

А.І. СОКОЛЕНКО, д-р техн. наук,  
К.В. ВАСИЛЬКІВСЬКИЙ, канд. техн. наук,  
Р.М. ЛЕУС, здоб.  
Національний університет харчових технологій

## ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ВИБІГУ І ГАЛЬМУВАННЯ В ДВОМАСОВИХ СИСТЕМАХ

---

Визначено співвідношення між кінематичними та силовими параметрами в процесах гальмування на прикладі двомасових динамічних моделей. Вказано на можливість реалізації законів руху. Знайдені підходи для оптимізації процесів гальмування в технологічному обладнанні.

**Ключові слова:** динаміка, вибіг, гальмування, закон руху, кінематичні параметри, силові параметри.

Определены соотношения между кинематическими и силовыми параметрами в процессах торможения на примере двухмассовых динамических моделей. Указано на возможность реализации законов движения. Найденны подходы для оптимизации процессов торможения в технологическом оборудовании.

**Ключевые слова:** динамика, выбег, торможение, закон движения, кинематические параметры, силовые параметры.

The correlation between the kinematic and force parameters during braking for example of two-mass dynamic models. Specified on the possibility of laws of motion. Found approaches to optimize the braking process in production equipment.

**Keywords:** dynamics, ran out, braking the law of motion, kinematic parameters, power parameters.

Загальні положення динаміки машин вказують на важливість вибору за конів руху ведучої маси в організації процесів гальмування в системі з двох мас.

При цьому є три варіанти:

варіанту 1 відповідає випадок, за якого плинні координати переміщення ведучої і веденої мас співпадають. Оскільки перебіг часу вибігу також має співпадати для обох мас, то це означає рівність їх швидкостей і прискорень;

варіант 2 — це випадок з випередженням в процесі вибігу ведучої маси, в якому слід очікувати збільшення пружного навантаження системи;

варіанту 3 відповідає сповільнений режим вибігу ведучої маси порівняно з вибігом веденої маси, при цьому прогнозується зменшення пружного навантаження.

Відомо, що в процесі вибігу накопичена кінетична енергія веденої маси може перетворюватися в потенціальну енергію деформації пружного елемента або витрачатися як робота на подолання сил опору. Різні сполучення таких енергетичних витрат відповідають трьом вищезазваним варіантам. В першому за відсутності деформації пружного елемента кінетична енергія веденої маси витрачається на подолання сил опору. В другому варіанті кінетична енергія веденої маси витрачається як на подолання сил опору, так і частково переходить в потенціальну енергію деформації пружного елемента. За ситуації по варіанту 3 кінетична енергія веденої маси також повністю витрачається як робота проти сил опору [1—4].

Завданням цього дослідження визначено пошук кінематичних параметрів переміщення ведучих і ведених мас, за яких досягається обмеження динамічних складових навантажень в режимах вибігу і гальмування двомасових систем.

Розглянемо перший варіант гальмування. Для цього визначимо співвідношення параметрів, які забезпечують його реалізацію.

Оскільки існують можливості досягнення різних законів руху ведучої маси, то для наближення і навіть повного співпадіння з законами руху веденої маси, слід здійснити прогностичну оцінку системи.

Перехід кінетичної енергії рухомої маси в потенціальну енергію пружного елемента пов'язується співвідношенням

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{P_{\text{прмак}}^2}{2c} \quad (1)$$

Звідси максимальне пружне навантаження

$$P_{\text{прмак}} = V\sqrt{mc} \quad (2)$$

Остання формула відповідає амплітуді динамічної складової ударного навантаження в двомасовій системі, а також випадкам динамічних навантажень, в яких мав місце стрибок швидкості на величину  $V$  в русі ведучої маси.

В режимі усталеного руху веденої маси має місце рівність сили опору  $P_{\text{он}}$  і пружної сили  $P_{\text{пр}}$ . Від початку вибігу системи в першому варіанті величина  $P_{\text{он}}$  залишається сталою, має місце рівність координат переміщення ведучої та веденої мас.

$$x_1(t) = x_2(t) \quad (3)$$

За таких умов маємо  $P_{\text{он}} \neq \text{const}$ , оскільки рівняння руху веденої маси

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_{\text{пр}} - P_{\text{он}} \neq 0,$$

бо в протилежному випадку мали б  $\dot{x}_2 = \text{const}$ , що не відповідає режиму вибігу.

Таким чином, для реалізації умови вибігу за першим варіантом з врахуванням, що  $P_{\text{пр}} = \text{const}$  необхідно змінювати силу опору. Тоді рівняння руху буде мати наступний вид

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_{\text{пр}} - P_{\text{он}}(t) \quad (4)$$

Оскільки в цьому випадку прискорення  $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$ , то звідси

$$m_2 \ddot{x}_1 = P_{\text{пр}} - P_{\text{он}}(t); P_{\text{он}}(t) = P_{\text{пр}} - m_2 \ddot{x}_1 \quad (5)$$

Очевидно, що реалізація вказаного закону  $P_{\text{он}} = P_{\text{он}}(t)$  можлива деякою мірою в стаціонарних механізмах з фіксованими положеннями в яких має починатися організований режим вибігу.

Якщо залежність  $P_{\text{он}} = P_{\text{он}}(t)$  визначена певним чином на рівні конструктивного рішення, то можна виконати поставлені умови за рахунок коректив до закону  $x_1 = x_1(t)$ .

Розглянемо, наприклад, одне з можливих конструктивних рішень з додатковим пружним упором, що має жорсткість пружного елемента  $c_A$  (рис. 1).

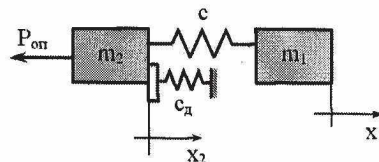


Рис. 1. Схема до реалізації першого варіанту вибігу системи з додатковим пружним упором

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

Тоді маємо

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_{np} - c_A x_2 - P_{on}, \text{ або} \\ \ddot{x}_2 + \frac{c_A}{m_2} x_2 = \frac{P_{np} - P_{on}}{m_2}. \quad (6)$$

Оскільки умовами етапу вибігу визначено, що  $P_{np} = P_{on}$ , то рівняння (6) перетворюємо до форми

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_A}{m_2} x_2 = 0. \quad (7)$$

Початкові умови останнього рівняння:

$$x_{2(n)} = 0; \quad \dot{x}_{2(n)} = V. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді

$$x_2 = A \sin \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t + B \cos \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t. \quad (9)$$

Продиференціювавши останнє рівняння, маємо

$$\dot{x}_2 = A \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} \cos \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t - B \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t. \quad (10)$$

Підстановкою початкових умов одержуємо

$$B = 0; \quad A = V \sqrt{\frac{m_2}{c_A}}. \quad (11)$$

Таким чином остаточно маємо

$$x_2 = V \sqrt{\frac{m_2}{c_A}} \sin \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t. \quad (12)$$

Надаючи ведучій масі закон руху  $x_1(t) = x_2(t)$ , реалізуючи перший варіант режиму вибігу системи і, таким чином закон руху ведучої маси має бути:

$$x_1 = V \sqrt{\frac{m_2}{c_A}} \sin \sqrt{\frac{c_A}{m_2}} t. \quad (13)$$

Важливо, що вказаний закон (13) реалізується достатньо нескладними засобами (рис. 2). Нехай ведучий елемент 1 обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , а тяга 2, що веде ведучу масу, встановлена на радіусі R.

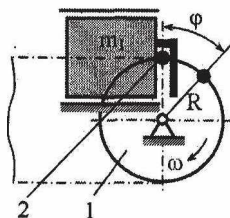


Рис. 2. Схема механізму до реалізації закону руху ведучої маси (формула (13))

При цьому виконується співвідношення

$$R = V \sqrt{\frac{m_2}{c_A}} \quad \text{та} \quad \omega = \sqrt{\frac{c_A}{m_2}}.$$

Припустимо, що за конструктивними вимогами необхідно одержати значення  $R = 0,06$  м при відомому значенні  $V = 0,2$  м/с та  $m_2 = 100$  кг.

Тоді

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{0,2}{0,06} = 3,33 \text{ с}^{-1}; \quad c_A = \omega^2 m_2 = 1110 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Реалізації першого варіанту вибігу системи можна досягти також за рахунок введення в неї додаткового зв'язку порівняно високої жорсткості (рис. 3.). Такий зв'язок одержується за рахунок двох ланок, які між собою та масами  $m_1$  та  $m_2$  утворюють шарніри А, В та С.

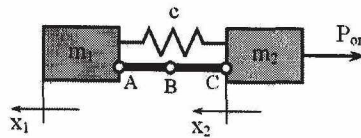


Рис. 3. Схема до двомасової моделі з додатковим жорстким зв'язком

Положення ланок на одній лінії досягається під час навантаження пружного елемента максимальним значенням  $P_{пр}$ . Від цього моменту обидві маси рухаються як одне ціле, в тому числі і під час гальмування та вибігу.

Однак за таких умов система має надлишок потенціальної енергії деформації пружного елемента

$$\Delta E = \frac{P_{пр,дин}^2}{c},$$

де  $P_{пр,дин}$  — пружна динамічна складова навантаження пружного елемента.

Звільнення системи від цього надлишку можливе за умови виведення шарніру В з так званого „мертвого” положення. В результаті пружна сила стає більшою за силу опору  $P_{он}$  і рівень деформації пружного елемента зменшується. При цьому можливими є випадки, коли звільнення від надлишкової потенціальної енергії здійснюється в режимі руху обох мас або відбувається після зупинки ведучої маси.

Для визначення співвідношень параметрів в першому випадку ведучій масі необхідно задати закон руху. Обираємо, наприклад, рівносповільнений рух, і тоді запишемо

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2};$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2) - P_{он}$$

або відповідними перетвореннями одержуємо

$$\ddot{x}_2 + \frac{c}{m_2} x_2 = \frac{c}{m_2} V_0 t - \frac{ca}{2m_2} t^2 - \frac{P_{он}}{m_2}. \quad (14)$$

Початкові умови останнього рівняння:

$$t_{(n)} = 0; \quad x_{2(n)} = -\frac{P_{он} + P_{пр,дин}^{max}}{c}; \quad \dot{x}_{2(n)} = V_0. \quad (15)$$

Розв'язання рівняння (14) запишемо у формі

ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

$$x_2 = A \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + B \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + V_0 t - \frac{at^2}{2} + \frac{am_2}{c} - \frac{P_{оп}}{c},$$

а сталі інтегрування знайдемо підстановкою початкових умов, тоді:

$$A = 0; B = -\frac{P_{дин}^{max} + am_2}{c}.$$

Остаточно маємо

$$x_2 = V_0 t - \frac{P_{дин}^{max} + am_2}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - \frac{at^2}{2} + \frac{am_2}{c} - \frac{P_{оп}}{c}; \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = V_0 + \frac{P_{дин}^{max} + am_2}{c} \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - at; \quad (17)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{P_{дин}^{max} + am_2}{m_2} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - a. \quad (18)$$

В умовах керованого руху ведучої маси час завершення її переміщення знайдемо з умови

$$\dot{x}_{2(\kappa)} = V_0 - at_{(\kappa)} = 0; \quad t_{(\kappa)} = \frac{V_0}{a}. \quad (19)$$

Час зупинки веденої маси слід розшукувати з умови (17), прирівнявши  $\dot{x}_2 = 0$ :

$$\dot{x}_2 = 0 = V_0 + \frac{P_{дин}^{max} + am_2}{c} \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t_{(\kappa)}^{II} - at_{(\kappa)}^{II}. \quad (20)$$

Визначимо навантаження пружного елемента

$$P_{пр} = c(x_1 - x_2) = c \left( V_0 t - \frac{at^2}{2} - V_0 t + \frac{P_{дин}^{max} + am_2}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + \frac{at^2}{2} - \frac{am_2}{c} + \frac{P_{оп}}{c} \right) = P_{оп} + (P_{дин}^{max} + am_2) \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - am_2. \quad (21)$$

Максимальне пружне навантаження при цьому складає що відповідає початку вибігу.

$$P_{пр, max} = P_{оп} + P_{дин}^{max}, \quad (22)$$

Рівняння (14)–(22) відповідають умові взаємодії мас  $m_1$  та  $m_2$ , за якої вони знаходяться у стані вибігу. Якщо досягається умова  $t_{(\kappa)}^I \neq t_{(\kappa)}^{II}$ , то слід розглядати другий етап взаємодії. За формальними ознаками він подібний до випадку, за якого ведуча маса зупинена за деякого значення  $x_1 = x_{1(\kappa)}$ .

Розглянемо найскладніший випадок, при якому  $x_1 = x_{1(\kappa)}$ . Тоді рівняння руху веденої маси

$$m_2 \ddot{x}_2 = -cx_2 - P_{оп}$$

або

$$\ddot{x}_2 + \frac{c}{m_2} x_2 = -\frac{P_{оп}}{m_2}. \quad (23)$$

Розв'язанням останнього рівняння є вираз

$$x_2 = A_1 \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + B_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - \frac{P_{оп}}{c}. \quad (24)$$

За початкових умов, що відповідають запису (15) одержуємо

ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

$$-\frac{P_{оп} + P_{дин}}{c} = B_1 - \frac{P_{оп}}{c}; \quad B_1 = -\frac{P_{дин}^{max}}{c}. \quad (25)$$

Продиференціювавши вираз (24), запишемо першу похідну:

$$\dot{x}_2 = A_1 \sqrt{\frac{c}{m_2}} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - B_1 \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t. \quad (26)$$

Тоді сталі інтегрування:

$$V_0 = A_1 \sqrt{\frac{c}{m_2}}; \quad A_1 = V_0 \sqrt{\frac{m_2}{c}}; \quad (27)$$

Остаточно маємо наступні вирази:

$$x_2 = V_0 \sqrt{\frac{m_2}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - \frac{P_{дин}^{max}}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t - \frac{P_{оп}}{c}; \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = V_0 \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + \frac{P_{дин}^{max}}{c} \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t; \quad (29)$$

$$\ddot{x}_2 = -V_0 \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + \frac{P_{дин}^{max}}{c} \cdot \frac{c}{m_2} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t. \quad (30)$$

Пружне навантаження при цьому становить

$$P_{пр} = P_{дин}^{max} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + P_{оп} - V_0 \sqrt{m_2 c} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t. \quad (31)$$

Графічну ілюстрацію складових пружного навантаження за рівнянням (31) наведено на рис. 4. Косинусоїдальна складова, як бачимо, має амплітуду  $P_{дин}^{max}$ , яка досяглася в режимі пуску системи. Очевидно, що величина  $P_{дин}^{max}$  залежить від умов останнього, однак найгіршими є умови ударного навантаження, за якими

$$P_{дин}^{max} = V_0 \sqrt{m_2 c}.$$

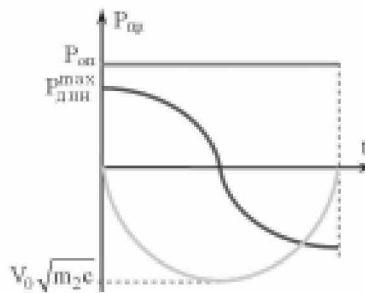


Рис. 4. Складові пружного навантаження

Тоді одержуємо

$$P_{пр} = V_0 \sqrt{m_2 c} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + P_{оп} - V_0 \sqrt{m_2 c} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t + P_{оп}. \quad (32)$$

Знайдемо час досягнення максимального пружного навантаження:

$$\dot{P}_{пр} = 0 = -V_0 \sqrt{m_2 c} \sqrt{\frac{c}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{c}{m_2}} t_{екс} - V_0 \sqrt{m_2 c} \sqrt{\frac{c}{m_2}} \cos \sqrt{\frac{c}{m_2}} t_{екс};$$

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

$$t_{\text{екс}}=0.$$

Звідси максимальне пружне навантаження

$$P_{\text{пр}}^{\text{max}}=V_0\sqrt{m_2c}+P_{\text{он}}. \quad (33)$$

Час вибігу маси  $m_2$  знайдемо за формулою (29), прирівнявши  $\dot{x}_2 = \dot{x}_{2(\kappa)}=0$ :

$$V_0\cos\sqrt{\frac{c}{m_2}}t = -\frac{P_{\text{дин}}}{c}\sqrt{\frac{c}{m_2}}\sin\sqrt{\frac{c}{m_2}}t. \quad (34)$$

Перетворивши маємо:

$$\text{tg}\sqrt{\frac{c}{m_2}}t_{(\kappa)} = -\frac{V_0\sqrt{cm_2}}{P_{\text{дин}}}.$$

Тоді кінцевий час дорівнює

$$t_{(\kappa)} = -\text{arctg}\frac{\frac{V_0\sqrt{cm_2}}{P_{\text{дин}}}}{\sqrt{\frac{c}{m_2}}}. \quad (35)$$

**Висновки.** Виконаний аналіз динаміки вибігу і гальмування двомасових систем дозволяє відмітити наступне.

1. Співвідношення між кінетичною енергією рухомих мас і потенціальною енергією деформації пружних зв'язків між веденою і ведучою масами дозволяють визначити екстремуми їх навантажень.

2. Обмеження в динамічних навантаженнях пружних зв'язків можуть досягатися силовими впливами на ведучу або на ведену маси.

3. Запропоновані аналітичні залежності дозволяють прогнозувати силові взаємодії за динамічного синтезу двомасових систем в частині, що відповідає організації їх вибігу і гальмування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Комаров М.С. Динамика механизмов и машин. — М.: Машиностроение. — 1969. — 296 с.
2. Соколенко А.І., Яровий В.Л., Васильківський К.В. та ін. Моделювання процесів пакування. — Вінниця: Nova knuha. — 2004. — 272 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — М.: Физматгиз. — 1959. — 439 с.
4. Кодра Ю.В., Стоцько З.А. Технологічні машини. Розрахунок і конструювання. — Львів: Львівська політехніка. — 2004. — 468 с.

Одержана редколегією 07.02.2011 р.