15. ПРО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ

О.П. Бойко

Національний південноукраїнський педагогічний університет ім. К. Ушинського

О.В. Островська

Національний університет харчових технологій

Доповідь присвячена геометрично-аксіоматичному підходу до введення поняття визначника.

Останнім часом в сучасній навчальній літературі наявна тенденція відходу від стандартної схеми означення визначника матриці, як суми добутків елементів матриці

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n},$$

де через S_n позначено множину всіх перестановок на n елементах, $Inv\,\sigma$ позначає кількість інверсій перестановки σ та $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Ця формула є досить важкою для сприйняття та одночасно потребує багатьох попередніх відомостей.

Традиційному підходу можна протиставити геометричний, де визначник вводиться як багатовимірний аналог орієнтованого об'єму паралелепіпеда (орієнтованої площі паралелограма). Легко перевірити, що орієнтована площа паралелограма та орієнтований об'єм паралелепіпеда є полілінійними та кососиметричними функціями від двійок (трійок) векторів, що породжують ці фігури та дорівнюють визначнику другого (третього) порядку, рядки якого є координатами відповідних векторів. Таким чином, аксіоматичний підхід, згідно якого визначник порядку n - це n-місна функція

$$D(a_1, \ldots, a_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

яка є полілінійною, кососиметричною, для якої $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ для стандартного базису $\{e_k, k = 1, \ldots, n\}$ простору $\mathbb{R}^n$, є природнішим для першого знайомства (зазначимо також, що цей підхід є також зручнішим для подальшої побудови теорії визначників).

Зокрема, серед переваг цього підходу варто відзначити використання геометричної інтуїції. Оскільки визначник n-го порядку виступає аналогом орієнтованого об'єму n-вимірного паралелепіпеда, деякі його властивості стають наочно зрозумілими. Наприклад, відома властивість визначника полягає в тому, що він дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли його рядки лінійно залежні. Геометричною мовою це означає, що об'єм паралелепіпеда, натягнутого на n векторів n- вимірного простору дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли ці вектори належать деякій гіперплощині (підпростору розмірності $n-1$), що є еквівалентним їх лінійній залежності. До переваг аксіоматично-геометричного підходу теж слід віднести те, що на відміну від традиційного, він не вимагає знання додаткового матеріалу, такого як властивості перестановок.

Отже, в доповіді розглянуті переваги аксіоматично-геометричного підходу до визначення поняття визначника. Цей підхід дозволяє визначити визначник як узагальнення поняття орієнтованого об'єму паралелепіпеда (орієнтованої площі паралелограма).

Література:

1. *Ван-дер-Варден Б.Л.*, Алгебра. – М.: Мир. – 1976. – 648 с.
2. *Винберг Э.Б.,* Курс алгебры. - М.: Факториал Пресс. – 2001. – 544 с.