

УДК 517.95

Про нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$

А. БАРАННИК^{†1}, **Ю. МОСКАЛЕНКО**^{†2}, **І. ЮРИК**^{†3}

^{†1} Педагогічний університет, Слупськ, Польща

^{†2} Педагогічний університет, Полтава

^{†3} Український державний університет харчових технологій, Київ

Побудовано нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера в просторі $\mathbb{R}_{2,2}$, які містять довільні функції.

New classes of solutions with arbitrary functions for nonlinear d'Alembert equation in space $\mathbb{R}_{2,2}$ are constructed.

Розглянемо нелінійне рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$

$$\square u + \lambda u^k = 0, \quad (1)$$

де $\square u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Рівняння (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(2, 2)$ [1], яка реалізується такими операторами:

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha \partial_\alpha + \frac{2u}{k-1} \partial_u,$$

де $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3, 4$. В [2, 3] з використанням підалгебр рангу 3 алгебри $A\tilde{P}(2, 2)$ побудовано симетрійні анзаци, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь. За розв'язками редукованих рівнянь знайдені деякі багатопараметричні класи точних розв'язків рівняння (1). Методом, запропонованим в [4–6], в роботі [7] побудовано більш загальні класи точних розв'язків рівняння (1), що містять довільні функції.

Метою даної статті є побудова нових широких класів точних розв'язків рівняння Даламбера, що містять довільні функції. Розглянемо симетричний анзац $u = u(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, де $\omega_1 = x_1 - x_4$, $\omega_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $\omega_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)^{-1}$. Анзац редукує рівняння (1) до двовимірного рівняння

$$4\omega_1 u_{12} + 4\omega_2 u_{22} + 8u_2 + \lambda u^k = 0. \quad (2)$$

Дослідимо симетрію рівняння (2).

Теорема 1. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння (2) при $k \neq 2$ є нескінченновимірною алгебра Лі $A_\infty(4)$, яка породжується операторами $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \beta M$, де*

$$X_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{1}{k-1} u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$X_2 = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{1}{k-1} u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$M = \omega_1^{k-1} \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — довільні гладкі функції від змінної ω_3 .

Відзначимо, що X_1, X_2 і X_3 є операторами алгебри інваріантності рівняння (1), але записаними в нових змінних. Оператор M не є оператором симетрії рівняння (1).

Теорема 2. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння (2) при $k = 2$ є нескінченновимірною алгебра Лі $B_\infty(4)$, яка породжується операторами $\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 + \beta S$, де*

$$Z_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_3 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$Z_2 = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$S = \omega_1 \ln \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \ln \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - (\ln \omega_1 + 1) u \frac{\partial}{\partial u},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — довільні гладкі функції від змінної ω_3 .

Оператор S не є оператором симетрії рівняння (1).

В залежності від значення параметра k розглянемо два випадки.

І. Випадок $k \neq 2$. Виділимо в алгебрі $A_\infty(4)$ скінченновимірну підалгебру $A(4)$, яка породжується операторами X_1, X_2, X_3, M і проведемо редукцію рівняння (2) за одновимірними підалгебрами алгебри $A(4)$. Розв'язок рівняння (2), що не залежить від змінної ω_2 , є нульовим, а тому ми повинні виключити з розгляду одновимірну підалгебру $\langle X_3 \rangle$. З врахуванням цього зауваження повний список не спряжених відносно внутрішніх автоморфізмів одновимірних підалгебр алгебри $A(4)$ і відповідних їм анзаців наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

№ п/п	Алгебра	Інваріантна змінна	Анзац
1	$\langle X_1 + \alpha X_2 \rangle$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\omega = \omega_2 \omega_1^{-\alpha-1}$	$u = \omega_1^{\frac{\alpha+1}{1-k}} \varphi(\omega)$
2	$\langle X_2 \rangle$	$\omega = \omega_1$	$u = \omega_3^{\frac{1}{1-k}} \varphi(\omega)$
3	$\langle X_1 + \varepsilon X_3 \rangle$ ($\varepsilon = \pm 1$)	$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon \ln \omega_1$	$u = \omega_1^{\frac{1}{1-k}} \varphi(\omega)$
4	$\langle M + \delta X_2 \rangle$ ($\delta = 0; \pm 1$)	$\omega = \frac{\delta}{k-2} \omega_1^{-(k-2)} + \ln \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$u = (\omega_1^{k-2} \omega_2)^{\frac{1}{1-k}} \varphi(\omega)$
5	$\langle M + \varepsilon X_3 \rangle$ ($\varepsilon = \pm 1$)	$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\varepsilon}{k-2} \omega_1^{-(k-2)}$	$u = \omega_1^{-1} \varphi(\omega)$

Анзаці 1–5, вказані в таблиці 1, редукують рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь з невідомою функцією $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad & -4\alpha\omega\ddot{\varphi} + \frac{4(k-2-\alpha k)}{k-1}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0; \\
 2^\circ \quad & -\frac{4\omega}{k-1}\ddot{\varphi} - \frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0; \\
 3^\circ \quad & -4\varepsilon\ddot{\varphi} + \frac{4(k-2)}{k-1}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0; \\
 4^\circ \quad & -4\delta\ddot{\varphi} + \frac{4\delta}{k-1}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0; \\
 5^\circ \quad & -4\varepsilon\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^k = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Дослідимо редуковані рівняння. Якщо в рівнянні 1° (3) покласти

$\alpha = \frac{(k-2)(k-1)}{2}$, то воно набуває вигляду

$$-2(k-2)(k+1)\omega\ddot{\varphi} - 2(k-2)(k+2)\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Дане рівняння має розв'язок

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left(\omega^{\frac{1}{2}} + C\omega^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \right)^2.$$

Йому відповідає такий розв'язок рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left(\omega_2^{\frac{1}{2}} + C\omega_1^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}} \omega_2^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \right)^2. \quad (4)$$

Рівняння 1° (3) при $\alpha = 0$ має розв'язок

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} (\omega + C).$$

В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} (\omega_2 + C\omega_1). \quad (5)$$

Якщо $\alpha = \frac{2(k-2)}{k+1}$, то рівняння 1° (3) набуває вигляду

$$-\frac{8(k-2)}{k+1}\omega\ddot{\varphi} - \frac{4(k-2)}{k+1}\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Частинним розв'язком його є функція

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left(\omega^{\frac{1}{2}} + C \right)^2.$$

Отже, рівняння (1) має такий розв'язок

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left(\omega_2^{\frac{1}{2}} + C\omega_1^{\frac{3(k-1)}{2(k+1)}} \right)^2. \quad (6)$$

Рівняння 4° і 5° (3) мають такі розв'язки:

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} (1 + C\omega^{k-2}),$$

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8\varepsilon(k+1)} (\omega + C)^2.$$

В результаті отримуємо такі розв'язки рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \omega_2 (1 + C\omega_1^{k-2}), \quad (7)$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8\varepsilon(k+1)} \omega_1^{k-3} \left(\omega_2 + \frac{\varepsilon}{k-2} \omega_1^{3-k} + C\omega_1 \right)^2. \quad (8)$$

II. Випадок $k = 2$. Виділимо в алгебрі $B_\infty(4)$ скінченовимірну підалгебру $B(4)$, породжену операторами Z_1, Z_2, Z_3, S і проведемо редукцію рівняння (2) за одновимірними підалгебрами алгебри $B(4)$. Аналогічно випадку I ми повинні вилучити з розгляду одновимірну підалгебру $\langle Z_3 \rangle$. Повний список не спряжених відносно внутрішніх автоморфізмів одновимірних підалгебр алгебри $B(4)$ і відповідних їм анзаців наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	Алгебра	Інваріантна змінна	Анзац
1	$\langle Z_1 + \delta Z_2 \rangle$ ($\delta = 0; \pm 1$)	$\omega = \omega_2 \omega_1^{-\delta-1}$	$u = \omega_2^{-1} \varphi(\omega)$
2	$\langle Z_2 \rangle$	$\omega = \omega_1$	$u = \omega_2^{-1} \varphi(\omega)$
3	$\langle Z_1 + \varepsilon Z_3 \rangle$ ($\varepsilon = \pm 1$)	$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon \ln \omega_1$	$u = \omega_1^{-1} \varphi(\omega)$
4	$\langle S + \alpha Z_2 \rangle$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\omega = \frac{\omega_1 \ln^\alpha \omega_1}{\omega_2}$	$u = (\omega_1 \ln^{\alpha+1} \omega_1)^{-1} \varphi(\omega)$
5	$\langle S + \varepsilon Z_3 \rangle$ ($\varepsilon = \pm 1$)	$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon \ln(\ln \omega_1)$	$u = (\omega_1 \ln \omega_1)^{-1} \varphi(\omega)$

Анзаці 1–5, вказані в таблиці 2, редукують рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь з невідомою функцією $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned} 1^\circ & -4\delta\omega^2\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0; \\ 2^\circ & -4\omega\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0; \\ 3^\circ & -4\varepsilon\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0; \\ 4^\circ & -4\alpha\omega^3\ddot{\varphi} + 4\omega^2\dot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0; \\ 5^\circ & -4\varepsilon\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Дослідимо редуковані рівняння 1° – 5° (9). Рівняння 2° (9) має розв'язок

$$\varphi^2 = -\frac{\lambda}{4}(\ln \omega + C).$$

Отже, рівняння (2) має розв'язок

$$u^2 = -\frac{\lambda}{4}(\omega_2 \ln \omega_1 + C\omega_2). \quad (10)$$

Рівняння 3° (9) має частинний розв'язок

$$\varphi^2 = -\frac{\lambda}{24\varepsilon}(\omega + C)^2.$$

Йому відповідає такий розв'язок рівняння (2)

$$u^2 = \frac{\lambda}{24\varepsilon\omega_1}(\omega_2 - \varepsilon\omega_1 \ln \omega_1 + C\omega_1)^2. \quad (11)$$

Розв'яжемо задачу розмноження розв'язків (4)–(8), (10), (11) рівняння Даламбера. Кожен з них, записаний в змінних ω_1 і ω_2 , є розв'язком редукованого рівняння (2). Оскільки відома алгебра інваріантності цього рівняння і вона містить симетрії, які не є симетріями рівняння (1), то на першому етапі розв'язуємо задачу розмноження розв'язків для рівняння (2). Отримані класи розв'язків рівняння (2), записані в змінних x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), є класами розв'язків рівняння (1) і ми їх розмножуємо з допомогою групи інваріантності цього рівняння.

Випишемо дію перетворень групи інваріантності рівняння (2) на змінні ω_1 , ω_2 , u . У випадку $k \neq 2$ позначимо через θ_t^0 перетворення, яке визначається елементом $\exp(tM)$. Маємо

$$\theta_t^0(\omega_i) = \omega_i [1 - (k-2)t\omega_1^{k-2}]^{\frac{1}{2-k}} \quad (i = 1, 2),$$

$$\theta_t^0(u) = u [1 - (k-2)t\omega_1^{k-2}]^{\frac{1}{k-2}}.$$

Перетворення θ_t^1 , θ_t^2 , θ_t^3 , що визначаються відповідними елементами $\exp(tX_1)$, $\exp(tX_2)$ і $\exp(tX_3)$, діють на змінні ω_1 , ω_2 і u згідно таких формул:

$$\theta_t^1(\omega_1) = e^t \omega_1, \quad \theta_t^1(\omega_2) = e^t \omega_2, \quad \theta_t^1(u) = u e^{-\frac{t}{k-1}};$$

$$\theta_t^2(\omega_1) = \omega_1, \quad \theta_t^2(\omega_2) = e^t \omega_2, \quad \theta_t^2(u) = u e^{-\frac{t}{k-1}};$$

$$\theta_t^3(\omega_1) = \omega_1, \quad \theta_t^3(\omega_2) = \omega_2 + t\omega_1, \quad \theta_t^3(u) = u.$$

У випадку $k = 2$ позначимо через δ_t^0 , δ_t^1 , δ_t^2 і δ_t^3 перетворення, що відповідають елементам $\exp(tS)$, $\exp(tZ_1)$, $\exp(tZ_2)$ і $\exp(tZ_3)$. Тоді

$$\begin{aligned}\delta_t^0(\omega_i) &= \omega_i \omega_1^{e^t - 1} \quad (i = 1, 2), & \delta_t^0(u) &= u e^{-t} \omega_1^{1 - e^t}; \\ \delta_t^1(\omega_1) &= e^t \omega_1, & \delta_t^1(\omega_2) &= e^t \omega_2, & \delta_t^1(u) &= e^{-t} u; \\ \delta_t^2(\omega_1) &= \omega_1, & \delta_t^2(\omega_2) &= e^t \omega_2, & \delta_t^2(u) &= e^{-t} u; \\ \delta_t^3(\omega_1) &= \omega_1, & \delta_t^3(\omega_2) &= \omega_2 + t \omega_1, & \delta_t^3(u) &= u.\end{aligned}$$

Розглянемо, наприклад, однопараметричну сім'ю розв'язків (5). Будь-який розв'язок, що належить до сім'ї (5), інваріантний відносно перетворення θ_t^1 , а перетворення θ_t^2 і θ_t^3 переводять розв'язки сім'ї (5) знову в розв'язки тієї ж сім'ї. Перетворення θ_t^0 переводить сім'ю розв'язків (5) в сім'ю

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} (\omega_2 + C_1 \omega_1) (1 + C_2 \omega_1^{k-2}),$$

де $C_1 = C$, $C_2 = (2-k)t$. Отримана сім'я розв'язків містить в собі сім'ю розв'язків (5) і інваріантна відносно перетворень θ_t^i ($i = 0, 1, 2, 3$). Отже, отримано сім'ю розв'язків рівняння (2), яка далі не розмножується за допомогою групи $\{\theta_t^0, \theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3\}$. Враховуючи далі, що алгебра інваріантності рівняння (2) є нескінченновимірною, отримано більш широкий клас розв'язків рівняння (2), якщо сталі C_1 і C_2 замінити довільними гладкими функціями ψ_1 і ψ_2 від змінної ω_3 . На завершальному етапі розмножуємо отриману сім'ю розв'язків рівняння (2), записану в змінних x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), групою інваріантності рівняння (1).

Нехай $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_i = x_i + \alpha_i$, $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4$, $t = (a, y)(b, y)^{-1}$, $(a, a) = (a, b) = (b, b) = 0$, $\psi_i(t)$ — довільні гладкі функції від змінної t ; $\alpha_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Випишемо багатопараметричні класи розв'язків нелінійного рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$, отримані з розв'язків (4)–(8), (10), (11) за допомогою операції групового розмноження

$$\begin{aligned}u^{1-k} &= \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left\{ \left[((y, y) + \psi_1(t)(a, y)) (1 + \psi_3(t)(a, y)^{k-2}) \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(t)(a, y)^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}} \left((y, y) + \psi_1(t)(a, y)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \right)^2 \right\} \quad (k \neq 2); \end{aligned}$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \left\{ \left[((y, y) + \psi_1(t)(a, y)) (1 + \psi_3(t)(a, y)^{k-2}) \right]^{1/2} + \psi_2(t)(a, y)^{\frac{3(k-1)}{2(k+1)}} (1 + \psi_3(t)(a, y)^{k-2}) \right\}^2 \quad (k \neq 2);$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8(k+1)(k-2)} (a, y)^{k-3} \psi_1(t) \times \left((y, y) + \psi_1^{-1}(t)(a, y)^{3-k} + \psi_2(t)(a, y) \right)^2 \quad (k \neq 2);$$

$$u^{-1} = -\frac{\lambda}{4} \left((y, y) + \psi_1(t)(a, y) \right) \left(\ln(a, y) + \psi_2(t) \right) \quad (k = 2);$$

$$u^{-1} = \frac{\lambda}{24} \frac{\psi_1(t)}{(a, y)} \left[(y, y) - \frac{1}{\psi_1(t)} (a, y) \ln(a, y) + \psi_2(t)(a, y) \right]^2 \quad (k = 2).$$

- [1] Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.
- [2] Фушич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Ф. О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2,2}$. I // Укр. матем. журн. — 1990. — **42**, № 8. — С. 1142–1148.
- [3] Фушич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Ф. О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2,2}$. II // Укр. матем. журн. — 1990. — **42**, № 9. — С. 1237–1243.
- [4] Barannyk A., Yuryk I. On some exact solutions of nonlinear wave equations / Proc. of the Second International Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. — **1**. — P. 98–107.
- [5] Barannyk A., Yuryk I. On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**. — P. 4899–4907.
- [6] Баранник А.Ф., Юрик І.І. Новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Укр. матем. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 583–594.
- [7] Юрик І.І. Нелінійні рівняння Даламбера у псевдоевклидовому просторі $\mathbb{R}_{2,n}$ і його розв'язки // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 681–687.