

ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ТА ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ СИМЕТРИЧНИХ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ З ДОПОМОГОЮ MS EXCEL

У статті проілюстровано комбінований підхід (традиційний та засобами Ms Excel) до розв'язання та економічного аналізу симетричних двоїстих задач математичного програмування.

Ключові слова: пряма та двоїста задачі, економічна інтерпретація та економічний аналіз, симетричні задачі, рентабельність продукції, дефіцитність та взаємозамінність ресурсів.

Оскільки двоїста задача формулюється на основі даних прямої задачі, то і економічний зміст двоїстої задачі залежить від того, який економічний процес моделюється прямою задачею.

Розглянемо приклад економічної інтерпретації ([5, с.35]) симетричних двоїстих задач вигляду

Пряма задача	Двоїста задача
$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}),$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}),$
$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$	$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$

який найбільш виразно ілюструє ефективність застосування теорії двоїстості для аналізу економічних процесів, пов'язаних з виробництвом продукції та оптимальним використанням обмежених ресурсів.

Економічна інтерпретація прямої задачі. Для виробництва n видів продукції використовуються m видів ресурсів (сировина, обладнання, трудові ресурси, електроенергія, фінанси тощо). Відомі наявні запаси ресурсів b_i ($i = \overline{1, m}$), норми витрат i -го ресурсу на виробництво одиниці j -го виду продукції a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), а також ціна реалізації одиниці j -го виду продукції c_j ($j = \overline{1, n}$). Знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при якому виручка від

реалізації продукції буде максимальною, а витрати ресурсів не перевищуватимуть їх наявних запасів.

Економічна інтерпретація двоїстої задачі. Знайти такі оптимальні оцінки (неявні, тіньові ціни) ресурсів $U=(y_1, y_2, \dots, y_m)$, за якими загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на виробництво продукції, буде мінімальною, а вартість (двоїста оцінка) ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці кожного виду продукції, буде не менше ціни реалізації одиниці цієї продукції.

Якщо пряму та двоїсту задачі звести до канонічної форми, то системи обмежень цих задач набувають відповідно вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j, \quad (j = \overline{1, n}),$$

а додаткові змінні прямої і двоїстої задач мають такий економічний зміст.

Додаткова змінна x_{n+i} прямої задачі показує, скільки при даному плані випуску продукції залишається не використаним ресурсу i -го виду, тобто вона визначає залишок цього ресурсу.

Додаткова змінна y_{m+j} двоїстої задачі показує, наскільки двоїста оцінка ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці j -го виду продукції (тобто вартість витрат ресурсів) перевищує ціну реалізації c_j цього виду продукції.

Згідно з теорією двоїстості [4, с.234]) для знаходження розв'язків симетричних двоїстих задач достатньо розв'язати симплексним методом лише пряму задачу, оскільки компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі співпадають з оцінками у останній симплексній таблиці, які відповідають додатковим змінним прямої задачі. Причому між змінними обох задач у останній симплексній таблиці (як і у попередніх таблицях) існує така відповідність:

Таблиця 1

Змінні прямої задачі	
Основні	Додаткові

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}
↕	↕		↕		↕	↕	↕		↕		↕
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+j}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_i	...	y_m
Додаткові						Основні					
Змінні двоїстої задачі											

З цієї відповідності випливає, що оцінки у останній симплексній таблиці, які відповідають основним змінним прямої задачі, є значеннями додаткових змінних двоїстої задачі і, отже, також мають економічний зміст.

Таким чином, розв'язавши симплекс-методом пряму задачу, ми знаходимо оптимальний план випуску продукції і ціну одиниці кожного виду ресурсу. Оскільки на відміну від цін на продукцію, які відомі до початку виробництва, ціни на ресурси залежать від умов виробництва (і при зміні цих умов також можуть змінюватися), тому їх називають тіншовими цінами або двоїстими оцінками ресурсів.

Перейдемо тепер до аналізу оптимального плану випуску продукції та до аналізу ресурсів, що витрачаються на виробництво цієї продукції.

Оцінка рентабельності продукції. Рентабельність або нерентабельність продукції встановлюється із співвідношення між вартістю (двоїстою оцінкою) ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці продукції та ціною одиниці цієї продукції. За другою теоремою двоїстості рентабельними, не збитковими вважаються лише ті види продукції, для кожного з яких вартість витрат на одиницю продукції дорівнює ціні одиниці цього виду продукції. Саме такі види продукції включені до оптимального плану випуску. Якщо ж вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці продукції, перевищує ціну одиниці цієї продукції, то така продукція є нерентабельною і до плану випуску не включається.

Згідно з економічним змістом додаткових змінних двоїстої задачі та їх місцем у останній симплексній таблиці (табл.1), рентабельним видам продукції у останній симплексній таблиці відповідають нульові значення додаткових змінних двоїстої задачі (тобто нульові оцінки $z_j - c_j$), а нерентабельним видам продукції – додатні значення додаткових змінних двоїстої задачі (тобто додатні

оцінки $z_j - c_j$, які і показують, наскільки вартість витрат на одиницю продукції перевищує ціну реалізації).

Зауважимо, що можливий випадок, коли рентабельна продукція (тобто продукція, якій у останній симплексній таблиці відповідає нульова оцінка) виявилася не включеною до оптимального плану випуску. Цей випадок означає, що існує інший оптимальний план, за яким ця продукція буде випускатися (але замість іншої також рентабельної продукції). Більш того, це означає, що існує безліч планів випуску усієї рентабельної продукції при одній і тій самій максимальній виручці від її реалізації.

Аналіз дефіцитності ресурсів. Ресурси, які при реалізації оптимального плану випуску продукції використовуються повністю, називають дефіцитними, а які використовуються не повністю, називають недефіцитними. Дефіцитні та недефіцитні ресурси можна визначити за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо в оптимальному розв'язку прямої задачі деяка додаткова змінна дорівнює нулю, то відповідний цій змінній ресурс є дефіцитним, а якщо додаткова змінна більше нуля, то відповідний ресурс недефіцитний і залишок цього ресурсу при реалізації оптимального плану випуску дорівнює величині цієї додаткової змінної.

В силу відповідності між додатковими змінними прямої задачі та основними змінними двоїстої задачі (табл.1) дефіцитність чи не дефіцитність ресурсів можна встановити також за допомогою двоїстих оцінок цих ресурсів. За другою теоремою двоїстості, якщо при оптимальному плані виробництва продукції деякий ресурс використовується не повністю, тобто не є дефіцитним, то двоїста оцінка (тіньова ціна) такого ресурсу дорівнює нулю. Додатну ж двоїсту оцінку мають лише ті види ресурсів, які при оптимальному плані виробництва продукції використовуються повністю, тобто є дефіцитними. Більш того, за третьою теоремою двоїстості величина двоїстої оцінки ресурсу (його тіньова ціна) показує, наскільки збільшується прибуток (виручка) від реалізації виробленої продукції при збільшенні запасу цього ресурсу на одну одиницю.

Таким чином, за допомогою двоїстих оцінок ресурсів (їх тіньових цін) ми можемо визначити не тільки дефіцитність ресурсів, а й ступінь їх дефіцитності: чим дефіцитнішим є ресурс, тим більша його двоїста оцінка (а отже, й вплив на максимізацію прибутку).

Інтервали зміни запасів ресурсів. Оскільки при збільшенні чи зменшенні запасу i -го ресурсу на одну одиницю прибуток (виручка) відповідно збільшується чи зменшується на y_i грошових одиниць, то при зміні запасу i -го ресурсу на Δb_i одиниць прибуток (виручка) від реалізації виробленої продукції зміниться на величину

$$\Delta F_{max} = y_i \Delta b_i. \quad (1)$$

Але користуватися цією формулою можна лише за умови, що при зміні запасів ресурсів не змінюються їх оптимальні двоїсті оцінки (їх тіньові ціни). Пояснення просте: при зміні запасу деякого ресурсу ми можемо отримати такий новий план випуску продукції, при якому цей ресурс стане недефіцитним (або навпаки, дефіцитним), отже, його двоїста оцінка зміниться і прогноз, зроблений на основі старих двоїстих оцінок ресурсів, виявиться хибним.

Тому перш ніж користуватися формулою (1) для прогнозу зміни прибутку, знаходять такий інтервал зміни запасу i -го ресурсу, в межах якого двоїсті оцінки ресурсів (їх тіньові ціни) залишаються незмінними. *Інтервали* можливих змін запасів ресурсів, у межах яких не змінюються їх двоїсті оцінки, називають також *інтервалами стійкості* (незмінності) двоїстих оцінок.

Нижню границю зменшення запасу i -го ресурсу позначають через $\Delta b_i^{(-)}$, а верхню границю збільшення його запасу позначають через $\Delta b_i^{(+)}$.

Якщо змінюється запас тільки одного i -го ресурсу, а запаси інших ресурсів не змінюються, тоді нижню границю $\Delta b_i^{(-)}$ зменшення та верхню границю $\Delta b_i^{(+)}$ збільшення цього ресурсу можна знайти з останньої симплексної таблиці за формулами

$$\Delta b_i^{(-)} = \min \left\{ \frac{x_i^*}{a'_{i,n+i}} \right\} \quad \text{для } a'_{i,n+i} > 0, \quad (2)$$

$$\Delta b_i^{(+)} = \min \left\{ -\frac{x_i^*}{a'_{i,n+i}} \right\} \quad \text{для } a'_{i,n+i} < 0, \quad (3)$$

де x_i^* – елементи стовпця “значення P_i ”, а $a'_{i,n+i}$ – елементи стовпця “ x_{n+i} ”, який відповідає двоїстій оцінці y_i i -го ресурсу (табл.1). Зауважимо, що у формулі (3) знаходиться мінімальне з додатних чисел. І так, якщо величина Δb_i , на яку змінюється запас i -го ресурсу, задовольняє нерівності $-\Delta b_i^{(-)} \leq \Delta b_i \leq \Delta b_i^{(+)}$, тоді величина ΔF_{max} , на яку змінюється виручка, знаходиться за формулою (1).

Зауважимо також, що якщо запас i -го ресурсу змінюється в межах $b_i - \Delta b_i^{(-)} \leq b_i \leq b_i + \Delta b_i^{(+)}$, то не змінюються не тільки двоїсті оцінки ресурсів, а й асортимент випуску продукції, тобто не змінюються види продукції, включені до оптимального плану виробництва, або, як ще говорять, не змінюється структура оптимального плану (але сам план випуску змінюється).

Взаємозамінність ресурсів. Припустимо, що з деяких причин постачання i -го дефіцитного ресурсу зменшилось на Δb_i одиниць, причому зменшення запасу на Δb_i одиниць знаходиться у межах тих можливих змін, за яких оптимальні двоїсті оцінки ресурсів залишаються незмінними. Тоді за допомогою оптимальних двоїстих оцінок можна визначити, якою кількістю Δb_k додаткового постачання k -го дефіцитного ресурсу можна замінити недопостачання Δb_i одиниць i -го дефіцитного ресурсу так, аби при цьому максимальна виручка залишалась незмінною.

Оскільки при зменшенні запасу i -го ресурсу на Δb_i одиниць виручка зменшується на $y_i \Delta b_i$ грошових одиниць, а при збільшенні запасу k -го ресурсу на Δb_k одиниць виручка збільшується на $y_k \Delta b_k$ грошових одиниць, то максимальна виручка залишатиметься незмінною, якщо збитки від недопостачання i -го дефіцитного ресурсу компенсуються за рахунок додаткового постачання k -го дефіцитного ресурсу, тобто якщо виконується рівність

$$y_k \Delta b_k = y_i \Delta b_i.$$

З цієї рівності ми і знаходимо, якою кількістю одного ресурсу можна замінити певну кількість іншого ресурсу, щоб загальна виручка не змінилась:

$$\Delta b_k = \frac{y_i}{y_k} \Delta b_i. \quad (4)$$

Нагадаємо, що при заміні за формулою (4) i -го ресурсу на k -й ресурс, величини Δb_i та Δb_k не повинні виходити за межі інтервалів стійкості двоїстих оцінок цих ресурсів.

Якщо у формулі (4) покласти $\Delta b_i=1$, тоді

$$\Delta b_k = \frac{y_i}{y_k} . \quad (5)$$

Отже, відношення (5) двоїстих оцінок i -го та k -го ресурсів показує, скільки потрібно додатково одиниць k -го ресурсу при зменшенні на одиницю обсягу i -го ресурсу. Тобто відношення двоїстих оцінок дефіцитних ресурсів визначає норму взаємозамінності цих ресурсів.

Оцінка рентабельності нової продукції. Розглянемо можливість випуску нової продукції, для якої відомі норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції та ціна реалізації одиниці продукції.

Для з'ясування доцільності виробництва нової продукції можна цей вид продукції включити в умови задачі і розв'язати задачу заново. Якщо новий вид продукції виявиться не включеним до оптимального плану, то не зміниться ні асортимент випуску продукції, ні оптимальний план, отже, не зміняться й знайдені двоїсті оцінки ресурсів. Якщо ж цей вид продукції буде включений до оптимального плану випуску, то асортимент випуску продукції зміниться, а отже, зміняться і двоїсті оцінки ресурсів.

Тому за нових двоїстих оцінок ресурсів рентабельність нової продукції означатиме, що вартість витрат на одиницю продукції дорівнює ціні реалізації, а за старих означатиме, що вартість витрат на одиницю нової продукції не більше ціни її реалізації.

Таким чином, для з'ясування доцільності випуску нової продукції немає необхідності розв'язувати нову задачу, оскільки можна скористатися вже знайденими двоїстими оцінками ресурсів. Новий вид продукції буде рентабельним, якщо двоїста оцінка ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці цієї продукції, буде не більше ціни її реалізації, і буде не рентабельним, якщо ця двоїста оцінка ресурсів буде більше ціни її реалізації.

Інтервали зміни цін на продукцію. В результаті конкуренції на ринку збуту ціна виробленої на підприємстві одиниці продукції може “впасти” або “підскочити”. За цих умов перед виробником продукції постає питання: який план випуску продукції буде оптимальним (тобто найкращим)? Чи потрібно для оптимізації роботи підприємства змінювати структуру оптимального плану виробництва, чи ні?

Виявляється, є такі *інтервали зміни цін на продукцію кожного виду, в межах яких оптимальний план випуску продукції не змінюється*, тобто він залишається найкращим навіть за коливань цін в межах вказаних інтервалів.

Нижня границя зменшення $\Delta c_k^{(-)}$ та верхня границя збільшення $\Delta c_k^{(+)}$ ціни одиниці продукції k -го виду, включеної до оптимального плану випуску, знаходиться з останньої симплексної таблиці за формулами:

$$\Delta c_k^{(-)} = \min \left\{ \frac{\Delta_j}{a'_{kj}} \right\}, \quad a'_{kj} > 0, \quad (6)$$

$$\Delta c_k^{(+)} = \min \left\{ -\frac{\Delta_j}{a'_{kj}} \right\}, \quad a'_{kj} < 0, \quad (7)$$

де $\Delta_j = Z_j - C_j$ ($j = \overline{1, n+m}$) – оцінки в останньому рядку симплексної таблиці, а a'_{kj} – елементи k -го рядка таблиці, які відповідають базисній змінній x_k .

Таким чином, якщо ціна одиниці продукції змінюватиметься у межах $c_k - \Delta c_k^{(-)} \leq c_k \leq c_k + \Delta c_k^{(+)}$, то оптимальний план випуску продукції змінювати не потрібно. Якщо ж коливання ціни одиниці продукції вийде за ці межі, то для ефективної роботи підприємства структуру оптимального плану виробництва потрібно змінити, для чого необхідно розв'язати задачу за тих цін на продукцію, які склалися на ринку.

Розглянемо реалізацію методу на прикладі розв'язаному двома способами (традиційному та з використанням MS Excel [1, с.70]).

Приклад . Задача оптимального виробничого планування. Фірма випускає чотири види продукції А, В, С і D, на виробництво якої витрачає три види ресурсів (наприклад: працю, фінанси та сировину), які вона має в обмеженій кількості. Норми витрат продукції на виготовлення одиниці продукції, їх наявні запаси, а також ціна реалізації одиниці продукції наведені в таблиці 2:

Таблиця 2

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Запаси ресурсів
	A	B	C	D	
1	2	1	1	2	170
2	2	5	1	1	290
3	1	3	1	2	200
Ціна	20	24	10	14	

1. Визначити план випуску продукції, при якому дохід фірми від реалізації продукції буде максимальним, а також оцінити ресурси, які використовуються для виробництва продукції.
2. Проаналізувати рентабельність продукції, ступінь дефіцитності ресурсів та їх вплив на прибуток фірми.
3. Знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок (інтервали змін запасів ресурсів).
4. Постачальники першого ресурсу попереджають фірму про зменшення постачання на 28 одиниць. Визначити: а) скільки одиниць другого ресурсу потрібно додатково закупити, щоб компенсувати втрати фірми від зменшення на 28 одиниць запасу першого ресурсу, і яку максимальну суму можна за них сплатити; б) яким тоді буде новий план випуску продукції?
5. Знайти інтервали зміни цін на продукцію.
6. Відділ маркетингу фірми прогнозує, що в результаті конкуренції на ринку збуту ціна на продукцію D може зрости не більш ніж на 20%, на продукцію B - зменшиться на 40%. Як кожний з цих випадків вплине на оптимальний план випуску продукції та на прибуток?
7. Фірма може випускати додатково новий вид продукції, для якого норми витрат ресурсів на одиницю продукції становлять 10, 8 і 14 одиниць, а орієнтовна ціна одиниці продукції дорівнює 90 ум.од. Чи вигідно фірмі випускати цю продукцію?

Розв'язування. Математична модель задачі знаходження оптимального плану виробництва має вигляд

$$F=20x_1+24x_2+10x_3+14x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4 \leq 170, \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4 \leq 290, \\ x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leq 200, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,7}).$$

або у канонічній формі

$$F = 20x_1 + 24x_2 + 10x_3 + 14x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5 = 170, \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4+x_6 = 290, \\ x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_7 = 200, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,7}).$$

Математична модель задачі знаходження оптимальних двоїстих оцінок ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, має такий вигляд

$$Z=170y_1+290y_2+200y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 20, \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 24, \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0,$$

або у канонічній формі

$$Z=1200y_1+960y_2+1000y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 = 20, \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 - y_5 = 24, \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_6 = 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_7 = 14, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,6}).$$

Розв'яжемо нашу задачу симплекс-методом користуючись засобами MS Excel. Запишемо всі дані в симплекс-таблицю. Зауважимо, що при створенні формул переходу всі елементи напрямного стовпця фіксуються (клавіша F4). Виконуючи переходи від одної до наступної таблиці з допомогою кроків симплекс-методу (див. [2]), отримаємо:

Таблиця 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			0	20	24	10	14	0	0	0	θ_i
2	Базис	Сібаз	Pi	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	
3	X5	0	170	2	1	1	2	1	0	0	170
4	X6	0	290	2	5	1	1	0	1	0	58
5	X7	0	200	1	3	1	2	0	0	1	66,67
6			0	-20	-24	-10	-14	0	0	0	
7	X5	0	112	1,6	0	0,8	1,8	1	-0,2	0	70
8	X2	24	58	0,4	1	0,2	0,2	0	0,2	0	145
9	X7	0	26	-0,2	0	0,4	1,4	0	-0,6	1	
10			1392	-10,4	0	-5,2	-9,2	0	4,8	0	
11	X1	20	70	1	0	0,5	1,125	0,625	-0,125	0	140
12	X2	24	30	0	1	0	-0,25	-0,25	0,25	0	
13	X7	0	40	0	0	0,5	1,625	0,125	-0,625	1	80
14			2120	0	0	0	2,5	6,5	3,5	0	
15	X1	20	30	1	0	0	-0,5	0,5	0,5	-1	
16	X2	24	30	0	1	0	-0,25	-0,25	0,25	0	
17	X3	10	80	0	0	1	3,25	0,25	-1,25	2	
18			2120	0	0	0	2,5	6,5	3,5	0	
19				Y4	Y5	Y6	Y7	Y1	Y2	Y3	

Оскільки всі оцінки в 14 рядку таблиці невід'ємні, то це означає, що отриманий розв'язок оптимальний $F_{\max} = 2120$ і $X_{\text{opt}}^{(1)} = (70; 30; 0; 0; 0; 0; 40)$. Так як оцінка в

строчці 14 для змінної x_3 дорівнює нулю та їй відповідає небазисний стовбець, то це означає, що існує альтернативний розв'язок. Виконаємо перехід до нової таблиці. Отримаємо $x_{opt}^{(2)} = (30; 30; 80; 0; 0; 0; 0)$.

В нижніх строчках (14 та 18) останніх двох таблиць (стовці X_5, X_6, X_7) маємо оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{opt} = (6,5; 3,5; 0)$ і $Y_{min} = F_{max} = 2120$, за першою теоремою двоїстості. Проаналізуємо перший оптимальний розв'язок (другий пропонуємо читачам провести самостійно).

1. Фірма отримає максимальний доход у 2120 ум. од., якщо вона випускатиме 70 од. продукції виду А, 30 од. продукції виду В та не випускатиме продукції видів С і D. При такому випуску продукції ресурси, що використовуються для її виробництва, мають такі оптимальні двоїсті оцінки (тіньові ціни): $y_1=6,5, y_2=3,5, y_3=0$.
2. Види продукції А, В і С є рентабельними (продукція виду С входить в другий альтернативний план), оскільки відповідні їм додаткові змінні y_4, y_5 та y_6 двоїстої задачі дорівнюють нулю. Продукція виду D не є рентабельною, оскільки двоїста оцінка (вартість витрат) ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці цієї продукції, на 2,5 ум. од. ($y_7=2,5$) перевищує ціну її реалізації. Отже, випускати цю продукцію фірмі не вигідно, а щоб продукція виду D була рентабельною потрібно, щоб ціна реалізації одиниці цієї продукції була не менше ніж 16,5 ум. од.

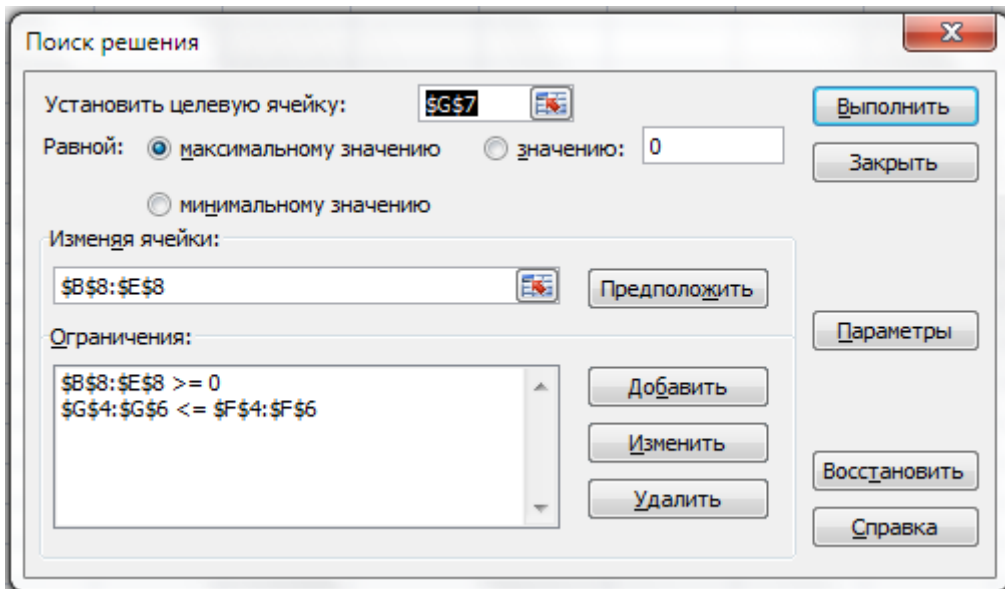
При такому плані виробництва продукції перший та другий ресурси використовуються повністю ($x_5=0, x_6=0$), а третій ресурс – не повністю, його залишок становить 40 одиниць ($x_7=40$). Отже, перший та другий ресурси є дефіцитними і їм відповідають додатні двоїсті оцінки $y_1=6,5$ та $y_2=3,5$, а третій ресурс – недефіцитний і має нульову двоїсту оцінку $y_3=0$.

Найбільш дефіцитним є перший ресурс, оскільки при збільшенні його запасу на одну одиницю ($b_1=170+1=171$) доход фірми зростає на 6,5 ум. од., у той час, як при збільшенні на одну одиницю запасу другого ресурсу ($b_2=290+1=291$) доход фірми зростає на 3,5 ум. од.

3. Для знаходження інтервалів змін запасів ресурсів скористаємося *Поиск решения* та *отчет по устойчивости*. Спочатку внесемо дані на сторінку Ms Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача оптимаольного виробничого планування						
2	Норми витрат на виготовл. один. прод.						
3	Ресурси	A	B	C	D	Запаси	Використ.
4	1	2	1	1	2	170	6
5	2	2	5	1	1	290	9
6	3	1	3	1	2	200	7
7	Ціна	20	24	10	14	Прибуток	68
8	План	1	1	1	1		

Виставимо курсор на комірку цільової функції (G7) та через *Данные* викликаємо функцію-оптимізатор *Поиск решения*. Внесемо всі дані згідно математичної моделі,



та натиснувши команду *Выполнить* отримаємо

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача оптимаольного виробничого планування						
2	Норми витрат на виготовл. один. прод.						
3	Ресурси	A	B	C	D	Запаси	Використ.
4	1	2	1	1	2	170	170
5	2	2	5	1	1	290	290
6	3	1	3	1	2	200	160
7	Ціна	20	24	10	14	Прибуток	2120
8	План	70	30	0	0		

розв'язок нашої задачі та *отчет по устойчивости*, який містить нижні та верхні межі інтервалів для запасів ресурсів.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости						
Изменяемые ячейки						
		Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
\$B\$8	План А	70	0	20	28	0
\$C\$8	План В	30	0	24	0	14
\$D\$8	План С	0	0	10	0	1E+30
\$E\$8	План D	0	-2,5	14	2,5	1E+30
Ограничения						
		Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение
\$G\$4	Використ.1	170	6,5	170	120	112
\$G\$5	Використ.2	290	3,5	290	64	120
\$G\$6	Використ.3	160	0	200	1E+30	40

Запишемо інтервали змін запасів кожного з трьох ресурсів у одній таблиці

Ресурси	Ціна	Запас	$\Delta b_i^{(-)}$	$\Delta b_i^{(+)}$	$b_i - \Delta b_i^{(-)} \leq b_i \leq b_i + \Delta b_i^{(+)}$
Рес.1	6,5	170	112	120	$58 \leq b_1 \leq 290$
Рес.2	3,5	290	120	64	$170 \leq b_2 \leq 354$
Рес.3	0	200	40	–	$160 \leq b_3 < +\infty$

Таким чином, якщо запаси *одного* з ресурсів (не всіх одночасно) змінюватимуться у межах відповідного інтервалу, а запаси інших ресурсів залишатимуться тими ж самими, то не зміняться ні структура оптимального плану випуску (асортимент випуску продукції), ні оптимальні двоїсті оцінки ресурсів.

4. Обчислимо за формулою (4), на скільки одиниць Δb_2 можна збільшити постачання другого ресурсу при зменшенні на 28 одиниць постачання першого ресурсу:

$$\Delta b_2 = \frac{y_1}{y_2} \Delta b_1 = \frac{6,5}{3,5} \cdot 28 = 52.$$

Зазначимо, що недопостачання 28 одиниць першого ресурсу можна замінити додатковим постачанням 52 одиниці другого ресурсу лише за умови, що при такому заміщенні ресурсів не змінюються їх оптимальні двоїсті оцінки.

Знайдемо з останньої симплексної таблиці (табл. 3) новий план випуску продукції, якщо запас другого ресурсу збільшується на 52 одиниці і одночасно запас першого ресурсу зменшується на 28 одиниць (тобто при $\Delta b_1 = -28$ і $\Delta b_2 = 52$).

Елементи стовпців “ x_5 ” та “ x_6 ”, що відповідають першому та другому ресурсам, показують, як зміниться оптимальний розв’язок прямої задачі при збільшенні на одну одиницю запасу відповідного ресурсу. Отже, новий оптимальний план випуску продукції буде таким:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} - 28 \begin{pmatrix} 0,625 \\ -0,25 \\ 0,125 \end{pmatrix} + 52 \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,25 \\ -0,625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 50 \\ 4 \end{pmatrix},$$

тобто $X'_{opt} = (46; 50; 0; 0; 0; 0; 4)$.

І так, якщо запас другого ресурсу збільшується на 52 одиниці (і становить 342 одиниці), а запас першого ресурсу зменшується на 28 одиниць (і становить 142 одиниці), то випуск продукції виду А зменшується на 24 одиниці, випуск продукції виду В збільшується на 20 одиниць і використання третього ресурсу збільшується на 36 одиниць (залишок зменшується на 36 одиниць). Оскільки при одночасній зміні запасів першого і другого ресурсів структура оптимального плану випуску не змінилася ($x'_1 > 0$, $x'_2 > 0$, $x'_7 > 0$), то не змінилися й оптимальні двоїсті оцінки ресурсів.

Отже, доход фірми залишиться незмінним і рівним $F_{max} = 2120$ ум.од., якщо зменшення постачання першого ресурсу на 28 одиниць (що зменшує доход на $6,5 \cdot 28 = 182$ ум.од.) компенсувати за рахунок збільшення постачання другого ресурсу на 52 одиниці (що збільшує доход на $3,5 \cdot 52 = 182$ ум.од.). Це означає, що максимальна ціна, яку можна сплатити за 52 додаткових одиниць другого ресурсу, дорівнює 182 ум.од.

5. Інтервали зміни цін на продукцію знаходяться за формулами (6), (7) аналогічно інтервалам зміни запасів ресурсів, тільки тепер розглядаються відношення елементів останнього рядка останньої симплексної таблиці до відповідних ненульових елементів рядка, що відповідає базисній змінній x_k , яка є основною змінною прямої задачі:

$$\Delta c_1^{(-)} = \min \left\{ \frac{0}{1}; \frac{0}{0,5}; \frac{2,5}{0,125}; \frac{6,5}{0,625} \right\} = 0, \quad \Delta c_1^{(+)} = -\frac{3,5}{-0,125} = 28,$$

$$\Delta c_2^{(-)} = \min \left\{ \frac{0}{1}; \frac{3,5}{0,25} \right\} = 0, \quad \Delta c_2^{(+)} = \min \left\{ \frac{-2,5}{-0,25}; \frac{-6,5}{-0,25} \right\} = 10.$$

Оскільки продукція виду С є нерентабельною для даного плану ($x_3=0$), то для ціни $c_3=10$ одиниці цієї продукції - верхня границя її збільшення, тобто $\Delta c_3^{(+)}=0$, а для продукції виду D - $\Delta c_4^{(+)} = \Delta_4=2,5$.

Запишемо інтервали зміни цін на продукцію у одній таблиці:

Продукція	Ціна	$\Delta c_k^{(-)}$	$\Delta c_k^{(+)}$	Інтервал
Прод.1(А)	20	0	28	$20 < c_1 \leq 48$
Прод.2(В)	24	0	10	$24 \leq c_2 \leq 34$
Прод.3(С)	10	-	0	$-\infty \leq c_3 \leq 10$
Прод.1(А)	14	-	2,5	$-\infty < c_1 \leq 16,5$

Таким чином, якщо ціна одиниці одного з чотирьох видів продукції (тільки одного, а не всіх одночасно) коливатиметься у межах відповідного інтервалу, то оптимальний план випуску продукції залишатиметься незмінним, тобто найкращим навіть за такого коливання ціни.

6. Оптимальний план випуску продукції не зміниться, якщо ціна на продукцію виду D збільшиться не більше, ніж на $\Delta c_4^{(+)}=2,5$ ум. од. За прогнозом ціна на цю продукцію може збільшитися на 20%, тобто на $\Delta c_4=14 \cdot 0,2=2,8$ ум. од., отже, оптимальний план випуску продукції зміниться, оскільки продукція виду D стане рентабельною і випускати її буде вигідно.

Оскільки збільшення ціни одиниці продукції виду В на 40%, тобто на $\Delta c_2=24 \cdot 0,4=9,6$ ум. од. не перевищує верхню границю збільшення $\Delta c_2^{(-)}=10$ ум. од., то оптимальний план випуску продукції залишається при цьому незмінним. Але доход фірми збільшується на $\Delta F_{\max}=\Delta c_2 \cdot x_2=9,6 \cdot 30=288$ ум. од.

7. Підрахуємо за допомогою двоїстих оцінок вартість ресурсів, що витратяться на виробництво одиниці нової продукції, і порівняємо її з орієнтовною ціною, рівною 90 ум. од.

$$6,5 \cdot 10 + 3,5 \cdot 8 + 0 \cdot 14 = 93 > 90.$$

Оскільки витрати на виробництво одиниці нової продукції більші, ніж орієнтовна ціна цієї продукції, то така продукція нерентабельна і випускати її не вигідно.

Зауваження. В *Поиск решения* у звіті по стійкості немає від'ємного значення для продукції виду С, тому для цієї задачі існує альтернативний план випуску. Для його отримання ми виконали ще один перехід симплекс-методом, або потрібно накладати та змінювати обмеження на змінну X_3 в програмі *Поиск решения*.

Використана література:

1. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.
2. Листопад В.В. Реалізація симплекс-методу для розв'язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel.//Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 19: збірник наукових праць/ за ред. В.Д. Сиротюка. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – с.211 – 216.
3. Листопад В.В., Медведєв М.Г., Шоха В.П. Два підходи до розв'язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel. Збірник наукових праць НУХТ, «Інтелект ХХІ №2. 2014. с. 111- 118.
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2005 – 452с.
5. Навчальний посібник та практикум з курсу "Математичне програмування"/Укл. доц. Круглова С.П. – К.: АПСВ, 2005. – 82с.

Економічна інтерпретація та економічний аналіз симетричних двоїстих задач з допомогою Ms Excel/ Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 50: збірник наукових праць /за ред. В.Д.Сиротюка. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2015. – с. 104-115.

Анотація. У статті проілюстровано комбінований підхід(традиційний та засобами Ms Excel) до розв'язання та економічного аналізу симетричних двоїстих задач математичного програмування.

Ключові слова: пряма та двоїста задачі, економічна інтерпретація та економічний аналіз, симетричні задачі, рентабельність продукції, дефіцитність та взаємозамінність ресурсів.

Листопад В. В., Экономическая интерпретация и экономический анализ симметрических двоистых задач с помощью Ms EXcel

Аннотация. В статье представлен комбинированный подход (традиционный и с помощью средств Ms Excel) для решения и экономического анализа симметрических двоистых задач математического программирования.

Ключевые слова: прямая и двоистая задачи, экономическая интерпретация и экономический анализ, симметрические задачи, рентабельность продукции, дефицитность и взаимозаменяемость ресурсов.

Lystopad V.V. Economic Interpretation and Economic Analysis of the Symmetric Binary Problems by the means of Ms EXcel

This article illustrates the combined approach (traditional and by the means of Ms EXcel) for the solution and economic analysis of the symmetric binary problems.

Key words: primal an binary problems, economic interpretation and economic analysis, symmetric problems, resources deficiency and interchangeability