

2

УДК 517.537.72

ОЦІНКИ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.М.Мулява, Я.Я.ПРИТУЛА

Mul'ava O.M., Prytula Ya.Ya. Estimates of maximum modulus of an entire Dirichlet series. Let $S(\Lambda)$ be a class of entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, $s = \sigma + it$, where $\Lambda = (\lambda_n) > 0 \uparrow +\infty$. For $F \in S(\Lambda)$ let $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ be the maximal term.

By Ω we denote a class of positive unbounded on $(-\infty, +\infty)$ functions Φ such that the derivative Φ' is a continuous positive and growing to $+\infty$ on $(-\infty, +\infty)$ function. For $\Phi \in \Omega$ via $S(\Lambda, \Phi)$ we denote a subclass of entire Dirichlet series such that $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

In the class $S(\Lambda, \Phi)$ it is shown necessary and sufficient condition on Λ for fulfilling the correlation $M(\sigma, F) \leq \mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta}, F\right)^{1-\beta}$, $\beta \in (0, 1)$ for all $\sigma \geq \sigma_0$.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda)$ — клас цілих (абсолютно збіжних в \mathbb{C}) рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it. \quad (1)$$

Серед коефіцієнтів a_n ряду (1) можуть зустрічатись рівні нулеві, але вважаємо, що цей ряд не зводиться до експоненціального многочлена.

Для $F \in S(\Lambda)$ нехай $M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ — максимальний член ряду (1). Добре відомо [1, с. 182; 2, с. 21], що $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху залежать від щільності показників λ_n ряду (1). Ще в 1924 році Ж.Валірон [3] (див. також [1, с. 184] і [2, с. 32]) показав, що якщо $\ln n \leq (\tau + o(1))\lambda_n$ ($n \rightarrow \infty$), то

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma + \tau + o(1), F), \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Цей результат уточнено в [4], де доведена така

Теорема А. Нехай $\tau \in [0, +\infty)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ справджувалось співвідношення (2), необхідно і досить, щоб $\ln n \leq (\tau + o(1))\lambda_n$ ($n \rightarrow \infty$).

З цієї теореми випливає, що якщо $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то для кожної сталої $A > 1$ і всіх досить великих σ справедлива нерівність $M(\sigma) \leq \mu(A\sigma)$. Виникає питання, чи існує послідовність Λ , $\ln n \neq O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, і стала $A > 1$ такі, що $M(\sigma, F) \leq \mu(A\sigma, F)$, $\sigma \geq \sigma_0$, для кожної $F \in S(\Lambda)$. Негативна відповідь на це питання міститься в наступній теоремі.

Теорема Б [4]. Для кожних послідовності Λ такої, що $\ln n \neq O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, і сталої $A \in (1, +\infty)$ існують функція $F \in S(\Lambda)$ і послідовність $(\sigma_j) \uparrow +\infty$ такі, що $M(\sigma_j, F) \geq \mu(A\sigma_j, F)$ для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Проте в певних підкласах функцій із $S(\Lambda)$, які визначаються обмеженням на зростання $\mu(\sigma)$ (чи спаданням коефіцієнтів), можна вказати умову на Λ , при виконанні якої існує стала A така, що $M(\sigma, F) \leq \mu(A\sigma, F)$, $\sigma \geq \sigma_0$, для кожної функції F з даного підкласу.

Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Нехай φ — обернена до Φ' функція, а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5; 2, с. 17] функція Ψ неперервна на $(-\infty, +\infty)$ і зростає до $+\infty$.

Для $\Phi \in \Omega$ через $S(\Lambda, \Phi)$ позначимо підклас цілих рядів Діріхле (1) таких, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Справедлива така

Теорема 1. Нехай $\Phi \in \Omega$ і $\beta \in [0, 1)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, \Phi)$ виконувалась нерівність

$$M(\sigma, F) \leq \mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta-\varepsilon}, F\right)^{1-\beta-\varepsilon} \quad (3)$$

для кожного $\varepsilon \in (0, 1-\beta)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$, необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} \leq \beta. \quad (4)$$

Оцінку (3) ми отримаємо із загальнішої нерівності, яка в дещо іншому вигляді є тільки в [6] і уточнює відповідні результати з [7] і [2, с. 21].

Через L позначимо клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцій, а для $q \in L$ покладемо

$$p(\sigma) = \sup \left\{ \frac{\sigma - t}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(t)} : -\infty \leq t < \sigma \right\}.$$

Лема 1. Якщо $q \in L$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n q \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right\} = K_0 < +\infty, \quad (5)$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$

$$M(\sigma) \leq K_0 \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)} + K_0 + |a_0|. \quad (6)$$

Доведення. Покладемо $r_n = \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}$, $n \geq 1$. Оскільки ряд (1) збігається абсолютно в \mathbb{C} , то $r_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Зрозуміло також, що

$$M(\sigma, F) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} = |a_0| + \left(\sum_{r_n < q^{-1}(\sigma)} + \sum_{r_n \geq q^{-1}(\sigma)} \right) |a_n| e^{\sigma \lambda_n}. \quad (7)$$

Якщо $r_n < q^{-1}(\sigma)$, то

$$\begin{aligned} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} &= |a_n|^{1-p(\sigma)} \left(|a_n| e^{\lambda_n q^{-1}(\sigma)} \right)^{p(\sigma)} e^{(\sigma - p(\sigma)q^{-1}(\sigma))\lambda_n} \leq \\ &\leq \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n \left(\sigma - \frac{\sigma - q(r_n)}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(q(r_n))} (q^{-1}(\sigma) - r_n) \right) \right\} \\ &= \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)} |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\}, \end{aligned}$$

а якщо $r_n \geq q^{-1}(\sigma)$, то $|a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} \leq |a_n| \exp\{\lambda_n q(r_n)\}$. Тому з (7), завдяки (5), випливає нерівність (6).

Лема 2. Нехай $\gamma > 0$ і $\delta = A(\gamma - 1)$ — довільні числа. Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n} = h(\gamma, \delta) > 1, \quad (8)$$

то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$M(\sigma) \leq K \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right)^\gamma, \quad K \equiv \text{const}. \quad (9)$$

Доведення. Виберемо функцію $q(x) = \gamma x - \delta$. Тоді умова (5) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-((\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n)\} \leq K_0 < \infty,$$

якщо зрозуміло, виконується, якщо виконується умова (8). Тому за лемою 1 справедлива оцінка (6) з $q(x) = \gamma x - \delta$. Але $q^{-1}(\sigma) = \frac{\sigma + \delta}{\gamma}$, $p(\sigma) = \gamma$, і тому з (8) маємо

$$M(\sigma) \leq K_0 \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right)^\gamma + K_0 + |a_0| \leq K \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}, F \right)^\gamma, \quad K = 2K_0 + |a_0|.$$

Лема 2 доведена.

Припустимо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln |a_n|} \leq \beta < 1, \quad (10)$$

виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - \beta - \varepsilon/2$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(\beta + \varepsilon/2) \ln |a_n|}{\ln n} \geq \frac{\beta + \varepsilon/2}{\beta} > 1,$$

і за лемою 2

$$M(\sigma, F) \leq K \mu \left(\frac{\sigma}{1 - \beta - \varepsilon/2}, F \right)^{1 - \beta - \varepsilon/2}, \quad K = K(\varepsilon) \equiv \text{const} > 0.$$

В [5; 2, с. 18] показано, що якщо $\Phi \in \Omega$, то для того щоб $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх n . Тому, якщо $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ і виконується умова (4), то виконується і умова (10), т справедлива нерівність (11).

Нерівність (5) легко випливає з (11), оскільки, з огляду на рівність

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt, \quad \sigma > \sigma_0,$$

де $\nu(\sigma)$ — центральний індекс ряду (1), для будь-якого $\delta > 0$ виконується

$$\begin{aligned} & \ln \mu((1 + \delta)\sigma, F) - (1 + \delta) \ln \mu(\sigma, F) = \\ & = \int_{\sigma}^{(1 + \delta)\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt - \delta \ln \mu(\sigma, F) \geq \delta \sigma \lambda_{\nu(\sigma)} - \delta (\ln |a_{\nu(\sigma)}| + \sigma \lambda_{\nu(\sigma)}) = \\ & = \delta \ln \frac{1}{|a_{\nu(\sigma)}|} \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Достатність умови (4) в теоремі 1 доведена.

Для доведення її необхідності нам буде потрібна наступна

Лема 3. *Нехай γ — додатна, неперервна і неспадна на $[0, \infty)$ функція, а*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} > 1,$$

Тоді існує зростаюча підпослідовність (λ_k^) послідовності λ така, що*

$$\ln k \leq \lambda_k^* \gamma(\lambda_k^*) + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad ($$

і

$$\ln k_j \geq \lambda_{k_j}^* \gamma(\lambda_{k_j}^*) \quad ($$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Доведення. З умови (12) випливає існування числа

$$k_1 = \min\{k \geq 2 : \ln k \geq \lambda_k \gamma(\lambda_k)\}.$$

Ясно, що $\ln k < \lambda_k \gamma(\lambda_k)$ при $1 \leq k < k_1$, $\ln k_1 \geq \lambda_{k_1} \gamma(\lambda_{k_1})$ і

$$\ln k_1 = \ln(k_1 - 1) + \ln \left(1 + \frac{1}{k_1 - 1} \right) \leq \lambda_{k_1 - 1} \gamma(\lambda_{k_1 - 1}) + 1 < \lambda_{k_1} \gamma(\lambda_{k_1}) + 1.$$

Отже, якщо покладемо $\lambda_k^* = \lambda_k$ для $1 \leq k \leq k_1$, то для таких k мають місце нерівності (13) і (14).

Покладемо тепер

$$j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_1 + 1) < \lambda_{k_1+j} \gamma(\lambda_{k_1+j})\}$$

і з послідовності Λ викинемо числа $\lambda_{k_1+1}, \dots, \lambda_{k_1+j_1}$, тобто покладемо $\lambda_{k_1+1}^* = \lambda_{k_1+j_1+1}$.
Завдяки (12), існує

$$k_2 = \min\{k \geq k_1 + 2 : \ln k \geq \lambda_{k+j_1} \gamma(\lambda_{k+j_1})\}.$$

Тоді $\ln k < \lambda_{k+j_1} \gamma(\lambda_{k+j_1})$ при $k_1 + 1 \leq k < k_2$, $\ln k_2 \geq \lambda_{k_2+j_1} \gamma(\lambda_{k_2+j_1})$ і $\ln k_2 \leq \ln(k_2 - 1) + 1 \leq \lambda_{k_2+j_1} \gamma(\lambda_{k_2+j_1}) + 1$. Тому, якщо покладемо $\lambda_k^* = \lambda_{k+j_1}$ для $k_1 + 1 \leq k \leq k_2$, то для таких k також виконуються нерівності (13) і (14).

Якщо k_l і j_{l-1} , $l \geq 2$ вже вибрані, то покладемо

$$j_l = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_l + 1) < \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1} \gamma(\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1})\}$$

і з послідовності Λ викинемо члени $\lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+1}, \dots, \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_{l-1}+j_l}$, тобто покладемо $\lambda_{k_l+1}^* = \lambda_{k_l+j_1+\dots+j_l+1}$. З огляду на (12), існує

$$k_{l+1} = \min\{k \geq k_l + 2 : \ln k \geq \lambda_{k+j_1+\dots+j_l} \gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l})\}.$$

Тоді

$$\ln k < \lambda_{k+j_1+\dots+j_l} \gamma(\lambda_{k+j_1+\dots+j_l}), \quad k_l + 1 \leq k < k_{l+1},$$

і, як вище

$$\begin{aligned} \lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l} \gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}) &\leq \ln k_{l+1} \leq \\ &\leq \lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l} \gamma(\lambda_{k_{l+1}+j_1+\dots+j_l}) + 1. \end{aligned}$$

Тому, якщо покладемо $\lambda_k^* = \lambda_{k+j_1+\dots+j_l}$, $k_l + 1 \leq k \leq k_{l+1}$, то для таких k знову маємо (13) і (14). Лема 3 доведена.

Доведемо необхідності умови (4) в теоремі 1. Припустимо, що вона не виконується, тобто,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} = B > \beta.$$

Покладемо $\gamma = b\Psi(\varphi(x))$, $\beta < b < \min\{1, B\}$. Тоді виконується (14), і за лемою 1 існує підпослідовність (λ_k^*) , для якої виконуються нерівності (13) і (14). Покладемо, далі, $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^* = \exp\{-\lambda_k^* \Psi(\varphi(\lambda_k^*))\}$ при $\lambda_n = \lambda_k^*$. Так ми прийдемо до ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k \Psi(\varphi(\lambda_k)) + s\lambda_k\}, \quad (15)$$

де для простоти $\lambda_k = \lambda_k^*$. Оскільки $b \in (0, 1)$ і виконується (13) з $\gamma(x) = b\Psi(\varphi(x))$, то ряд (15) є цілим. Для цього ряду з критерію, наведеного при доведенні достатності впливає, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Далі, якщо виберемо $q_j = \left\lfloor \frac{1}{2} k_j \right\rfloor$, то з (13) і (14) маємо

$$b\lambda_{q_j} \Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) \geq \ln q_j - 1 \geq \ln k_j - 4 \geq b\lambda_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) - 4.$$

Тому для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) &\geq \sum_{q_j \leq k \leq k_j} \exp\{-\ln a_k + \sigma \lambda_k\} \geq \frac{1}{2} k_j \exp\{-\lambda_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda_{k_j})) + \sigma \lambda_{q_j}\} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\{-\lambda_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda_{k_j}))(1-b) + \sigma \lambda_{q_j}\} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\left\{-(1-b)\lambda_{q_j} \Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \sigma \lambda_{q_j} - \frac{4(1-b)}{b}\right\} = \\ &= K_1 \left(\exp\left\{-\lambda_{q_j} \Psi(\varphi(\lambda_{q_j})) + \frac{\sigma}{1-b} \lambda_{q_j}\right\} \right)^{1-b}, \quad K_1 = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{4(1-b)}{b}\right\} \end{aligned}$$

Якщо виберемо $\sigma_j = (1-b)\varphi(\lambda_{q_j})$, то звідси матимемо

$$\begin{aligned} M(\sigma_j, F) &\geq K_1 (\exp\{\Phi(\varphi(\lambda_{q_j}))\})^{1-b} = \\ &= K_1 \left(\exp\left\{\Phi\left(\frac{\sigma_j}{1-b}\right)\right\} \right)^{1-b} \geq K_1 \mu \left(\frac{\sigma_j}{1-b}, F \right)^{1-b} \end{aligned}$$

Оскільки $b > \beta$, то, як при доведенні достатності, звідси отримуємо, що для ф. (15) нерівність (3) не виконується. Теорема 1 повністю доведена.

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. - М.: Наука. - 1976. - 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. - К.: ІСДО. - 1993. - 168 с.
3. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet* // Bull. Soc. Math de Fr - 1924. - Vol. 52. - P. 86-98.
4. Притула Я.Я. *Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // В. Львівського ун-ту "Питання алгебри та мат. фізики". - 1995. - Вып. 43. - С. 25-
5. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* // Теория функц. анализ и их прилож. - 1990. - Вып. 54. - С. 16-25.
6. Шеремета М.М., Притула Я.Я., Фединяк С.І. *Зростання рядів Діріхле* - Львів. - 30 с. - Препринт N 18-95. - Наук.-учб. центр мат. моделювання ІППММ ім. Підстригача НАН України.
7. Винницький Б.В. *О росте целых функций, заданных рядами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ // Укр. тем. журн. - 1979. - Т. 31, N 5. - С. 534-540.

Стаття надійшла до редколегії 20.09..