

УДК 517.9, 519.46

О.В. Островська,
канд. фіз.-мат. наук
І.І. Юрик, канд. фіз.-мат. наук
Національний університет
харчових технологій

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО СТРИЖНЯ З КОЕФІЦІЄНТОМ ДИФУЗІЇ РІВНИМ ОДИНИЦІ

Робота присвячена побудові точних розв'язків рівняння $u_t = u_{xx}$. Як відомо, це рівняння теплопровідності для однорідного стрижня з коефіцієнтом дифузії рівним одиниці. Використовуючи класичний метод відокремлення змінних, тобто підстановку $u = a(x)b(t)$, раніше отримані точні розв'язки. Для нових розв'язків в даній роботі запропоновано узагальнену процедуру відокремлення змінних. Це дало можливість отримати принципово нові точні розв'язки цього рівняння, які неможливо отримати з використанням класичного методу С. Лі, або методу умовних симетрій.

Ключові слова: лінійне рівняння теплопровідності, точні розв'язки, узагальнене відокремлення змінних.

Розглянемо диференціальне рівняння з поліноміальними нелінійностями

$$T^p(u) = X^q(u), \quad (1)$$

де $T^p(u)$ — многочлен степені p від функції u і її похідна по t , $X^q(u)$ — многочлен степені q від функції u і її похідних по x .

Розв'язки пропонується шукати у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^h f_i(x) a_i(t), \quad (2)$$

де $f_i(x), a_i(t)$ — деякі гладкі функції, які необхідно визначити.

В роботах [1-3] для рівнянь нелінійної теплопровідності

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x - u^{1-\sigma}, \quad u_t = (u^\sigma u_x)_x - u^{1+\sigma}, \quad (\sigma > 0)$$

розв'язки були знайдені у вигляді $u(x, t) = \varphi(t)[\psi(t) + \theta(x)]$.

В роботі [4] для рівняння $T^1(u) = X^2(u)$ знайдені розв'язки у вигляді

$$u(x, t) = ke^{\lambda t} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x + \delta), \quad \lambda > 0, \\ u(x, t) = ke^{\lambda t} \cos(\sqrt{|\lambda|}x + \delta), \quad \lambda < 0,$$

при умові, що $W_k = L\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, $X^2(W_k) \subseteq W_k$.

В роботі [5] для нелінійних хвильових рівнянь побудовані нові точні розв'язки, використовуючи модифікований анзац (2).

Обмежимо рівнянням

$$T^2(u) = X^2(u) \quad (3)$$

Розглянемо такі лінійні оператори $l^1(u) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^1 u_{ti}$, $l^2(u) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 u_{xi}$,

і білінійні симетричні оператори $b^1(u, v) = \sum_{i,j=0}^n x_{ij}^1 u_{ti} v_{tj}$, $b^2(u, v) = \sum_{i,j=0}^n x_{ij}^2 u_{xi} v_{xj}$,

де $x^i = (x_{ij}^i)$, $x^2 = (x_{ij}^2)$ — симетричні матриці. Тоді

$$T^2(u) = b^1(u, u) + l^1(u) + \delta^1, \quad X^2(u) = b^2(u, u) + l^2(u) + \delta^2$$

де δ^1, δ^2 — сталі.

В результаті підстановки (2) в (3) маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (f_i)^2 b^1(a_i, a_i) + 2 \sum_{i < j} f_i f_j b^1(a_i, a_j) + \sum_{i=1}^k f_i l^1(a_i) + \delta^1 = \\ & = \sum_{i=1}^k (a_i)^2 b^2(f_i, f_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j b^2(f_i, f_j) + \sum_{i=1}^k a_i l^2(f_i) + \delta^2 \end{aligned}$$

Нехай

$$L_a = L\{a_1, \dots, a_k\}, \quad L_f = L\{f_1, \dots, f_k\},$$

$$L_a^1 = \{1, \{a_i\}, \{a_i a_j, i \leq j\}\},$$

$$L_f^1 = \{1, \{f_i\}, \{f_i f_j, i \leq j\}\}$$

Нехай функції $1, \{a_i\}, \{a_i a_j, i \leq j\}, 1, \{f_i\}, \{f_i f_j, i \leq j\}$ утворюють базиси в L_a^1, L_f^1 ,

відповідно. Розкладемо по базису коефіцієнти b^1, l^1 :

$$b^1(a_i, a_j) = \sum_{p=1}^k (a_p)^2 B_{ij,pp} + 2 \sum_{p < q} a_p a_q B_{ij,pq} + \sum_{p=1}^k a_p B_{ij,p} + B_{ij,0}$$

$$l^1(a_i) = \sum_{p=1}^k (a_p)^2 L_{i,pp} + 2 \sum_{p < q} a_p a_q L_{i,pq} + \sum_{p=1}^k a_p L_{i,p} + L_{i,0}$$

В i, L треба знайти.

В результаті отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^k (a_p)^2 \left\{ \sum_{i=1}^k (f_i)^2 B_{ii,pp} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij,pp} + \sum_{i=1}^k f_i L_{i,pp} \right\} + \\ & + 2 \sum_{p < q} a_p a_q \left\{ \sum_{i=1}^k (f_i)^2 B_{ii,pq} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij,pq} + \sum_{i=1}^k f_i L_{i,pp} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k f_i L_{i,pq} \right\} + \sum_{p=1}^k a_p \left\{ \sum_{i=1}^k (f_i)^2 B_{ii,p} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij,p} + \sum_{i=1}^k f_i L_{i,p} \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^k (f_i)^2 B_{ii,0} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij,0} + \sum_{i=1}^k f_i L_{i,0} + \delta^1 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^h (a_p)^2 b^2(f_p, f_p) + 2 \sum_{p < q} a_p a_q b^2(f_p, f_q) + \sum_{p=1}^h a_p l^2(f_p) + \delta^2.$$

Розклад по базису в L_a^1 однозначний. Тому $\{f_i(x)\}$ повинні задовольняти системі.

$$b^2(f_p, f_p) = \sum_{i=1}^h (f_i)^2 B_{ii, pq} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij, pq} + \sum_{i=1}^h f_i L_{i, pq}, \quad (p \leq q)$$

$$l^2(f_p) = \sum_{i=1}^h (f_i)^2 B_{ii, p} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij, p} + \sum_{i=1}^h f_i L_{i, p},$$

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^h (f_i)^2 B_{ii, 0} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij, 0} + \sum_{i=1}^h f_i L_{i, 0} + \delta^1.$$

З останнього рівняння випливає, що $B_{ij, 0} = L_{i, 0} = 0$, $\delta^2 = \delta^1$.

Звідси для знаходження функцій $\{a_i(t)\}$ і $\{f_i(x)\}$ отримаємо системи

$$\begin{cases} b^1(a_i, a_j) = \sum_{p=1}^h (a_p)^2 B_{ij, pp} + 2 \sum_{p < q} a_p a_q B_{ij, pq} + \sum_{p=1}^h a_p B_{ij, p} \\ l^1(a_i) = \sum_{p=1}^h (a_p)^2 L_{i, pp} + 2 \sum_{p < q} a_p a_q L_{i, pq} + \sum_{p=1}^h a_p L_{i, p} \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq j \leq k, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\begin{cases} b^2(f_p, f_q) = \sum_{i=1}^h (f_i)^2 B_{ii, pq} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij, pq} + \sum_{i=1}^h f_i L_{i, pq} \\ l^2(f_p) = \sum_{i=1}^h (f_i)^2 B_{ii, p} + 2 \sum_{i < j} f_i f_j B_{ij, p} + \sum_{i=1}^h f_i L_{i, p} \end{cases}$$

Ці системи перевизначені і можуть бути сумісними, взагалі кажучи, лише при певних значеннях коефіцієнтів B і L .

Застосуємо цю процедуру до рівняння теплопровідності однорідного стержня, в якому коефіцієнт дифузії дорівнює одиниці:

$$u_t = u_{xx} \quad (4)$$

Підстановку анзац, вигляду (2) запишемо так:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \omega_i(x_0) a_i(x_1) \quad (5)$$

Анзац (5) містить m невідомих функцій $a_i(x_1)$ і m невідомих функцій $\omega_i(x_0)$, які будемо визначати з умови, що анзац (5) редукує рівняння (1) до системи m звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $\omega_i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$.

З'ясуємо перш за все, в якому випадку анзац типу (5) визначають один і той же розв'язок рівняння (3). Вважаємо, що функції $a_1, \dots, a_m$, які входять до анзацу (5), є лінійно незалежними над R . Тоді анзацу (5) відповідає m -вимірний векторний простір $V = (a_1, \dots, a_m)$ над R з базисом $a_1, \dots, a_m$. Можна сказати, що анзац (5)

представлений у базисі $a_1, \dots, a_m$ простору V . Нехай $b_1(x_1), \dots, b_m(x_1)$ є іншим базисом простору V і T матриця переходу від базису $a_1, \dots, a_m$ до базису $b_1, \dots, b_m$. Тоді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

Функція u , визначена формулою (5), не зміниться, якщо одночасно виконати перетворення над функціями $\omega_1, \dots, \omega_m$, згідно з формулою

$$(\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_m) = (\omega_1, \dots, \omega_m) T^{-1} \quad (7)$$

В результаті отримаємо анзац

$$u = \sum_{i=1}^m \hat{\omega}_i(x_0) b_i(x_1), \quad (8)$$

де функції $b_i, \hat{\omega}_i$ визначаються за формулами (6) і (7). Очевидно, анзац (8) представляє ту саму функцію u , але в іншому базисі $b_1, \dots, b_m$ простору V .

У зв'язку з цим два анзаці (5) і (8) вважаємо рівносильними, якщо існує таке не вироджене лінійне перетворення T простору V , що визначається формулами (6) і (7), яке переводить анзац(5) в анзац (8).

Розглянемо далі питання про редукцію рівняння теплопровідності. Підставивши анзац (5) в рівняння (1), отримаємо рівняння

$$\sum_{i=1}^m \omega'_i a_i - \sum_{i=1}^m \omega_i a_i'' = 0 \quad (9)$$

Припустимо, що функція a_i'' належить до простору V для $i = 1, \dots, m$. Це означає, що існує така квадратна матриця A порядку m , для якої

$$\begin{pmatrix} a_i'' \\ \vdots \\ a_m'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} A \quad (10)$$

Оскільки $a_i'' \in V$ для $i = 1, \dots, m$, то (10) визначає лінійне перетворення ϕ має вигляд

$$\begin{pmatrix} b_i'' \\ \vdots \\ b_m'' \end{pmatrix} = T^{-1} A T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

і визначається матрицею $T^{-1}AT$. Отже, матриці даного анзацу в різних базисах простору V є подібними. В залежності від коренів характеристичного рівняння матриця A подібна до однієї з трьох канонічних форм.

1) Корені характеристичного рівняння матриці A дійсні. Матриця A в цьому випадку подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1, \lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_s, \lambda_s}} \end{pmatrix},$$

де J_{m_i, λ_i} є кліткою Жордана порядку m_i , ($i = 1, 2, \dots, s$):

$$J_{m_i, \lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Зокрема, якщо $m_i = 1$, то $J_{m_i, \lambda_i} = (\lambda_i)$ — квадратна матриця порядку 1.

2) Корені характеристичного рівняння матриці A комплексні. Матриця A в цьому випадку подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{b_1, d_1}^{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{b_s, d_s}^{m_s}} \end{pmatrix}, \quad d_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, k,$$

де $J_{b,d}^m$ — узагальнена клітка Жордана, тобто матриця порядку $2m$ такого вигляду

$$J_{b,d}^m = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} b & -d \\ d & b \end{smallmatrix}} & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} b & -d \\ d & b \end{smallmatrix}} & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \boxed{\begin{smallmatrix} b & -d \\ d & b \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Якщо $m = 1$, то $J_{b,d}^1 = \begin{pmatrix} b_1 & -d_1 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}$.

3) Характеристичне рівняння матриці A має s дійсних коренів і t комплексних коренів з врахуванням їх кратності. Матриця A в даному випадку подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} J_{m_1, \lambda_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{m_k, \lambda_k} & & \\ & & & J_{n_1, d_1} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & J_{n_t, d_t} \end{pmatrix},$$

де $m_1 + \dots + m_k = s, 2n_1 + \dots + 2n_t = t$

Отже, можна вважати, що матриця A в формулі (10) має одну з трьох канонічних форм. Виконання рівності (10) означає, що рівняння (9) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^m a_i \Phi_i(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega_1^1, \dots, \omega_m^1) = 0, \quad (13)$$

$$a_1 \Phi_1(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega_1^1, \dots, \omega_m^1) + \dots + a_m \Phi_m(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega_1^1, \dots, \omega_m^1) = 0, \quad (14)$$

де функція Φ_i залежить тільки від змінної x_0 , а функція a_i — тільки від змінної x_1 . Оскільки функції $a_1, \dots, a_m$ лінійно незалежні над $\mathbb{R}$, то рівняння (13) розпадається на систему m звичайних диференціальних рівнянь

$$\Phi_i = 0, \dots, \Phi_m = 0. \quad (15)$$

Задача побудови розв'язків виду (5) рівняння (1) зведена до інтегрування двох систем звичайних диференціальних рівнянь (10) і (15). Слід зауважити, якщо матриця A є однією з кліток Жордана, то відповідний розв'язок рівняння (1) є сумою s розв'язків цього рівняння, які відповідають даним кліткам. Тому можна обмежитись випадком, коли матриця A є кліткою Жордана виду (11), або узагальненою кліткою Жордана виду (12).

Нехай A є кліткою Жордана $J_{m, \lambda}$. Для побудови точних розв'язків рівняння (3) використаємо анзац (5), в якому функції a_i задовольняють систему рівнянь

$$a_1'' = \lambda a_1 + a_2, \dots, a_{m-1}'' = \lambda a_{m-1} + a_m, a_m'' = \lambda a_m \quad (16)$$

Підставивши (16) в рівняння (9) і використавши лінійну незалежність функцій $a_1, \dots, a_m$, отримаємо систему для визначення функцій $\omega_1, \dots, \omega_m$:

$$\omega_1' = \lambda \omega_1, \omega_2' = \omega_1 + \lambda \omega_2, \dots, \omega_m' = \omega_{m-1} + \lambda \omega_m. \quad (17)$$

Нехай $\lambda > 0$. Рівняння системи (16) можуть бути розв'язані послідовно одне за одним, починаючи з останнього. В результаті знайдемо розв'язок системи (16)

$$a_{m-k} = f_k(x)e^{\sqrt{\lambda}x} + g_k(x)e^{-\lambda x}, \quad (18)$$

$k = 0, 1, \dots, m-1$, $f_k(x), g_k(x)$ — многочлени над R степеня меншого або рівного k , що задовольняють рекурентні співвідношення

$$f_k'' + 2\sqrt{\lambda}f_k' = f_{k-1}, \quad (19)$$

$$g_k'' - 2\sqrt{\lambda}g_k' = g_{k-1}, \quad (20)$$

для $k = 1, \dots, m-1$. Покладаючи, що $f_0 = C_1$, $g_0 = C_3$,

де C_1, C_3 — сталі, отримаємо на підставі (19) і (20):

$$f_1 = \frac{C_1}{2\sqrt{\lambda}}x + C_2, g_1 = -\frac{C_3}{2\sqrt{\lambda}}x + C_4, \quad (21)$$

$$f_2 = \frac{C_1}{8\lambda}x^2 + \left(\frac{C_2}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_1}{8\lambda\sqrt{\lambda}}\right)x + C_5, \quad (22)$$

$$g_2 = \frac{C_3}{8\lambda}x^2 + \left(-\frac{C_4}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_3}{8\lambda\sqrt{\lambda}}\right)x + C_6, \quad (23)$$

$C_1, \dots, C_6$ — довільні сталі.

Розв'язок системи (17) має вигляд

$$\omega_k = h_{k-1}(t)e^{\lambda t}, \quad (24)$$

$k = 1, \dots, m$, $h_k(t)$ — многочлен над R степеня $\leq k$, що задовольняє рекурентне співвідношення

$$h_k' = h_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (25)$$

Якщо $h_0 = B_1$, B_1 — стала, то на підставі (24) та (25)

$$\omega_1 = B_1e^{\lambda t}, \omega_2 = (B_1t + B_2)e^{\lambda t}, \quad (26)$$

$$\omega_3 = \left(\frac{1}{2}B_1t^2 + B_2t + B_3\right)e^{\lambda t}, \quad (27)$$

B_1, B_2, B_3 — довільні сталі.

На підставі (5), (18) і (24) розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} (f_k(x)e^{\sqrt{\lambda}x} + g_k(x)e^{-\sqrt{\lambda}x})h_{m-k-1}(t)e^{\lambda t}, \quad (28)$$

де многочлени $f_k(x), g_k(x)$ степеня $\leq k$ задовольняють рекурентні співвідношення (19) і (20), а многочлен $h_k(t)$ степеня $\leq k$ — рекурентне співвідношення (25).

Використовуючи (28) і формули (21)-(23), (26), (27), знаходимо такі розв'язки рівняння (1)

для $m = 1$

$$u = \widehat{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}x + \lambda t} + \widehat{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x + \lambda t}, \widehat{C}_1 = B_1 C_1, \widehat{C}_2 = B_1 C_3; \quad (29)$$

для $m = 2$

$$u = \left[B_1 \left(\frac{C_1}{2\sqrt{\lambda}} x + C_2 \right) + C_1 (B_1 t + B_2) \right] e^{\sqrt{\lambda}x + \lambda t} + \left[B_1 \left(-\frac{C_3}{2\sqrt{\lambda}} x + C_4 \right) + C_3 (B_1 t + B_2) \right] e^{-\sqrt{\lambda}x + \lambda t} \quad (30)$$

Висновки: використовуючи узагальнену процедуру відокремлення змінних побудовані нові класи точних розв'язків лінійного рівняння теплопровідності, які не можуть бути отримані методом С. Лі та методом умовних симетрій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kersner R. // Acta. Math. Acad. Sci. Hungaricail. 1978 Vol.32 №3—4, P.301—330.
2. Newman M.I. // I. Theoret. Biol. 1980 Vol.85 P.325—334.
3. Berisch M., Kersner R. // Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl. 1985 Vol.9 P.987—1008.
4. Галактионов В.А., Посашков С.А. // Журнал вычислит. мат. и мат. физики. 1989 Т. 29, №4 С.497—506.
5. Баранник А.Ф., Юрик І.І. // Укр. Мат. Журн., 2009 Т.61, №7, С.892—905.

О.В. Островская, И.И. Юрик

Уравнения теплопроводности для однородного стержня
с коэффициентом диффузии равным единице

Работа посвящена построению точных решений уравнения $u_t = u_{xx}$. Как известно, это уравнение теплопроводности для однородного стержня с коэффициентом диффузии равным единице. Используя классический метод разделения переменных, т.е. подстановку $u = a(x)b(t)$, ранее получены точные решения. Для построения новых решений в данной работе предложено обобщенную процедуру разделения переменных. Это дало возможность получить принципиально новые точные решения этого уравнения, которые невозможно получить, используя классический метод С.Ли, или метод условных симметрий.

Ключевые слова: линейное уравнение теплопроводности, точные решения, обобщенное разделение переменных

O. Ostrovska, I. Yuryk

Heat equation for a homogeneous rod with the diffusion coefficient that equals 1

The paper is devoted to the construction of exact solutions of equation. It is known that this is the heat equation for a homogeneous rod with a diffusion coefficient equal to one. Using the classical method of separation of variables, i.e., the substitute, exact solutions were obtained earlier. In order to construct new solutions, a generalized procedure of separation of variables is proposed in the paper. This enabled one to obtain essentially new solutions of this equation which could not be obtained by using the classical S.Lie method or the method of conditional symmetries.

Key words: linear heat equation, exact solutions, generalized separation of variables

e-mail: jimp@ukr.net

Надійшла до редколегії 10.03.2012 р.