|35-50|}{68{,}74} = 12{,}60^\circ; \quad (1.10.23)$$

$$\gamma = \arcsin\frac{|x_F - x_E|}{S} = \arcsin\frac{|50-20|}{68{,}74} = 25{,}88^\circ, \quad (1.10.24)$$

де S — натуральна (дійсна) величина відрізка EF (див.рівняння (1.10.5)).

Напрямні косинуси прямої EF знаходять за виразами:

$$\sin\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{30}{\sqrt{30^2 + (-15)^2 + (-60)^2}} = \frac{30}{68{,}7386} = 0{,}436444; \quad (1.10.25)$$

$$\sin\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{15}{\sqrt{30^2+(-15)^2+(-60)^2}}=0{,}21822\,; \qquad (1.10.26)$$

$$\sin\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{60}{\sqrt{30^2+(-15)^2+(-60)^2}}=0{,}43644\,. \qquad (1.10.27)$$

Необхідною і достатньою умовою належності двох прямих, заданих їх канонічними рівняннями, до однієї площини (умова компланарності двох прямих) буде:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0\,. \qquad (1.10.28)$$

Умовою паралельності двох прямих є:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\,. \qquad (1.10.29)$$

Наприклад, необхідно записати рівняння прямої MN, паралельної до наведеної вище прямої EF. Нехай l_1/l_2 = 0,2 і l_2, m_2 та n_2 є параметрами прямої EF. Тоді $l_1=0{,}2l_2=0{,}2\cdot30=6$; $m_1=0{,}2m_2=0{,}2(-15)=-3$; $n_1=0{,}2n_2=0{,}2(-60)=-12$ і рівнянням прямої MN, паралельної до прямої EF, буде:

$$\frac{x-20}{6}=\frac{y-50}{-3}=\frac{z-70}{-12}\,. \qquad (1.10.1б)$$

Умовою перпендикулярності двох прямих буде:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\,. \qquad (1.10.30)$$

Для того, щоб написати рівняння прямої MN, перпендикулярної до EF, запишемо рівняння (1.10.30) із урахуванням коефіцієнтів l_2, m_2 та n_2:

$$30l_1-15m_1-60n_1=0\,, \qquad (1.10.30а)$$

звідки

$$l_1=0{,}5m_1+2n_1\,. \qquad (1.10.30б)$$

Якщо задати n_1 = 1, m_1 = 4, то із (1.10.30б) маємо l_1 = 4. Тоді рівнянням прямої MN, перпендикулярної до прямої EF, буде:

$$\frac{x-20}{4}=\frac{y-50}{4}=\frac{z-20}{1}\,. \qquad (1.10.1в)$$

Кут між двома прямими, що перетинаються, заданими їх канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ та } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\,,$$

можна визначити за виразом

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}\,. \qquad (1.10.31)$$

Наприклад, якщо прямі EF та GE перетинаються у точці E і l_1 = 20; m_1 = 30; n_1 = 10.

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{|20\cdot 30 + 30(-15) + 10(-60)|}{\sqrt{20^2+30^2+10^2}\sqrt{30^2+(-15)^2+(-60)^2}} = \frac{450}{2571{,}96} = 0{,}17496;$$

$$\varphi = \arccos(0{,}17496) = 79{,}9^\circ.$$

Нехай задані відповідними точками дві прямі *FE* та *NM*. Координати точок: *F* (100, 0, 70); *E* (10, 0, 10); *N* (70, 0, 15); *M* (25, 0, 90). Оскільки координати *y* всіх точок дорівнюють нулю, то прямі *FE* та *NM* належать Π_2 і правильність розв'язання легко перевірити за кресленням.

Необхідно знайти координати точки перетину цих прямих.

Для розв'язання задачі запишемо рівняння цих прямих:

- рівняння прямої *FE*

$$\frac{x-100}{10-100} = \frac{z-70}{10-70}, \tag{1.10.32}$$

або

$$-2x + 3z = 10; \tag{1.10.32а}$$

- рівняння прямої *NM*

$$\frac{x-70}{25-70} = \frac{z-15}{90-15}, \tag{1.10.33}$$

або

$$5x + 3z = 395. \tag{1.10.33а}$$

Для знаходження координат точки перетину цих прямих необхідно розв'язати систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} -2x + 3z = 10; \\ 5x + 3z = 395. \end{cases} \tag{1.10.34}$$

Тоді

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 395 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-1155}{-21} = 55.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 5 & 395 \end{vmatrix}}{-21} = 40.$$

Отже, координати точки перетину *K* прямих *FE* та *NM* будуть *K* (55, 0, 40).

1.11. Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

У табл. 1.11.1 задані номер варіанта та координати точки *A*.

Таблиця 1.11.1

№ варіанта	Координати точки *A*			№ варіанта	Координати точки *A*		
	x	*y*	*z*		*x*	*y*	*z*
1	10	15	0	5	— 25	0	— 10
2	80	10	20	6	65	15	30
3	45	— 70	5	7	40	— 10	0
4	0	40	45	8	— 10	60	0

Продовження табл.1.11.1

№ варіанта	Координати точки *A*			№ варіанта	Координати точки *A*		
	x	*y*	*z*		*x*	*y*	*z*
9	— 75	— 25	20	20	70	— 15	0
10	0	60	5	21	0	0	35
11	60	10	65	22	0	25	50
12	— 45	— 55	0	23	— 75	60	0
13	35	0	20	24	30	30	30
14	0	—10	25	25	25	— 5	5
15	0	0	15	26	60	— 10	10
16	0	22	0	27	45	55	0
17	15	40	— 30	28	— 10	— 15	— 40
18	25	0	0	29	0	— 10	— 25
19	— 40	60	10	30	— 15	0	— 15

1. В якій октанті знаходиться точка *A*?
2. Чи належить точка до однієї (двох) із площин проекцій? Якщо належить, то до якої (яких)?
3. Побудувати точку на епюрі і зазначити відстань її до осей *Ox*, *Oy* та *Oz*.
4. Найближче до якої з площин проекцій розташована точка?
5. Вказати відстань точки до площин проекцій $П_1$, $П_2$ та $П_3$.

У табл. 1.11.2 задані номер варіанта та координати точок *A* та *B*.

Таблиця 1.11.2

№ варіанта	Координати точок						№ варіанта	Координати точок					
	A			*B*				*A*			*B*		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*		*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	70	55	10	15	0	60	16	60	0	15	10	55	70
2	60	50	5	20	5	70	17	70	5	20	5	50	60
3	65	60	0	0	0	65	18	65	0	10	0	60	55
4	50	50	5	10	5	50	19	50	5	10	5	50	70
5	45	50	0	20	10	75	20	75	10	10	0	50	45
6	45	60	10	30	5	50	21	50	5	30	10	60	45
7	50	70	0	0	10	45	22	45	10	0	0	70	50
8	75	5	50	20	40	0	23	0	40	20	50	5	75
9	80	10	55	50	50	5	24	5	50	50	55	10	80
10	70	70	15	0	70	0	25	0	70	0	15	70	65
11	55	55	55	15	15	5	26	5	15	15	55	60	65
12	0	0	10	55	55	50	27	50	55	55	10	0	0
13	75	70	5	5	5	25	28	25	5	5	75	75	75
14	70	5	70	20	15	5	29	5	15	20	70	0	70
15	20	0	60	75	70	10	30	10	70	75	65	0	5

1. Побудувати пряму *AB*.
2. Знайти натуральну величину відрізка *AB*.
3. Визначити координати *x*, *y* та *z* горизонтального та фронтального слідів прямої *AB*.
4. Визначити кути нахилу прямої *AB* до $П_1$ та $П_2$.
5. Через які октанти проходить пряма *AB*?
6. На прямій *AB* визначити точку *C*, рівновіддалену від $П_1$ та $П_2$.

Зміст

Навчальне видання

Петро Павлович Загородній
Світлана Володимирівна Волевач

Нарисна геометрія.
Побудови та розрахунки

Редактор Т.І. Заболотна
Художнє оформлення Є.В. Чурія
Комп'ютерна верстка О.О. Воблікова

Підписано до друку 12.12.2013 р. Формат 70 × 100/16.
Папір офс. №1. Гарнітура Arial. Ум. друк. арк. 27,41.
Обл.-вид. арк. 29,5. Наклад 300 прим.
Вид. № 19/12. Зам. № 12-14

НУХТ 01601 Київ-33, вул. Володимирська, 68
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 1786 від 18.05.04 р.