УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПІВПЛОЩИНИ З ОТВОРОМ

О.А. ЗВЬОЗДОЧКІНА, В.В. ЛИСЕНКО

Запорізький національний університет

При математичному моделюванні природних процесів перед дослідниками виникають проблеми у розв’язанні задач, що ускладнені такими факторами як механічні навантаження, які супроводжуються тепловими впливами [1-3]. Для розв’язання даного класу задач розроблені аналітичні, чисельно-аналітичні та чисельні методи, які в деяких випадках не спроможні розв’язувати задачі для складних областей без спрощення побудованої математичної моделі досліджуваного процесу [4-6].

В роботі [7] запропонована методика визначення напруженого стану багатозв’язної півплощини, виникаючого під дією механічних та температурних навантажень. В даній статті розглядається задача незв’язаної теорії термопружності в півплощині з квадратним отвором, на межі якого задачі нелінійні температурні крайові умови, що змінюються за часом..

Постановка задачі. Розглянемо статичну задачу про деформації ізотропної однорідної багатозв’язної півплощини, пружні властивості якої не залежать від температури, при неоднорідному температурному полі $T = T(x_s, t)$, де S – півплощина, в якій задане поле температур. Тоді крайова задача у переміщеннях матиме такий вигляд [8]:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha(T - T_0) = 0 \qquad (1)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{ij}\right] n_j\Big|_s = \frac{(1+\nu)(3k+G)}{9KG} q_i(x_s) \qquad (2)$$

Тут T_0 – початкова температура тіла, яку будемо вважати сталою, α –коефіцієнт лінійного розширення, K – модуль об’ємного стиску, S – розглянута область, n_j – направляючі косинуси нормалі до межі області S, ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль пружності при зсуві, де $i, j = 1,2$ та $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$.

Методика розв’язання задачі. Як відомо [9], в теорії термопружності існує найбільш простий для побудови загального розв’язку випадок, коли відбувається поділ задач: спочатку необхідно визначити температуру, а потім з урахуванням знайденого розподілу температур розв’язати рівняння Ламе, що містить фіктивні масові сили.

Розглянемо таку задачу. Нехай під дією теплового потоку на кінцевій ділянці межі півплощини і температури, заданої на частині контуру, що залишилася, відбувся перерозподіл температури в півплощині. Тепер на тій же ділянці межі відбувається вдавлювання твердого штампа. Інша частина межі вільна від зусиль.

Даний процес описується за допомогою двох мішаних задач (рис. 1).

Знайти розподіл температури в півплощині, якщо на межі задана функція температури та її похідна, тобто

$$\Delta T = 0 \qquad (3)$$

при таких крайових умовах

$$T\big|_{\Gamma_2} = 0\,,\;\; \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} = 0\,,\;\; T\big|_{t=0} = 0\,,\;\; T\big|_{\Gamma_3} = 5(1-(2t-1)^2)\,. \tag{4}$$

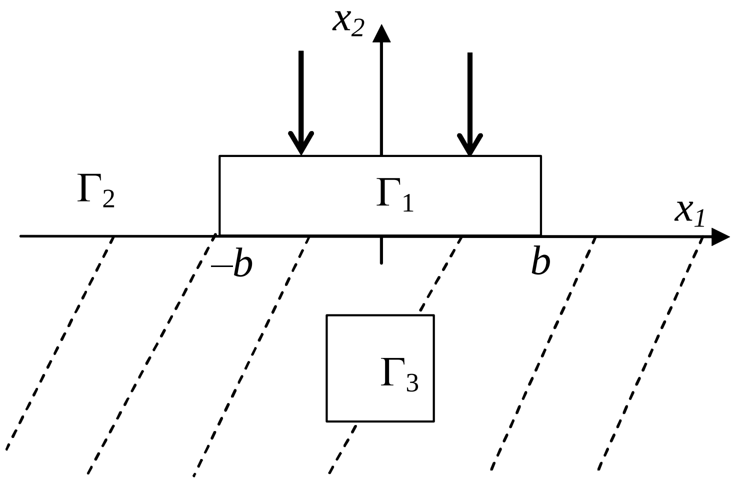

Рис. 1. Задача про вдавлювання штампа в півплощину

Результати розв'язання поставленої задачі (3)-(4) можна використати як фіктивні масові сили для постановки задачі про вдавлювання штампа у нагріту півплощину, тобто розв'язати другу задачу:

$$G\Delta u_j + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + b_j = 0 \tag{5}$$

при таких крайових умовах

$$u_2 = -\tilde{u}\sin a_0 t\,,\;\; |x_1| \le b\,,\;\; x_2 = 0\,;$$

$$\sigma_{12} = 0\,,\;\; |x_1| < \infty\,,\;\; x_2 = 0\,;$$

$$\sigma_{22} = 0\,,\;\; |x_1| > b\,,\;\; x_2 = 0\,.$$

$$\sigma_{ij} n_j\big|_{\Gamma_3} = 0\,,\;\; i, j = 1{,}2\,. \tag{6}$$

Тобто на межі півплощини задані нульова температура та теплоізольована частина контуру. Область послаблена квадратним отвором, межа якого вільна від зусиль. На цій межі задана температура, що має параболічний закон залежності від часу, тобто в початковий момент вона дорівнює нулю, досягає свого максимуму, що дорівнює $5K$ при $t = 0{,}5$, і знову прямує до нуля при $t = 1$.

Враховуючи температуру, отриману при розв'язанні поставленої задачі (3)-(4), переходимо до деякої модифікації закону Гука [9] і одержимо співвідношення для напружень через деформації:

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta - \alpha(T - T_0), \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \tag{7}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\theta - \alpha(T - T_0), \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}. \tag{8}$$

При цьому, крайове інтегральне рівняння буде мати такий вигляд [10]:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_\Gamma p^*_{ij}(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma u^*_{ij}(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\int_\Omega u^*_{ik,k}(\xi, x)Td\Omega, \tag{9}$$

де T – це різниця температур $T - T_0$, задана в області Ω, коми в індексах означають похідні за змінними. Далі застосовуючи метод крайових елементів, одержуємо розв'язок незв'язної термопружної задачі.

Об'ємні сили, що розглядаються відповідно до рівняння (9), потребують обчислення інтегралів по об'єму. У даному випадку інтеграл по області зведений до поверхневого інтеграла і обчислювався чисельно разом із крайовими інтегралами за допомогою квадратурної формули Гауса [10]. Пружні сталі в роботі прийняті такі: $\nu = 0{,}1$, $G = 2{,}6 \cdot 10^5$ кг/см^2, $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^6 K^{-1}$, $a_0 = \omega b / C_2 = 8$, де a_0 – безрозмірна частота, C_2 – прискорення хвилі зсуву в ґрунті [10], b – половина основи штампа, що лежить на межі півплощини.

Дослідження термопружного стану півплощини. Оскільки на межі півплощини задане гармонійне збудження, то при цьому реакція буде залежати від частоти збудженого впливу, а початковими умовами можна зневажити, припускаючи, що перехідний процес завершився, і система перейшла в сталий стан. Але в роботі розглядаються тільки статичні задачі, то у випадку завдання такого навантаження одержимо послідовність розв'язків для кожного кроку за часом у даній області у випадку, коли різниця температур змінюється за часом.

В табл. 1 представлені значення напружень саме в цей період часу у порівнянні з результатами, одержаними при розв'язанні задачі (5)-(6). Центр квадратного отвору зі стороною $0{,}5b$ був заданий в т. $(0; -b)$.

З отриманих результатів випливає, що розподіл напружень в області відбувається відповідно закону, заданому на межі отвору температури, тобто у всіх точках максимальні зміни напруження отримали в один й той же момент часу ($t \approx 0{,}6$), але з деяким запізненням відносно максимуму, який досягла температура за законом в момент часу $t \approx 0{,}5$. Тобто при дослідженні напружень, що з'явилися під дією температури, встановлено, що задавання головних температурних крайових умов призводить до рівномірних змін нормальних напружень в області. Також виявлено, що при наближенні до отвору напруження зростають тільки під дією температури, оскільки отвір з вільною від зусиль межею призводить до зменшення поля напружень в точках біля отвору.

Висновки. З використанням виведених крайових інтегральних представлень для напівнескінченних багатозв'язних областей з отворами, отриманих для розв'язку задач теплопровідності і пружності та методу крайових елементів представляється можливим більш точно визначати поля напружень даних областей при розв'язанні задач незв'язаної термопружності. Оскільки розроблена методика дозволяє враховувати повністю задані навантаження та будувати розв'язки для будь-якої точки даної області.

Таблиця 1.

Розподіл нормальних напружень σ_{22} / G в області під дією локалізованого температурного впливу та при вдавлюванні на прямолінійній межі теплоізольованого штампу. Значення представлені для точок, що знаходяться на осі симетрії ($x_1 = 0$).

x_2	0,0		$-0{,}5b$		$-1{,}5b$		$2{,}0b$	
t	Без темп.	Під дією поля темп.	Без темп.	Під дією поля темп.	Без темп.	Під дією поля темп.	Без темп.	Під дією поля темп.
0,0	–3,593	–3,6052	–1,680	–2,109	–3,114	–3,121	–3,745	–3,745
0,2	–11,626	–12,229	–5,4358	–6,976	–10,076	–10,308	–12,119	–1,211
0,4	0,000	–1,361	0,000	–2,336	0,000	–0,434	0,000	–0,000
0,5	8,120	6,474	3,796	1,259	7,037	6,545	8,464	10,662
0,6	11,626	9,779	5,4358	2,834	10,076	9,552	12,119	12,114
0,8	0,000	–1,939	0,000	–2,282	0,000	–0,506	0,000	–0,016
1,0	–11,626	–13,210	–5,4358	–6,786	–10,076	–10,451	–12,119	–12,154

Список літератури:

1. Андронов В.А. Термоупругая задача устойчивости композитных континуально-дискретных пластин и оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – №3, т. 5. – С. 3-27.

2. Александров А.Е., Катков Р.Э. Параметрическая оптимизация технических объектов на основе базового варианта с использованием программной системы "Термоупругость-3В" // Информационные технологии. – 2002. – №9. – С. 15-26.

3. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Контактные задачи стационарной термоупругости для полупространства. – Львов, 1984. – 27 с.

4. Головач Н.П., Дияк І.І. Алгоритм обчислення температурних деформацій у задачі термопружності ПМГЕ // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – № 50. – С. 59-62.

5. Трайтак С.Д. Методы решения краевых задач в областях с многосвязной границей // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – №4, Т. 9. – С. 495-521.

6. Алейников С.М. Метод граничних элементов в контактных задач для упругих пространственно неоднородных оснований. – М. Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2000. – 754 с.

7. Звьоздочкіна О.А., Толок В.О. Розв'язок пружної задачі з нестаціонарним тепловим навантаженням для півплощини з включенням // Вісник Запорізького держуніверситету. – 1999. – №1. – С. 49-53.

8. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М., 1976. – 367 с.

9. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

РЕЗЮМЕ
УДК 539.3
Исследование термоупругого состояния полуплоскости с отверстием
Е.А. Звездочкина, канд. физ.-мат.наук, В.В. Лисенко

В работе с помощью модифицированного метода граничных элементов представлено решение задачи несвязанной теории термоупругости о вдавливании теплоизолированного штампа в полуплоскость с отверстием, на границе которого заданы нелинейные температурные условия. Исследованы напряжения, возникающие в полуплоскости под действием нестационарной температуры.

SUMMARY
УДК 539.3
The researches of the Thermoelastic state of half-plane with aperture
Ye.A.Zvyozdochkina, V.V.Lysenko

In this paper The solution of task of unrelated theory of thermoelastic is considered. By the modified BEM a task about pressing of stamp in a half-plane with aperture is solved. On the border of aperture nonlinear temperature terms are set. The stresses in the considered domain is researched.