УДК 519.711

Самсонов,В.В. ,Самсонов,В.В., Samsonov,V.
Сільвестров,А.М., Сильвестров,А.М., Silvestrov,A.

КОМПЛЕКСУВАННЯ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

В статті розглядаються питання обмеження вартості (зменшення часу) натурного експерименту за рахунок комплексування методів і моделей ідентифікації об'єкту при оцінюванні їх коефіцієнтів методами статистичного моделювання.

Ключові слова: методи ідентифікації, динамічні системи, ізоморфні моделі, не стаціонарність.

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В статье рассматриваются вопросы ограничения стоимости (уменьшение времени) натурного эксперимента за счет комплексирования методов и моделей идентификации объекта при оценке их коэффициентов методами статистического моделирования.

Ключевые слова: методы идентификации, динамические системы, изоморфные модели, стационарность.

INTEGRATION OF METHODS OF IDENTIFICATION

The article deals with the limiting value (recovery time) model experiment by integration of methods and models to identify the object in the assessment of their coefficients methods of statistical modeling.

Key words: methods of identification, dynamical systems are isomorphic model is not stationary.

Введення. Стійкість динамічних систем є однією з найбільш важливих характеристик, особливо, якщо вони нестаціонарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. До таких систем, зокрема, відносяться літак, зокрема його стійкість у поздовжньому короткоперіодичному русі [1]. Для малих відхилень змінних від режиму балансування (постійна висота, швидкість руху у вертикальній площині) цей рух описується щодо змінних (кута атаки, кутової швидкості і руля висоти) системою рівнянь першого порядку:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u, \\ \dot{x}_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ – похідні за часом від x_1 і x_2; β_{ij} $(i = 1,2; \quad j = 1,2,3)$ – аеродинамічні коефіцієнти.

Системі (1) еквівалентні передавальні функції, що відображають вхідний сигнал u у виходи x_{1M} або x_{2M}, наприклад u в x_{2M}:

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23} p - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22}) p + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})}. \tag{2}$$

Коефіцієнти $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$ і $\langle(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0\rangle$ знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості. Помноживши ці коефіцієнти на $J_{z_1} / qSb_a\beta_{11}$ (де J_{z_1} - момент інерції, q - швидкісний напір, S - площа крила, b_a - середня аеродинамічна хорда крила) отримаємо відповідний запас стійкості в частках від b_a. Коефіцієнти $\beta_{13}\beta_{23}$ визначають ефективність керма висоти; $\beta_{12}\beta_{22}$ - демпфіруючи сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів β_{ij} літальних апаратів (ЛА), за якими визначається стійкість і керованість ЛА, є актуальним завданням льотних випробувань (ЛВ).

Постановка завдання. Обмежені вартістю натурного експерименту і нестаціонарністю часу експерименту і нелінійністю - діапазон зміни змінних не дозволяють з досить високою точністю одержати оцінки $\hat{\beta}_{ij}\beta_{ij}$ з зашумленних перешкодами вимірювань $\hat{x}_i, \hat{u}$. З цих причин практика ЛВ обмежується досить наближеними оцінками стійкості і керованості ЛА [1]. Підвищити точність оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) без збільшення часу ЛВ можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апріорну інформацію про рознесеними спектрів сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), достатньо для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різниця відфільтрованого і вихідного сигналу, отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати m статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної x_i, u. Склавши ці реалізації з відповідними відфільтрованими сигналами, отримаємо m псевдовибірок даних ЛВ. Маючи в наявності m статистично ідентичних вибірок, p методів ідентифікації і q моделей ЛА, можна скористатися їх надмірністю з метою отримання більш точних оцінок АДК.

Методика дослідження. Стосовно до задачі визначення АДК ЛА в поздовжньому короткоперіодичному русі розглянемо три моделі $(q = 3)$: моделі (1), (2) і модель (3), що випливає з двох перших:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= (\beta_{11} + \beta_{22})\dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23}\dot{u} - \\ &- (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})u = -a_1\dot{x}_2 - a_0x_2 + a_2\dot{u} + a_3u. \end{aligned} \tag{3}$$

Число p методів визначення АДК визначається кількістю функціоналів близькості в просторі L_2 [2] змінних ЛА і його моделей (1), (2), (3). З умови мінімуму цих функціоналів визначаються оптимальні оцінки β АДК:

$$\left\{\beta_{ij}^*\right\} = \arg\min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{\hat{x}}_i - \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij}\hat{x}_j - \beta_{i3}\hat{U} \right\|^2, \tag{4}$$

де $i=1,2$; $j=1,2$; $\hat{\hat{x}}_i$, $\hat{x}_j$, $\hat{U}$ – згладжені фільтром змінні.

$$\left\{a_i^*\right\} = \arg\min_{a_i} \left\| x_2 - x_{2M} \right\|^2, \tag{5}$$

$$\left\{a_i^*\right\} = \arg\min_{a_i} \left\| \hat{\hat{x}}_2 + a_1\hat{\dot{x}}_2 + a_0\hat{x}_2 - a_2\hat{\dot{U}} - a_3 U \right\|^2. \tag{6}$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим же фільтром, щоб не внести методичну помилку в лінійні рівняння (1), (3) ЛА. Можливо також застосування інших методів ідентифікації [3], що дають незміщене оцінки АДК в умовах перешкод.

Далі, для кожного з алгоритмів (4), (5), (6) на множині із m реалізацій, для кожної реалізації визначаються оптимальні значення $\left\{\beta_{ij}^*\right\}$, $\left\{a_i^*\right\}$, їх середні значення за m реалізаціям $\left\{\overline{\beta}_{ij}^*\right\}$, $\left\{\overline{a}_i^*\right\}$, оцінки власних $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)}$, і взаємних $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)a_i^*(l)}$, дисперсій, де $k=1,2,3$; $p=3$; $l=1,2,3$; $k \neq l$. Для стислості запису елементи множин $\left\{\beta_{ij}\right\}$, $\left\{a_i\right\}$, позначимо через $\left\{\alpha_i\right\}$. Тоді будемо шукати найкращу на множині з трьох методів - моделей оцінку α_i^* у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^{3} C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^{3} C_k = 1. \tag{7}$$

Коефіцієнти C_k визначимо з умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \; \frac{\partial \hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*}}{\partial C_k} = 0, \quad k = 2,3, \tag{8}$$

де $\partial\hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*} = \dfrac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{3} C_k\left(\alpha_i(k,j) - \overline{\alpha}_i(k,j)\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} C_k^2 \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} + \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{3} C_k C_l \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = C^T A C.$

Для стислості позначимо $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} = \hat{\sigma}^2_k$, $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = \hat{\sigma}^2_{kl}$, тоді $C^T = \left[C_2, C_3\right]$,

$$A = \begin{bmatrix} \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2\right) & \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2\right) \\ \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2\right) & \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\hat{\sigma}_{13}^2\right) \end{bmatrix}.$$

Умова (8) еквівалентна системі

$$AC = B, \tag{9}$$

де

$$B=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_1^2-\hat{\sigma}_{12}^2\\ \hat{\sigma}_1^2-\hat{\sigma}_{13}^2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}C_2\\ C_3\end{bmatrix}.$$

Рішення $C=A^{-1}B$ системи (9) єдино, якщо матриця A позитивно визначена. Чим менше корельовани похибки в оцінюванні α_i різними методами (4), (5), (6), тим ближче матриця A до діагональної. Так як норми близькості (4), (5), (6) взяті в просторі змінних x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, то можна чекати слабку кореляцію в погрішності оцінок α_i різними методами - моделями (4), (5), (6). Підставивши знайдені з системи (9) оптимальні значення C_2, C_3, а також $C_1=1-C_2-C_3$, в рівняння (7), отримаємо оптимально зважену оцінку α_i^* коефіцієнта α_i (за умови гарної обумовленості матриці A і невеликий похибки оцінок $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, дисперсій σ_i^2, σ_{ij}^2. В іншому випадку для гарантії не погіршення результату зважування оцінок α_i слід скористатися мінімаксним підходом. Оцінки $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, обчислені за m згенерованими вибірками даних, мають похибки с χ^2 - розподілом, якщо припустити, що похибки оцінок $\alpha_i(k)$ розподілені за нормальним законом. Істинні значення σ_i^2, σ_{ij}^2 для заданого рівня достовірності знаходяться в інтервалі $(1\pm\gamma)^{-1}\hat{\sigma}_i^2$, $(1\pm\gamma)^{-1}\hat{\sigma}_{ij}^2$, або приблизно $(1\pm\gamma)^{-1}\sigma_i^2$, $(1\pm\gamma)^{-1}\sigma_{ij}^2$, де γ - квантиль $\chi^2(p,m)$ розподілу, $\gamma<<1$.

Нехай $\sigma_i^2=\hat{\sigma}_i^2(1+\gamma)$, для $i\in I=\left\{\overline{1,n_1}\right\}$, $\sigma_j^2=\hat{\sigma}_j^2(1+\gamma)$, для $j\in J=\left\{\overline{n_1+1,n}\right\}$. Тоді $\sigma_{ij}^2=\hat{\sigma}_{ij}^2(1+\gamma)$, для $i,j\in I$; $\sigma_{ij}^2=\hat{\sigma}_{ij}^2(1-\gamma)$, для $i,j\in J$; $\sigma_{ij}^2=\hat{\sigma}_{ij}^2\sqrt{(1-\gamma^2)}$, для $i\in I, j\in J$ або $i\in J, j\in I$. Оцінка дисперсії зваженої оцінки α_r^* r-го АДК:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2&=\sum_{i\in I}C_i^2\hat{\sigma}_i^2(1+\gamma)+\sum_{j\in J}C_i^2\hat{\sigma}_i^2(1-\gamma)+\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\in I}}C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2(1+\gamma)+\\&+\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\in J}}C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2(1-\gamma)+\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2\sqrt{(1-\gamma^2)}+\sum_{\substack{i\in J\\ j\in I}}C_iC_j\hat{\sigma}_{ij}^2\sqrt{(1-\gamma^2)}.\end{aligned}\tag{10}$$

Вираз (10) береться L раз для всіх можливих комбінацій $\hat{\sigma}_{ij}^2(1\pm\gamma)$, $i=\overline{1,3}$. Для кожного j-го поєднання з умови (8) отримуємо систему, аналогічну (9), вирішуючи яку, знаходимо оптимальний ξ-й вектор $C^*(\xi)$:

$$C^*(\xi)=\left[C_1^*(\xi),C_2^*(\xi),C_3^*(\xi)\right]^T,\ \xi=\overline{1,L}\tag{11}$$

і обчислюємо все $\sigma_{\alpha_r^*}^2\left(S,C^*(\xi)\right)$, $\xi=\overline{1,L}$; $S=\overline{1,L}$.

Мінімаксна оцінка C^* визначається із умови

$$C^*=\arg\min_{\xi\in\{1,L\},S\in\{1,L\}}\max\sigma_{\alpha_r^*}^2\left(S,C^*(\xi)\right).\tag{12}$$

Тобто кожен вектор (11) підставляють в кожний варіант дисперсії (10) і як C^* приймається той, найбільше значення якого по всіх варіантів (10) мінімально серед найбільших значень інших векторів (11).

Приклад. Для наочності розглянемо двовимірний випадок ($p=2$). Нехай $\sigma_1^2=1$, $\sigma_2^2=9$; $\sigma_{12}^2=2,8$, $\gamma=0,1$. Можливі поєднання наведено в табл. 1:

Таблиця 1. Множники можливих відхилень оцінок дисперсій

№ варіанту	Множники для		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}^2
1	$1+\gamma$	$1+\gamma$	$1+\gamma$
2	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
3	$1+\gamma$	$1-\gamma$	$\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)}$
4	$1-\gamma$	$1+\gamma$	$\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)}$

Оцінка (7):

$$\alpha_i^*=C\alpha_i(1)+(1-C)\alpha_i(2). \tag{13}$$

Дисперсія (10):

$$\sigma_{\alpha_r^*}^2=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}^2\right)C^2+2\left(\sigma_{12}^2-\sigma_1^2\right)C+\sigma_2^2. \tag{14}$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки з табл. 1 і виконавши операції (8), (9), отримаємо набір (11) для 4 варіантів (14):

$$C^*(1)=C^*(2)=\frac{\hat\sigma_1^2-\hat\sigma_{12}^2}{\hat\sigma_1^2+\hat\sigma_2^2-2\hat\sigma_{12}^2}=1,41;$$

$$C^*(3)=\frac{\hat\sigma_2^2\left(1-\gamma\right)-\hat\sigma_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat\sigma_1^2\left(1+\gamma\right)+\hat\sigma_2^2\left(1-\gamma\right)-2\hat\sigma_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}=1,465;$$

$$C^*(4)=\frac{\hat\sigma_2^2\left(1+\gamma\right)-\hat\sigma_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat\sigma_1^2\left(1-\gamma\right)+\hat\sigma_2^2\left(1+\gamma\right)-2\hat\sigma_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}=1,361.$$

Значення $\sigma_{\alpha_r^*}^2\left(S,C^*(\xi)\right)$ зведено в табл. 2.

Таблиця 2. Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r^*}^2\left(S,C^*(\xi)\right)$				
S	**1**	**2**	**3**	**4**

ξ				
1	0,290	0,290	0,304	0,300
2	0,236	0,236	0,249	0,245
3	0,327	0,327	0.316	0,354
4	0,232	0,232	0,275	0,218

У табл. 2 жирною рамкою виділені варіанти с $\max \sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S, C^*(\xi)\right)$, подвійною рамкою - з двома $\min\limits_{\xi\in\{1,4\}, S\in\{1,4\}} \max \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*} = \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(3, C^*(3)\right)$= 0,316, з її аргументом C^*= 1,465, $\left(1-C^*\right)$= – 0,465. Якщо взяти $\sigma_1^2=1$; $\sigma_2^2=9$; $\sigma_{12}^2=2,8$; $\gamma=0,1$, то $C^*(1)=C^*(2)=0,756$; $C^*(3)=0,737$; $C^*(4)=0,737$. Таблиця 3, подібна до табл. 2:

Таблиця 3. Оптимальні значення дисперсій.

$\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S, C^*(\xi)\right)$				
S / ξ	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,081	0,081	0,089	0,087
2	0,067	0,067	0,073	0,071
3	0,082	0,082	0,078	0,099
4	0,076	0,076	0,094	0,070

Відповідно $\min\limits_{\xi\in\{1,4\}, S\in\{1,4\}} \max \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*} = \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(S, C^*(\xi)\right) = 0,082$, C^*= 0,756, $\left(1-C^*\right)$ = 0,244. Якщо припустити, що $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, то для різних значень коефіцієнта кореляції $r_{12} = \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}$ та співвідношення $F_{12} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ одержимо сімейство графіків $C^*(r_{12}, F)$ (рис. 1).

Для, $F_{12}=1$, $C^*=0,5$ для будь-яких r_{12}; при $F_{12}\to\infty$, $C^*\to 1$, $\left(1-C^*\right)\to 0$, тобто неефективний метод виключається. Характерно, що при однакових $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \left|\sigma_{12}^2\right|$ величина $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}$ залежить від знаку σ_{12}^2 (0,316 для позитивної і 0,082 - для негативної). Тобто зважування двох методів з негативною σ_{12}^2 дає кращий результат. У даному прикладі для σ_{12}^2= 0 дисперсія $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}$= 0,9. Це набагато більше мінімаксних значень дисперсій при $\sigma_{12}^2=\pm 2,8$ (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксної оцінки.

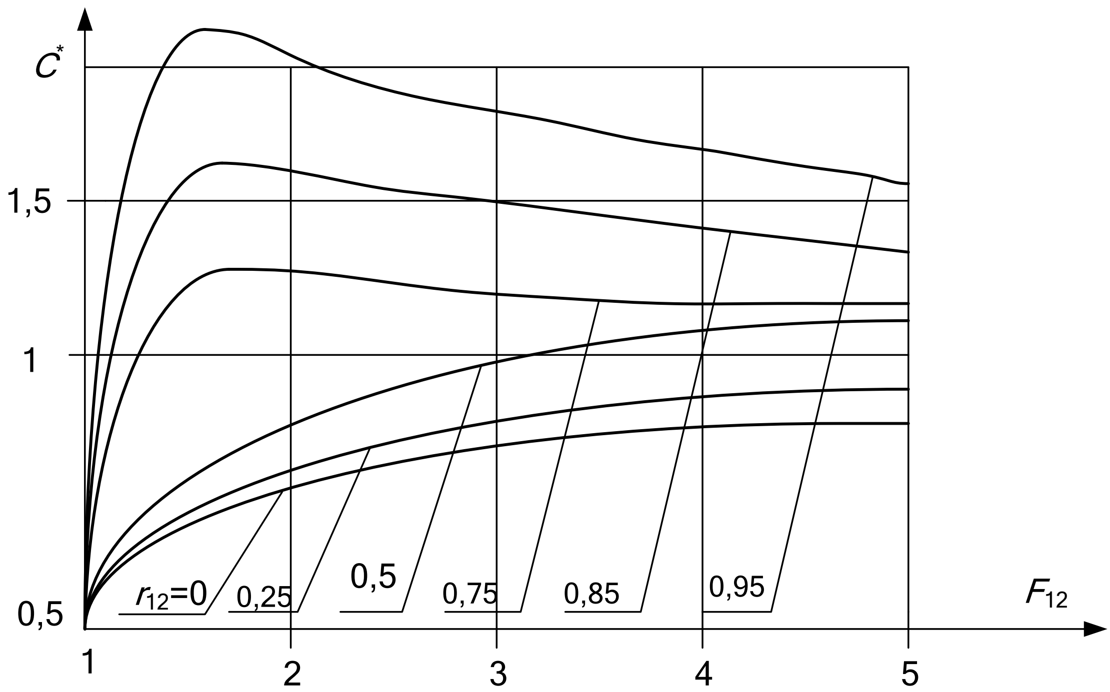

Рис. 1. Залежність оптимальної ваги C* від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

Висновки. Таким чином, використовуючи кілька ізоморфніх моделей об'єкта ідентифікації і кілька різних методів їх параметричного оцінювання спільно з технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів АДК ЛА без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань. Тим більше, що з огляду на нестаціонарність об'єкта ідентифікації, вибірки не можуть бути як завгодно великими. Як забезпечити незміщене оцінок α_r^* через неврахування реально існуючої нелінійності, розглянуто в роботі [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. *Снешко Ю. И.* Устойчивость и управляемость самолета. М.: Машиностроение, 1987, – 300 с.
2. *Корн Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн М.: Наука, 1970, – 832 с.
3. *Сильвестров А. Н.* Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев М.: Энергоатомиздат, 1987, – 200 с.
4. *Сильвестров А. Н.* Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов // Проблемы управления и информатики, №6, 1996, С. 54 – 65.